ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.929

*В.В. МАЛЫГИНА*

# ОБ ОЦЕНКЕ МАТРИЦЫ КОШИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Дифференциальные уравнения с последействием являются математической моделью биологических, химических, экономических процессов: учет эффекта последействия дает возможность более точного их описания ([1]–[3]). Для уравнений с последействием так же, как и для прочих моделей динамических систем, одной из основных проблем является исследование устойчивости решения при возмущениях различной природы. Данная работа посвящена получению признаков устойчивости решений указанных уравнений, сформулированных в терминах исходной задачи.

Рассмотрим систему линейных функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty), \quad x(\xi) = 0, \quad \xi \notin \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $A$ – матрица-функция размерности $n \times n$ с суммируемыми на каждом конечном отрезке $[0, T]$ компонентами, $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — измеримая по Лебегу функция. Под решением системы (1) будем понимать вектор-функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ с абсолютно непрерывными на каждом $[0, T]$ компонентами, удовлетворяющую (1) почти всюду. Решение системы (1) при любой начальной точке $s$ может быть представлено в виде [4]

$$x(t) = C(t, s)x(s), \quad t \geq s.$$

Матрица-функция $C$ называется матрицей Коши системы (1) и определяется как решение следующей задачи [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t, s) + A(t)C(t - r(t), s) = 0, \quad t \geq s, \quad C(\xi, s) = 0, \quad \xi < s; \quad C(s, s) = E. \tag{2}$$

Матрица Коши будет основным объектом нашего исследования.

**Определение.** Систему (1) назовем *асимптотически устойчивой*, если $\|C(t, s)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ и любом $s \in \mathbb{R}_+$; *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие положительные постоянные $\alpha$ и $N$, что для матрицы Коши системы (1) справедлива оценка

$$\|C(t, s)\| \leq N \exp(-\alpha(t - s)), \quad t \geq s \geq 0.$$

Обозначим через $L$ пространство суммируемых, а через $L_\infty$ — измеримых и ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$ функций.

**Теорема 1.** *Пусть* $\|A(\cdot)\| \in L$. *Тогда*

а) *для матрицы Коши системы* (1) *справедлива оценка*

$$\|C(t, s)\| \leq \mathrm{const} \quad \textit{при всех} \quad t \geq s \geq 0;$$

б) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $T > 0$, *что для всех* $t$, $s$, *удовлетворяющих условию* $t \geq s \geq T$, *справедливо неравенство* $\|C(t, s) - E\| < \varepsilon$.

**Доказательство.** В силу известной [5] оценки для матрицы Коши получаем

$$\|C(t,s)\| \leq \exp\Big(\int_s^t \|A(\tau)\|d\tau\Big) \leq \exp\Big(\int_0^\infty \|A(\tau)\|d\tau\Big) = K < \infty,$$

и утверждение а) доказано. Из уравнения (2) и только что установленной оценки получаем

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial t}C(t,s)\Big\| \leq K\|A(t)\|, \qquad \Big\|\int_s^t \frac{\partial}{\partial t}C(\tau,s)d\tau\Big\| \leq K\int_s^t \|A(\tau)\|d\tau,$$

или $\|C(t,s) - E\| \leq K\int\limits_s^\infty \|A(\tau)\|d\tau$. Отсюда в силу сходимости интеграла следует утверждение б). □

Для дальнейшего исследования удобно привести ряд признаков устойчивости решений скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) + \lambda(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x(\xi) = 0, \quad \xi \notin \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где функция $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0, T]$.

**Лемма 1** ([6]). *Пусть $\lambda(t) \in \mathbb{R}_+$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Тогда, если*

$$\operatorname{vrai}\varlimsup_{t\to\infty}\int_{t-r(t)}^t \lambda(s)ds < 3/2, \quad t \geq r(t),$$

*для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leq N\exp\Big(-\alpha\int_s^t \lambda(\tau)d\tau\Big), \quad N, \alpha > 0. \tag{4}$$

**Лемма 2** ([6]). *Пусть $\lambda(t) \in \mathbb{R}_+$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Тогда, если*

$$\operatorname{vrai}\lim_{t\to\infty}\int_{t-r(t)}^t \lambda(s)ds < \pi/2, \quad t \geq r(t),$$

*для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка* (4).

**Лемма 3** ([7]). *Пусть $\lambda(t) = e^{i\varphi(t)}$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to (-\pi, \pi]$, а $\operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t) \equiv \omega < \infty$. Тогда, если при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$*

$$\sup_{t\geq\tau}\int_\tau^t \exp\Big(-\int_s^t \cos\varphi(\tau)d\tau\Big)ds < \omega^{-1},$$

*уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво.*

**Лемма 4** ([7]). *Если при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$*

$$\sup_{t\geq\tau}\int_\tau^t |\lambda(s)|\exp\Big(-\int_s^t \operatorname{Re}\lambda(\tau)d\tau\Big)ds < \Big(\operatorname{vrai}\varlimsup_{t\to\infty}\int_{t-r(t)}^t |\lambda(s)|ds\Big)^{-1},$$

*то для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leq N\exp\Big(-\alpha\int_s^t |\lambda(\tau)|d\tau\Big), \quad \alpha, N > 0.$$

**Теорема 2.** *Пусть $A(t) = a(t)A$, где $A$ — постоянная $n\times n$-матрица, $a(t)$ — вещественная неотрицательная функция. Если для всех собственных чисел $\lambda_k$, $k = \overline{1,n}$, матрицы $A$ выполнено хотя бы одно из условий*:

а) $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_k \operatorname{vrai}\varlimsup\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t-r(t)}^t a(s)ds < 3/2$;

б) $\lambda_k \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda_k \operatorname{vrai} \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-r(t)}^{t} a(s)ds < \pi/2;$

в) $|\lambda_k|^2 \operatorname{vrai} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int\limits_{t-r(t)}^{t} a(s)ds < \operatorname{Re}\lambda_k;$

г) $\lambda_k \operatorname{vrai} \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-r(t)}^{t} a(s)ds \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{\pi}{2} - |\arg z|\},$

*то для матрицы Коши системы* (1) *при всех* $t \geq s \geq 0$ *справедлива оценка*

$$\|C(t,s)\| \leq N \exp\left( -\alpha \int_s^t a(\tau)d\tau \right)$$

*с некоторыми постоянными* $\alpha > 0$ *и* $N > 0$.

**Доказательство.** Не нарушая общности, можно считать, что $a(\cdot) \notin L$ и $a(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Заменой переменных $u = \varphi(t) = \int\limits_0^t a(s)ds$, $x(\varphi^{-1}(u)) = y(u)$ система (1) приводится к виду

$$y'(u) + Ay\Bigg(u - \int\limits_{\varphi^{-1}(u)-r(\varphi^{-1}(u))}^{\varphi^{-1}(u)} a(s)ds\Bigg) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

По теореме Шура ([8], теорема 2.3.1) матрицу $A$ можно с помощью унитарного преобразования привести к треугольному виду. Из лемм 1–4, теоремы Д4 из [9] и интегрального представления решения [4] следует, что система (5) экспоненциально устойчива. Возвращаясь к исходным переменным, получаем для матрицы Коши системы (1) требуемую оценку. □

## Литература


1. Резван В. *Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием.* – М.: Наука, 1983. – 360 с.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ.* – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.* – М.: Мир, 1983. – 397 с.
4. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 6. – С. 1026–1036.
5. Тышкевич В.А. *Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1981. – 80 с.
6. Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1716–1723.
7. Малыгина В.В. *Об асимптотическом поведении решения некоторых систем с последействием* // Пробл. матем. в физ. и технич. задачах. – М., 1994. – С. 121-128.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 656 с.
9. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.


*Пермский государственный*
*технический университет*

*Поступила*
02.07.2001