ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.968

С.Г. СОЛОДКИЙ

О МОДИФИКАЦИИ ПРОЕКЦИОННОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается задача дискретизации для некоторых классов уравнений I рода $Ax = f$ с истокопредставимыми решениями $x = |A|^p v$. Для любых $p > 0$ строится метод, который в случае априорного выбора параметра регуляризации достигает оптимального порядка точности. При этом показано, что в смысле объема используемой дискретной информации предлагаемый метод является более экономичным в сравнении с традиционной галеркинской дискретизацией.

В работе предлагается экономичная модификация проекционной схемы решения некорректных задач, которая позволяет достичь оптимального порядка точности, используя при этом существенно меньший объем дискретной информации по сравнению с традиционным подходом.

Пусть X — гильбертово пространство, а A — линейный компактный оператор из X в X. Рассмотрим задачу конечномерной аппроксимации решений уравнений I рода

$$Ax = f \tag{1}$$

со свободным членом f из множества $\mathrm{Range}(A) := \{f : f = Ag, \ g \in X\}$. Будем считать, что вместо f задано некоторое его приближение $f_\delta \in X_{\delta,f}$, где $X_{\delta,f}$ — шар радиуса δ в пространстве X с центром в f, а δ — малое положительное число, которое обычно известно.

Приближенное решение (1) будем строить с помощью регуляризатора для этого уравнения. Следуя идее [1] о построении регуляризатора как функции от оператора решаемого уравнения, рассмотрим некоторое параметрическое семейство функций $\{g_\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, измеримых по Борелю на отрезке $[0, \gamma_1^2]$, $\|A\|_{X\to X} \le \gamma_1$. На эти функции наложим два условия

$$\sup_{0\le\lambda\le\gamma_1^2} \lambda^p |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_p \alpha^p, \quad 0 \le p \le p_0, \tag{2}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le\gamma_1^2} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{3}$$

где p_0, χ_p и χ_* — некоторые не зависящие от α положительные константы. Пусть x_0 — наименьшее по норме в X решение (1), тогда в качестве приближения к x_0 примем элемент $x_\alpha = R_\alpha f_\delta$, где регуляризатор R_α, $\alpha = \alpha(\delta)$, будет задаваться соотношением

$$R_\alpha = R_\alpha(A) =: g_\alpha(A^*A)A^*, \tag{4}$$

а A^* такой, что для любых $\varphi, g \in X$ $(\varphi, Ag) = (A^*\varphi, g)$ (под $(\cdot,\cdot)$ понимаем скалярное произведение в X).

Иллюстрацией к описанной схеме регуляризации может служить обобщенный метод Тихонова [2]. Пусть $q \ge -1/2$. Приближенное решение x_α будем определять из уравнения II рода

$$(\alpha^{q+1} I + (A^*A)^{q+1}) x_\alpha = (A^*A)^q A^* f_\delta, \tag{5}$$

где I — тождественный оператор. Это метод вида (4) с функцией $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q/(\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})$, для которой выполнены условия (2), (3) при $p_0 = q + 1$. В случае $q = 0$ получаем обычный метод Тихонова.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда Дж. Сороса (грант № UB1000).

Используя регуляризатор R_α (4), осуществляем переход от некорректной задачи к регуляризованному уравнению, например, (5), процесс приближенного решения которого устойчив. Построение приближенного решения регуляризованной задачи в теории некорректных задач часто рассматривается (см., напр., [3]) как проблема дискретизации, суть которой заключается в том, что для построения приближенного решения (1) используется только дискретная информация об операторе A и приближенной правой части f_δ. Конкретная схема дискретизации определяется выбором конечномерного оператора $A_N = A_N(A)$, $\operatorname{rank} A_N = N$, достаточно близкого к A. При этом приближенное решение $x_{N,\alpha}$ уравнения (1) задается соотношением

$$x_{N,\alpha} = R_{N,\alpha} f_\delta, \quad R_{N,\alpha} = g_\alpha(A_N^* A_N) A_N^*. \tag{6}$$

В дальнейшем используются следующие обозначения. Под записью $a_n \prec\prec b_n$ будем понимать, что существует постоянная c_0, при которой неравенство $a_n \le c_0 b_n$ имеет место для всех $n \ge n_0$. При этом постоянная c_0 не зависит от n. Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что $a_n \prec\prec b_n$ и $b_n \prec\prec a_n$ одновременно.

При априорной информации об истокопредставимости решения x уравнения (1), т. е. при некоторых $p > 0$ и $\rho > 0$

$$x \in M_{p,\rho}(A) := \{u : u = |A|^p v,\ v \in X_{\rho,0}\}, \quad |A| = (A^*A)^{1/2},$$

известно, что x — наименьшее по норме X решение (1) и ([4], с. 14)

$$\inf_{R_\alpha(A)} \sup_{\substack{f=Ax_0,\\ x_0 \in M_{p,\rho}(A)}} \sup_{f_\delta \in X_{\delta,f}} \|x_0 - R_\alpha(A) f_\delta\|_X \asymp \delta^{p/(p+1)}, \tag{7}$$

(inf берется по всевозможным регуляризаторам), при этом ([4], с. 51) для обеспечения оптимального порядка точности (7) нужно в (4) и (6) выбрать $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$.

Так называемые проекционные методы решения регуляризованных уравнений состоят в следующем (см., напр., [5], § 6.3). Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ — некоторый ортонормированный базис в гильбертовом пространстве X, а $P_m \varphi = \sum_{k=1}^{m} (e_k, \varphi) e_k$ — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов базиса. В описанной выше схеме регуляризации полагаем $A_N = P_m A P_l$ и приближенное решение $x_{l,m,\alpha}$ определяем согласно (6)

$$x_{l,m,\alpha} = R_{l,m,\alpha} f_\delta, \quad R_{l,m,\alpha} = g_\alpha(P_l A^* P_m A P_l) P_l A^* P_m. \tag{8}$$

В рамках проекционной схемы дискретизации возникает вопрос о числе базисных элементов, требуемых для обеспечения оптимального порядка точности (7). Для ответа на этот вопрос нужна некоторая априорная информация о “гладкости” оператора A.

Обозначим через X^r, $0 < r < \infty$, линейное нормированное подпространство X, снабженное нормой $\|f\|_{X^r} = \|f\|_X + \|D_r f\|_X$, где D_r — некоторый линейный оператор, действующий из X^r в X, и для любого $m = 1, 2, \dots,$ $\|I - P_m\|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r}$, при этом константа c_r не зависит от m.

Рассмотрим классы линейных операторов

$$\mathcal{H}_{\gamma_1} = \{A : \|A\| \le \gamma_1\},$$
$$\mathcal{H}_\gamma^{r,s} = \{A \in \mathcal{H}_{\gamma_1},\ \|A\|_{X \to X^r} \le \gamma_2,\ \|A^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_3,\ \|(D_r A)^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_4\},$$
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4),$$

где под $\|\cdot\|$ здесь и ниже понимается $\|\cdot\|_{X \to X}$. Для иллюстрации условий, определяющих класс $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau) x(\tau) d\tau$$

в гильбертовом пространстве L_2 функций, суммируемых в квадрате на $(0,1)$ с обычной нормой. При $r = 1$ в качестве пространства X^r возьмем соболевское пространство W_2^1 функций $f(t)$, имеющих производные $f' \in L_2$, а

$$\|f\|_{W_2^1} = \|f\|_{L_2} + \|df/dt\|_{L_2}.$$

Пусть S_m — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in L_2$ частную сумму ее ряда Фурье–Хаара порядка m. Ясно, что S_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов ортонормированного базиса Хаара. Известно ([6], с. 82), что

$$\|I - S_m\|_{W_2^1 \to L_2} \le c_1 m^{-1}.$$

Это означает, что для $X = L_2$, $X^1 = W_2^1$, $D_1 = d/dt$ и $P_m = S_m$ выполнены все условия, определяющие X^r при $r = 1$. Если ядро $a(t,\tau)$ интегрального оператора имеет смешанную частную производную и

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^{i+j} a(t,\tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \right|^2 dt\, d\tau < \infty, \quad i,j = 0,1,$$

то, как легко проверить, $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ при $r = s = 1$, $X = L_2$, $X^r = X^s = W_2^1$ и при некотором наборе параметров γ.

Обозначим через $\Psi_{\gamma_1}^p$ и $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ классы уравнений (1) со свободными членами $f \in AM_{p,\rho}(A) := \{f : f = Ag,\ g \in M_{p,\rho}(A)\}$ и операторами A соответственно из $\mathcal{H}_{\gamma_1}^p$ и $\mathcal{H}_\gamma^{r,s,p}$.

Пусть $\mathrm{Card}(IP)$ — общее число значений скалярных произведений вида (e_i, Ae_j), (e_i, f_δ), требуемое при проекционной схеме дискретизации для обеспечения оптимального порядка точности $\delta^{p/(p+1)}$. Используя результат [2], мы можем для классов $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ решить вопрос о соотношении между m, l и δ в (8).

Теорема 1 ([2]). *Оптимальный порядок погрешности* (7) *на классе* $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ *обеспечивается в рамках традиционной схемы дискретизации* (2), (3), (8) *при* $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$ *и* m, l *таких, что* $m^{r\cdot\min\{p,2\}} \asymp l^{s\cdot\min\{p,1\}} \asymp \delta^{-p/(p+1)}$. *При этом*

$$\mathrm{Card}(IP) = ml + m \asymp \delta^{-a},$$

где

$$rs(p+1)a = \begin{cases} r+s, & 0 < p \le 1; \\ rp+s, & 1 \le p \le 2; \\ (2r+s)p/2, & 2 \le p \le 2p_0. \end{cases}$$

Исходная мотивация. Общая идея предлагаемой ниже модификации проекционной схемы состоит в следующем. Мы можем сохранить порядок точности (7), существенно сократив при этом число используемых функционалов (e_i, Ae_j). В случае уравнений II рода эта идея была успешно реализована в работах [7], [8]. К уравнениям I рода такой подход впервые был применен С.В. Переверзевым [9], где рассматривались только операторы с изотропной "гладкостью" (т. е. $r = s$), а решения (1) предполагались принадлежащими $M_{2,\rho}(A)$, что в принятых у нас обозначениях соответствует классу уравнений $\Psi_\gamma^{r,r,2}$. Однако в случае произвольных параметров r, s и p используемый в [9] метод уже не является оптимальным по точности. Цель данной статьи — построение новых экономичных в смысле величины $\mathrm{Card}(IP)$ проекционных схем для всей шкалы классов $\Psi_\gamma^{r,s,p}$.

Каждому оператору $A \in \mathcal{H}_{\gamma_1}$ поставим в соответствие оператор

$$A_{b,n} = A_n := \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}} + P_1 A P_{2^{bn}}.$$

где b — произвольное вещественное число, не меньшее 1. В случае, когда bn не является целым числом, под $P_{2^{bn-k}}$ будем понимать $P_{[2^{bn-k}]}$, где $[a]$ — целая часть a. В предлагаемой нами модификации проекционной схемы в качестве приближенного решения (1) будем рассматривать элемент

$$x_{b,n,\alpha} = R_{b,n,\alpha} f_\delta, \quad R_{b,n,\alpha} = g_\alpha(A_{b,n}^* A_{b,n}) A_{b,n}^*. \tag{9}$$

Оценку погрешности указанной схемы на классе $\Psi_{\gamma_1}^p$ дает

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$. *Тогда на классе* $\Psi_{\gamma_1}^p$ *для проекционной схемы* (2), (3), (9) *справедлива оценка*

$$\|x_0 - R_\alpha(A) f_\delta\|_X \prec\prec \delta^{p/(p+1)} + \| \, |A|^p - |A_n|^p \| + \delta^{-1/(p+1)} \|(P_{2^n} A - A_{b,n})|A|^p\|.$$

Доказательство. Пусть, как и в [2],

$$S_{b,n,\alpha} = I - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n.$$

Тогда из (9) находим

$$x_0 - R_{b,n,\alpha} f_\delta = R_{b,n,\alpha}(f - f_\delta) + S_{b,n,\alpha} x_0 + R_{b,n,\alpha}(A_n - A) x_0. \tag{10}$$

Оценим теперь отдельно все три слагаемых из правой части (10).

1. Поскольку в силу (3) для любого линейного ограниченного оператора B из X в X справедлива оценка

$$\|g_\alpha(B^* B) B^*\| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{11}$$

то из (9) находим

$$\|R_{b,n,\alpha}(f - f_\delta)\|_X \prec\prec \alpha^{-1/2} \delta.$$

2. С учетом (2) имеем

$$\|S_{b,n,\alpha} x_0\|_X \le \rho(\|S_{b,n,\alpha}|A_n|^p\| + \|S_{b,n,\alpha}\| \| \, |A|^p - |A_n|^p \|) \prec\prec \alpha^{p/2} + \| \, |A|^p - |A_n|^p \|.$$

3. Так как в силу определения A_n справедливо соотношение $A_n^* P_{2^n} = A_n^*$, то

$$R_{b,n,\alpha}(A_n - A) x_0 = g_\alpha(A_n^* A_n)(A_n^* A_n - A_n^* P_{2^n} A) x_0 = R_{b,n,\alpha}(A_n - P_{2^n} A) x_0.$$

Откуда, учитывая (3) и (11), для последнего слагаемого получаем

$$\|R_{b,n,\alpha}(A_n - A) x_0\|_X \prec\prec \alpha^{-1/2} \|(A_n - P_{2^n} A)|A|^p\|.$$

В силу условия теоремы $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$ получаем искомую оценку. □

Замечание. При $p = 1$ во втором слагаемом найденной в теореме 2 оценки можно убрать знак модуля. Для этого достаточно воспользоваться одним соображением из ([4], с. 100). А именно, при $p = 1$ решение (1) представимо в виде $x_0 = A^* z$, $z \in X_{\rho,0}$. Тогда, используя полярное разложение оператора ([10], с. 421) $A_n^* = |A_n| U^*$, где U и U^* — частично изометрические операторы ($\|U\| = 1$), находим

$$\begin{aligned} \|S_{b,n,\alpha} x_0\|_X &\le \|S_{b,n,\alpha} A_n^* z\|_X + \|S_{b,n,\alpha}(A^* - A_n^*) z\|_X \le \\ &\le \rho\,(\|S_{b,n,\alpha}|A_n|\,\| + \|S_{b,n,\alpha}\|\,\|A^* - A_n^*\|) \prec\prec \alpha^{1/2} + \|A - A_n\|. \end{aligned}$$

Следствие. Для достижения на классе уравнений $\Phi_{\gamma_1}^p$ оптимального порядка погрешности (7) в рамках схемы дискретизации (2), (3), (9) достаточно выполнения следующих условий:

(i) $\| \, |A|^p - |A_n|^p \| \prec\prec \delta^{p/(p+1)}$, $p \ne 1$; $\|A - A_n\| \prec\prec \delta^{1/2}$, $p = 1$;
(ii) $\|(P_{2^n} A - A_n)|A|^p\| \prec\prec \delta$.

Приведем теперь ряд вспомогательных результатов, которые потребуются в дальнейшем. Пусть B и $\widetilde{B}$ — линейные ограниченные операторы из X в X. При любых $p > 0$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедливы оценки ([2], [4], сс. 93, 95)

$$\| \, |B|^p - |P_m B|^p \| \prec\prec \|(I - P_m)B\|^{\min\{p,2\}}, \tag{12}$$

$$\|(I - P_m)|B|^p\| \prec\prec \|B(I - P_m)\|^{\min\{p,1\}}, \tag{13}$$

$$\| \, |B|^p - |\tilde{B}|^p \| \prec\prec \sigma_p \|B - \tilde{B}\|^{\min\{p,1\}}, \tag{14}$$

$$\sigma_p = \{ | \ln \|B - \widetilde{B}\| \, |, \ \ p = 1; \quad 1, \ \ p \neq 1 \},$$

а если $B = B^* \geq 0$ и $\widetilde{B} = \widetilde{B}^* \geq 0$, то

$$\|B^p - \widetilde{B}^p\| \prec\prec \|B - \widetilde{B}\|^{\min\{p,1\}}. \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$. Тогда для $A_n = A_{b,n}$*

$$\|A^* A - A_n^* A_n\| \prec\prec 2^{-2rn} + 2^{-(bs - (s-2r)_+)n},$$

где

$$a_+ n = \begin{cases} an, & a > 0; \\ \log_2 n, & a = 0; \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и любых $m, l, \mu = 1, 2, \ldots$

$$\|(I - P_m)A\| \leq \gamma_2 c_r m^{-r}, \quad \|A(I - P_l)\| \leq \gamma_3 c_s l^{-s},$$

$$\|A(I - P_\mu)\|_{X \to X^r} \leq \|(I - P_\mu)A^*\| + \|(I - P_\mu)(D_r A)^*\| \leq (\gamma_3 + \gamma_4) c_s \mu^{-s}.$$

Используя эти неравенства, получаем

$$\|(I - P_\nu)A(I - P_\mu)\| \leq \|I - P_\nu\|_{X^r \to X} \|A(I - P_\mu)\|_{X \to X^r} \leq (\gamma_3 + \gamma_4) c_r c_s \nu^{-r} \mu^{-s}. \tag{16}$$

Далее

$$\|A^* A - A_n^* A_n\| \leq \|A^*(I - P_{2^n})^2 A\| + \|A^* P_{2^n} A - A_n^* A_n\|. \tag{17}$$

Так как в силу определения $A_n = A_{b,n}$ справедливо разложение

$$A_n^* A_n = \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-k}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}} + P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}},$$

то

$$\|A^* P_{2^n} A - A_n^* A_n\| \leq \|A^* P_1 A - P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}}\| + \sum_{k=1}^{n} \|G_k\|, \tag{18}$$

$$G_k = A^*(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})A - P_{2^{bn-k}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}}.$$

При помощи (16) находим

$$\|G_k\| \prec\prec \|(I - P_{2^{bn-k}}) A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}}\| + \\ + \|P_{2^{bn-k}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A (I - P_{2^{bn-k}})\| \prec\prec 2^{-bsn + k(s-2r)}. \tag{19}$$

Кроме того,

$$\|A^* P_1 A - P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}}\| \leq \|(I - P_{2^{bn}}) A^* P_1 A\| + \|P_{2^{bn}} A^* P_1 A (I - P_{2^{bn}})\| \prec\prec 2^{-bsn}. \tag{20}$$

Таким образом, в силу (18)–(20) имеем

$$\|A^*P_{2^n}A - A_n^*A_n\| \prec\prec 2^{-bsn}\sum_{k=0}^{n} 2^{k(s-2r)}.$$

Откуда с учетом (16) и (17) получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$. Тогда для любого $p \geq 0$*

$$\|(P_{2^n}A - A_n)|A|^p\| \prec\prec 2^{-(bs(1+\min\{p,1\})-(s(1+\min\{p,1\})-r)_+)n}.$$

Доказательство. Поскольку

$$P_{2^n}A - A_n = \sum_{k=1}^{n}(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})A(I - P_{2^{bn-k}}) + P_1A(I - P_{2^{bn}}),$$

то в силу (13) и (16)

$$\|(P_{2^n}A - A_n)|A|^p\| \leq \sum_{k=1}^{n}\|(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})A(I - P_{2^{bn-k}})\|\|(I - P_{2^{bn-k}})|A|^p\| +$$

$$+ \|P_1A(I - P_{2^{bn}})\|\,\|(I - P_{2^{bn}})|A|^p\| \prec\prec \sum_{k=0}^{n} 2^{-kr}\left(2^{-s(bn-k)}\right)^{1+\min\{p,1\}}. \quad \square$$

Следующее утверждение является основным результатом данной работы.

Теорема 3. *Пусть $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$. Оптимальный порядок погрешности (7) на классе $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ обеспечивается в рамках проекционной схемы дискретизации (2), (3), (9) в случае, когда параметры b и n удовлетворяют следующим условиям:*

а) для $0 < p \leq 1$ $\quad 2^{-r(p+1)n} \asymp \delta, \quad b = \begin{cases} \frac{rp}{s(p+1)} + 1, & r/s \leq 1+p; \\ r/s, & r/s \geq 1+p, \end{cases}$

б) для $1 \leq p \leq 2$ $\quad 2^{-r(p+1)n} \asymp \delta, \quad b = \begin{cases} \frac{rp}{2s} + 1, & r/s \leq 2/p; \\ rp/s, & r/s \geq 2/p, \end{cases}$

в) для $2 \leq p \leq 2p_0$ $\quad 2^{-2r(p+1)n/p} \asymp \delta, \quad b = \begin{cases} \frac{r(p+2)}{2sp} + 1, & r/s \leq 2p/(3p-2); \\ 2r/s, & r/s \geq 2p/(3p-2). \end{cases}$

Доказательство. Прежде всего оценим величину $\|\,|A|^p - |A_n|^p\|$ при $p \neq 1$. Для этого воспользуемся неравенствами (12) и (14)

$$\|\,|A|^p - |A_n|^p\| \leq \|\,|A|^p - |P_{2^n}A|^p\| + \|\,|A_n|^p - |P_{2^n}A|^p\| \prec\prec$$

$$\prec\prec \|(I - P_{2^n})A\|^{\min\{p,2\}} + \|A_n - P_{2^n}A\|^{\min\{p,1\}}.$$

С другой стороны, в силу (15) имеем

$$\|\,|A|^p - |A_n|^p\| = \|(A^*A)^{p/2} - (A_n^*A_n)^{p/2}\| \prec\prec \|A^*A - A_n^*A_n\|^{\min\{p/2,1\}}.$$

Таким образом, на основании полученных выше оценок для выполнения условия (i) из следствия теоремы 2 достаточно, чтобы

$$\min\left\{\begin{matrix}\|(I - P_{2^n})A\|^{\min\{p,2\}} + \|A_n - P_{2^n}A\|^{\min\{p,1\}} \\ \|A^*A - A_n^*A_n\|^{\min\{p/2,1\}}\end{matrix}\right\} \prec\prec \delta^{p/(p+1)}. \tag{21}$$

Если теперь положить $\delta^{-1} = 2^{Mn}$, $M = \log(\delta^{-1})/n$, то в силу условий (ii) следствия к теореме 2, (21), лемм 1, 2 и оценки (16) приходим к системе неравенств для определения параметров b и M

$$\left\{\begin{array}{l} r\cdot\min\{p,2\} \geq pM/(p+1), \\ \left[\begin{array}{l} bs \geq pM/((p+1)\min\{p,1\}) + (s-r)_+ \\ bs \geq pM/((p+1)\min\{p/2,1\}) + (s-2r)_+ \end{array}\right. \\ bs \geq (M + (s(1+\min\{p,1\}) - r)_+)/(1+\min\{p,1\}), \end{array}\right. \tag{22}$$

где квадратная скобка означает, что из заключенных в нее неравенств в общую систему входит лишь то, правая часть которого меньше. Напомним (см. исходную мотивацию), что целью данной работы является построение не просто оптимальной по точности схемы дискретизации, но также и наиболее экономичной в смысле величины

$$\mathrm{Card}(IP) \asymp n2^{bn} \asymp \delta^{-b/M}\log(\delta^{-1}). \tag{23}$$

Из соотношения (23) видно, что наиболее экономичной предлагаемая схема будет тогда, когда отношение b/M при ограничениях (22) будет наименьшим. Решение этой задачи дробно-линейного программирования достигается в вершине многогранника, описываемого системой (22), т. е. тогда, когда два из ограничений (22) выполняются как равенства. Учитывая специфику системы неравенств (22) и положительность всех коэффициентов в ней, нетрудно заметить, что первое из неравенств (22) входит в число этих двух ограничений.

Отсюда для случая $p \geq 2$ при любых $r, s > 0$ решением (b^*, M^*) задачи дробно-линейного программирования будет $M^* = 2r(p+1)/p$, $b^* = \max\left\{\frac{2r+(s-2r)_+}{s}, \frac{r(p+1)}{sp} + \frac{(2s-r)_+}{2s}\right\}$.

Решая аналогичным образом задачу при $p < 2$, мы тем самым завершаем доказательство теоремы 3. $\square$

Следствие 1. Для обеспечения оптимального порядка точности (7) на классе уравнений $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ в рамках схемы (2), (3), (9) требуется

$$\mathrm{Card}(IP) \asymp \delta^{-a}\log(\delta^{-1}),$$

где

$$\text{а)}\quad a = \begin{cases} \frac{rp+s(p+1)}{rs(p+1)^2}, & r/s \leq 1+p, \\ \frac{1}{s(p+1)}, & r/s \geq 1+p, \end{cases} \qquad \text{при } 0 < p \leq 1;$$

$$\text{б)}\quad a = \begin{cases} \frac{rp+2s}{2rs(p+1)}, & r/s \leq 2/p, \\ \frac{p}{s(p+1)}, & r/s \geq 2/p, \end{cases} \qquad \text{при } 1 \leq p \leq 2;$$

$$\text{в)}\quad a = \begin{cases} \frac{r(p+2)+2sp}{4rs(p+1)}, & r/s \leq 2p/(3p-2), \\ \frac{p}{s(p+1)}, & r/s \geq 2p/(3p-2), \end{cases} \qquad \text{при } 2 \leq p \leq 2p_0.$$

Приведенные в следствии оценки непосредственно вытекают из теоремы 3 и соотношения (23).

Замечание 1. Сравнение теоремы 1 и следствия к теореме 3 показывает, что с точки зрения объема дискретной информации, требуемой для достижения на классе $\Psi_\gamma^{r,s,p}$ оптимального порядка точности (7), схема дискретизации (2), (3), (9) экономичнее традиционной проекционной схемы (2), (3), (8) по порядку величины δ при любых $r, s > 0$ и $0 < p \leq 2p_0$.

Замечание 2. Полученная в следствии теоремы 3 оценка для класса $\Psi_\gamma^{r,r,2}$ лучше на логарифмический множитель соответствующего результата из [9].

Автор глубоко признателен проф. Я.И. Заботину за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Литература

1. Бакушинский А.Б. *Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 3. – С. 672–677.
2. Plato R., Vainikko G. *On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems* // Numer. Math. – 1990. – V. 57. – P. 63–70.
3. Васин В.В. *Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22. – № 4. – С. 824–839.
4. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986.
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
6. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Наука, 1984. – 495 с.
7. Pereverzev S., Scharipov C. *Information complexity of equations of second kind with compact operators in Hilbert space* // Journal of Complexity. – 1992. – V. 8. – P. 176–202.
8. Heinrich S. *Random approximation in numerical analysis* // Functional Analysis. – New York, 1994. – P. 123–171.
9. Pereverzev S. *Optimization of projection methods for solving ill-posed problems* // Computing. – 1995. – V. 55. – № 2. – P. 113–124.
10. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Институт математики
Национальной Академии наук Украины

Поступила
04.12.1995