ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 12 (499)

УДК 519.677

В.Ф. ДЕМЬЯНОВ, Ф. ФАККИНЕЙ

ЗАДАЧИ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ

Задача нахождения оптимального значения функционала на решениях другой оптимизационной задачи сводится к задаче безусловной минимизации некоторого функционала, который (даже в случае гладкости исходных функционалов) является существенно негладким. Указанное сведение проводится с помощью теории точных штрафных функций.

1. Оптимизация в метрическом пространстве

В данном разделе приводятся без доказательств некоторые результаты из теории оптимизации в метрических пространствах. Доказательства можно найти в [1], [2].

1.1. Задача безусловной оптимизации

Пусть на метрическом пространстве X с метрикой ρ определен функционал $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Положим $\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ и предположим, что

$$\operatorname{dom} f \neq \emptyset. \tag{1}$$

Пусть $x \in \operatorname{dom} f$. Положим

$$f^{\downarrow}(x) = \liminf_{\substack{y\in X\\ y\to x}} \frac{f(y)-f(x)}{\rho(x,y)}. \tag{2}$$

Если не существует последовательности $\{y_k\}$ такой, что

$$y_k \in X, \quad y_k \neq x \ \forall k, \quad y_k \to 0,$$

то по определению полагаем $f^{\downarrow}(x) = +\infty$. Поскольку $x \in \operatorname{dom} f$, то предел в (2) всегда существует, хотя он может быть равен как $+\infty$, так и $-\infty$.

Величину $f^{\downarrow}(x)$ назовем *скоростью наискорейшего спуска* функции f в точке x.

Из (2) имеем разложение

$$f(y) = f(x) + \rho(x,y) f^{\downarrow}(x) + \underline{o}(\rho(x,y)),$$

где

$$\liminf_{y\to x} \frac{\underline{o}(\rho(x,y))}{\rho(x,y)} = 0.$$

Аналогично для $x \in \operatorname{dom} f$ определяется величина

$$f^{\uparrow}(x) = \limsup_{\substack{y\in X\\ y\to x}} \frac{f(y)-f(x)}{\rho(x,y)}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00668).

Если не существует последовательности $\{y_k\}$ такой, что

$$y_k \in X, \quad y_k \neq x \ \forall k, \quad y_k \to x,$$

то по определению полагаем $f^{\uparrow}(x) = -\infty$. Поскольку $x \in \operatorname{dom} f$, то предел в (3) также всегда существует, хотя он может быть равен и бесконечности.

Из (3) вытекает разложение

$$f(y) = f(x) + \rho(x,y) f^{\uparrow}(x) + \overline{o}(\rho(x,y)),$$

где

$$\limsup_{y \to x} \frac{\overline{o}(\rho(x,y))}{\rho(x,y)} = 0.$$

Величину $f^{\uparrow}(x)$ назовем *скоростью наискорейшего подъема* функции f в точке x.

Положим $f_* = \inf_{x \in X} f(x)$, $f^* = \sup_{x \in X} f(x)$. В силу (1) имеем $f_* < +\infty$, $f^* > -\infty$. Если $f(x_*) = f_*$ для некоторой точки $x_* \in X$, то x_* называется точкой *минимума* (или *глобального, абсолютного минимума*) функции f на X. Конечно, может случиться, что такой точки x_* не существует.

Если для $\overline{x} \in X$ оказалось $f(\overline{x}) = +\infty$ или $f(\overline{x}) = -\infty$, то $\overline{x}$ по определению соответственно является точкой глобального максимума или глобального минимума функции f на X.

Теорема 1.1. *Для того чтобы $x_* \in \operatorname{dom} f$ была точкой глобального или локального минимума функции f на X, необходимо, чтобы*

$$f^{\downarrow}(x_*) \geq 0. \tag{4}$$

Если

$$f^{\downarrow}(x_*) > 0,$$

то x_* является точкой строгого локального минимума f на X.

Теорема 1.2. *Для того чтобы $x^* \in \operatorname{dom} f$ была точкой глобального или локального максимума функции f на X, необходимо, чтобы*

$$f^{\uparrow}(x^*) \leq 0. \tag{5}$$

Если

$$f^{\uparrow}(x^*) < 0,$$

то x^* является точкой строгого локального максимума функции f на X.

Определение 1.1. При выполнении условия (4) точка $x_* \in X$ называется inf-*стационарной*, а при выполнении (5) — sup-*стационарной* точкой функции f на X.

Определение 1.2. Последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in X$, такая, что $f(x_k) \to f_* = \inf_{x \in X} f(x)$, называется *минимизирующей*, а в случае $f(x_k) \to f^* = \sup_{x \in X} f(x)$ — *максимизирующей* для функции f на X.

1.2. Оптимизация в метрическом пространстве при наличии ограничений

Пусть $\{X, \rho\}$ — метрическое пространство, $\Omega \subset X$ — непустое множество этого пространства. Предположим, что на X определен функционал $f : X \to \mathbb{R}$. Требуется найти

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = f^*_\Omega. \tag{6}$$

Если вместо множества X взять множество Ω с той же метрикой ρ, то задача условной минимизации (6) является задачей безусловной минимизации в метрическом пространстве $\{\Omega, \rho\}$. Однако часто удобно и полезно не делать такого сведения.

Теорема 1.3. *Для того чтобы $x_* \in \Omega$ была точкой глобального или локального минимума функции f на множестве Ω, необходимо, чтобы*

$$f^{\downarrow}(x_*, \Omega) = \liminf_{\substack{y \in \Omega \\ y \to x_*}} \frac{f(y) - f(x_*)}{\rho(y, x_*)} \geq 0. \tag{7}$$

Если оказалось $f^{\downarrow}(x_*, \Omega) > 0$, то x_* — точка строгого локального минимума.

Теорема 1.4. *Для того чтобы $x^* \in \Omega$ была точкой глобального или локального максимума функции f на множестве Ω, необходимо, чтобы*

$$f^{\uparrow}(x^*, \Omega) = \limsup_{\substack{y \in \Omega \\ y \downarrow x^*}} \frac{f(y) - f(x^*)}{\rho(y, x^*)} \leq 0. \tag{8}$$

Если оказалось $f^{\uparrow}(x^*, \Omega) < 0$, то x^* — точка строгого локального максимума.

Точка $x_* \in \Omega$, удовлетворяющая (7), называется inf-*стационарной*, а точка $x^* \in \Omega$, удовлетворяющая (8), — sup-*стационарной* для функции f на Ω.

Пусть

$$\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}, \tag{9}$$

где

$$\varphi : X \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq 0 \ \ \forall x \in X. \tag{10}$$

Заметим, что любое множество $\Omega \subset X$ можно представить в виде (9), где φ удовлетворяет (10). Например, можно взять

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega; \\ 1, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Если множество Ω замкнутое, то в качестве φ можно также взять функцию

$$\varphi(x) = \inf_{y \in \Omega} \rho(x, y).$$

Определение 1.3. Последовательность $\{x_k\}$ называется *минимизирующей* (м. п.) для функции f на множестве Ω, если

$$x_k \in \Omega \ \ \forall k, \quad f(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} f^*_\Omega = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

Последовательность $\{x_k\}$ называется *обобщенной минимизирующей* (о. м. п.) для функции f на Ω, если

$$x_k \in X \ \ \forall k, \quad \rho(x_k, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \rho(x_k, y) \to 0, \quad f(x_k) \longrightarrow f^*_\Omega.$$

Последовательность $\{x_k\}$ называется *φ-минимизирующей* (φ-м. п.) для функции f на Ω, если

$$x_k \in X \ \ \forall k, \quad \varphi(x_k) \to 0, \quad f(x_k) \longrightarrow f^*_\Omega.$$

1.3. Штрафные функции

Пусть $\{X, \rho\}$ — метрическое пространство, множество Ω задано в виде (9). Зафиксируем $\lambda \geq 0$. Функция

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\varphi(x) \tag{11}$$

называется *штрафной функцией* (для заданных f и φ), число λ — *штрафным параметром*. Положим

$$F_\lambda^* = \inf_{x \in X} F_\lambda(x).$$

Для любого $\lambda \geq 0$ существует последовательность $\{x_{\lambda k}\}$, которая является минимизирующей для функции $F_\lambda(x)$ на X, т. е.

$$F_\lambda(x_{\lambda k}) \longrightarrow \inf_{x \in X} F_\lambda(x).$$

Лемма 1.1. *Если*

$$\inf_{x \in X} f(x) = f^* > -\infty, \tag{12}$$

то $d(\lambda) = \limsup_{k \to \infty} \varphi(x_{\lambda k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$

Положим $\Omega_\delta = \{x \in X \mid \varphi(x) < \delta\}$, $r_\delta = \sup_{y \in \Omega_\delta} \rho(y, \Omega)$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\inf_{x \in X} f(x) = f^* > -\infty$, $r_\delta \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} 0$, *а функция* f *равномерно непрерывна на* Ω_{δ_0} *для некоторого* $\delta_0 > 0$. *Тогда* $\lim_{\lambda \to \infty} F_\lambda^* = f_\Omega^*$.

1.4. Точки глобального минимума

С учетом 1.3 справедлива

Теорема 1.5. *Пусть имеет место* (12) *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $\lambda_0 < \infty$ *такое, что для каждого* $\lambda \geq \lambda_0$ *найдется* $x_\lambda \in X$, *для которого*

$$F_\lambda(x_\lambda) = F_\lambda^* = \inf_{x \in X} F_\lambda(x);$$

2) *найдутся* $\delta > 0$ *и* $a > 0$ *такие, что*

$$\varphi^\downarrow(x) \leq -a < 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega, \tag{13}$$

где

$$\Omega_\delta = \{x \in X \mid \varphi(x) < \delta\},$$

3) *функция* f *липшицева на* $\Omega_\delta \setminus \Omega$, *т. е. для некоторого* $L < \infty$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega_\delta \setminus \Omega. \tag{14}$$

Тогда существует $\lambda^* \geq \lambda_0$ *такое, что*

$$\varphi(x_\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda > \lambda^*, \quad f(x_\lambda) = f_\Omega^* = \inf_{x \in \Omega} f(x),$$

т. е. точка x_λ — *решение задачи* (6).

Определение 1.4. Число $\lambda^* \geq 0$ называется *константой точного штрафа* (для функции f на множестве Ω), если

$$F_\lambda^* := \inf_{x \in X} F_\lambda(x) = \inf_{x \in \Omega} f(x) =: f_\Omega^* \quad \forall \lambda > \lambda^* \tag{15}$$

и существует последовательность $\{x_k^*\}$ такая, что для всех $\lambda > \lambda^*$

$$x_k^* \in X \ \ \forall k, \quad F_\lambda(x_k^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_\lambda^*, \quad \rho(x_k^*, \Omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Нижние грани в (15) могут и не достигаться.

Функция $F_\lambda(x)$ при $\lambda > \lambda^*$ называется *функцией точного штрафа.*

Таким образом, в условиях теоремы 1.5 λ^* является константой точного штрафа, т. к. в качестве последовательности $\{x_k^*\}$ можно взять "постоянную" последовательность, положив (для любого фиксированного $\lambda > \lambda^*$) $x_k^* = x_\lambda \ \ \forall k$.

Теорема 1.6. *Пусть имеет место* (12) *и выполнены условия* 2) *и* 3) *теоремы* 1.5. *Тогда существует $\lambda^* \geq \lambda_0$, являющаяся константой точного штрафа для функции f на множестве Ω.*

1.5. Точки локального минимума и inf-стационарные точки

Теорема 1.7. *В условиях теоремы* 1.5 *найдется такое $\lambda^* < \infty$, что при $\lambda > \lambda^*$ все точки локального минимума функции $F_\lambda(x)$, принадлежащие множеству Ω_δ, являются и точками локального минимума функции f на Ω.*

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия* 2) *и* 3) *теоремы* 1.5. *Если $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функции f на Ω, то найдется $\lambda^* < \infty$ такое, что x_0 при $\lambda > \lambda^*$ будет точкой локального минимума функции $F_\lambda(x)$.*

Теорема 1.9. *Предположим, что для чисел $\delta > 0$, $a > 0$ и $L < \infty$ выполнены условия* (13) *и* (14). *Тогда найдется такое $\lambda^* < \infty$, что при $\lambda > \lambda^*$ любая* inf*-стационарная точка функции $F_\lambda(x)$ на множестве X, принадлежащая множеству Ω_δ, является и* inf*-стационарной точкой функции f на множестве Ω.*

Замечание 1.1. Из теорем 1.5, 1.7 и 1.8 следует, что при выполнении условий теоремы 1.5 при достаточно больших λ все точки глобального и локального минимума функций $F_\lambda(x)$ на X и функции f на Ω, принадлежащие множеству Ω_δ, совпадают.

Обычно большинство существующих численных методов приводят лишь к inf-стационарной точке. Из теоремы 1.9 следует, что при достаточно большом коэффициенте λ все inf-стационарные точки функции $F_\lambda(x)$ на X, принадлежащие множеству Ω_δ, являются и inf-стационарными точками функции f на множестве Ω. Обратное, вообще говоря, неверно, но нас не интересуют inf-стационарные точки функции f на Ω, не являющиеся точками локального или глобального минимума.

Сформулируем еще одно условие, при выполнении которого задача условной минимизации сводится к задаче безусловной минимизации.

Теорема 1.10. *Предположим, что $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функции f на множестве Ω и что существуют $a > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$\varphi(x) \geq a\rho(x, \Omega) \ \ \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Если функция f липшицева на $B_\delta(x_0)$ с константой Липшица L, то найдется такое $\lambda^* < \infty$, что x_0 при $\lambda > \lambda^*$ является точкой локального минимума функции $F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)$ на множестве X.

Результаты по теории штрафных и точных штрафных функций можно найти, например, в работах [2]–[11].

2. Задача двухуровневой оптимизации

2.1. Постановка задачи

Пусть $\{X, \rho\}$ — метрическое пространство; $f, f_1 : X \to \mathbb{R}$ — заданные непрерывные функции; $G \subset X$ — заданное множество.

Положим

$$\Omega = \{x \in G \mid f_1(x) \le f_1(y) \quad \forall y \in G\},$$

т. е. $\Omega \subset G$ — множество точек минимума функции f_1 на множестве G. Предположим, что $\Omega \neq \emptyset$.

Задача $\mathbf{P}_1$. Найти $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$.

Задача $\mathbf{P}_1$ является двухуровневой (двухэтапной) задачей оптимизации. Многие практические задачи могут быть описаны с помощью математических моделей, в которых требуется решать задачи подобного вида (напр., [12], [13]). В данной работе с помощью теории точных штрафов задача двухэтапной оптимизации сводится к задаче минимизации некоторого функционала на всем пространстве [9].

2.2. Штрафные функции в двухуровневой задаче

Множество Ω можно представить в виде

$$\Omega = \{x \in G \mid \varphi(x) = 0\}, \tag{16}$$

где

$$\varphi(x) := \sup_{y \in G}(f_1(x) - f_1(y)) = f_1(x) - f_{1G}^*, \quad f_{1G}^* = \inf_{y \in G} f_1(y). \tag{17}$$

Отметим, что $\varphi(x) \ge 0 \ \ \forall x \in G$.

Рассмотрим случай, когда множество G представлено в виде

$$G = \{x \in X \mid \varphi_1(x) = 0\},$$

где

$$\varphi_1(x) \ge 0 \ \ \forall x \in X.$$

Зафиксируем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \ge 0$. Запись $\lambda \ge 0$ здесь и везде далее означает, что $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$. Аналогично $\lambda > 0$ означает, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Введем функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)].$$

Функция $F_\lambda(x)$ называется *штрафной* (для заданных f, φ и φ_1), вектор λ — *штрафным параметром.* Положим

$$F_\lambda^* = \inf_{x \in X} F_\lambda(x).$$

Для любого $\lambda \ge 0$ существует последовательность $\{x_{\lambda k}\}$, которая является минимизирующей для функции $F_\lambda(x)$ на X, т. е.

$$F_\lambda(x_{\lambda k}) \longrightarrow \inf_{x \in X} F_\lambda(x).$$

Определение 2.1. Последовательность $\{x_k\}$ называется (φ, φ_1)-*минимизирующей* для функции f на Ω ((φ, φ_1)-м. п.), если

$$x_k \in X \ \ \forall k, \quad \varphi(x_k) \to 0, \quad \varphi_1(x_k) \to 0,$$
$$f_1(x_k) \longrightarrow f_{1G}^* = \inf_{x \in G} f_1(x), \quad f(x_k) \longrightarrow f_\Omega^* = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

Лемма 2.1. *Если*

$$\inf_{x\in X} f(x) = f^* > -\infty, \quad \inf_{x\in X} f_1(x) = f_1^* > -\infty,$$

то

$$d(\lambda) = \limsup_{k\to\infty} \varphi(x_{\lambda k}) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0, \tag{18}$$

$$d_1(\lambda) = \limsup_{k\to\infty} \varphi_1(x_{\lambda k}) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0. \tag{19}$$

Здесь $\lambda \to \infty$ *означает, что* $\min\{\lambda_1, \lambda_2\} \to \infty$.

Доказательство. По предположению $\Omega \neq \emptyset$, следовательно, существует $\overline{x} \in \Omega$. Тогда $F_\lambda(\overline{x}) = f(\overline{x})$, поэтому

$$F_\lambda^* \le F_\lambda(\overline{x}) = f(\overline{x}) \ \ \forall \lambda \ge 0. \tag{20}$$

Допустим, что (18) не имеет места, тогда существуют последовательность $\{\lambda_s\}$ и число $a > 0$ такие, что имеет место по крайней мере одно из соотношений:

$$\lambda_s \to +\infty, \quad d(\lambda_s) \ge a, \tag{21}$$

$$\lambda_s \to +\infty, \quad d_1(\lambda_s) \ge a. \tag{22}$$

В случае (21) для каждого λ_s найдем такое k_s, чтобы выполнялись неравенства

$$\varphi(x_{\lambda_s k_s}) \ge \frac{a}{2}, \quad F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = F_{\lambda_s}^* + \varepsilon_s, \tag{23}$$

где $\varepsilon_s \downarrow 0$. В силу (21) и (23) имеем

$$F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = f(x_{\lambda_s k_s}) + \lambda_{1s}[\varphi(x_{\lambda_s k_s}) + \lambda_{2s}\varphi_1(x_{\lambda_s k_s})] \ge f(x_{\lambda_s k_s}) + \lambda_{1s}\varphi(x_{\lambda_s k_s}) \ge f^* + \lambda_{1s}\frac{a}{2} \xrightarrow[s\to\infty]{} +\infty. \tag{24}$$

В силу (20) и (23)

$$F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = F_{\lambda_s}^* + \varepsilon_s \le f(\overline{x}) + \varepsilon_s \longrightarrow f(\overline{x}),$$

а левая часть в (24) стремится к $+\infty$. Полученное противоречие и доказывает невозможность случая (21).

В случае (22) снова для каждого λ_s найдем такое k_s, чтобы выполнялись неравенства

$$\varphi_1(x_{\lambda_s k_s}) \ge \frac{a}{2}, \quad F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = F_{\lambda_s}^* + \varepsilon_s, \tag{25}$$

где $\varepsilon_s \downarrow 0$. В силу (22) и (25) имеем (ср. с (24))

$$F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = f^* + \lambda_{1s}\lambda_{2s}\frac{a}{2} \xrightarrow[s\to\infty]{} +\infty. \tag{26}$$

В силу (20) и (25)

$$F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s k_s}) = F_{\lambda_s}^* + \varepsilon_s \le f(\overline{x}) + \varepsilon_s \longrightarrow f(\overline{x}),$$

а левая часть в (26) стремится к $+\infty$. Полученное противоречие и доказывает невозможность случая (22). $\square$

Следствие 2.1. Если для любого $\lambda \ge \lambda_0 \ge 0$ существует $x_\lambda \in X$ такое, что $F_\lambda(x_\lambda) = F_\lambda^*$, то

$$\varphi(x_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0, \quad \varphi_1(x_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$$

Здесь и далее $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02})$.

Вспомнив лемму 1.2, положим

$$\Omega_\delta = \{x \in X \mid \varphi(x) < \delta\}, \quad r_\delta = \sup_{y\in\Omega_\delta} \rho(y, \Omega).$$

Лемма 2.2. *Пусть*

$$\inf_{x\in X} f(x) = f^* > -\infty, \quad r_\delta \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0, \tag{27}$$

а функция f равномерно непрерывна на Ω_{δ_0} для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} F^*_\lambda = f^*_\Omega.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся $a > 0$ и последовательности $\{\lambda_k\} = \{(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})\}$ и $\{x_k\}$ такие, что $\lambda_k \longrightarrow \infty$, $x_k \in X$,

$$f(x_k) + \lambda_{1k}[\varphi(x_k) + \lambda_{2k}\varphi_1(x_k)] \le f^*_\Omega - a. \tag{28}$$

Из (28) следует $\varphi(x_k) + \lambda_{2k}\varphi_1(x_k) \longrightarrow 0$. Отсюда в силу неотрицательности φ и φ_1

$$\varphi(x_k) \longrightarrow 0, \quad \varphi_1(x_k) \longrightarrow 0. \tag{29}$$

Выберем последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такую, что $\varepsilon_k \downarrow 0$. Для каждого x_k найдем такое $y_k \in \Omega$, что

$$\rho(y_k, x_k) \le \rho(x_k, \Omega) + \varepsilon_k \le r_{\delta_k} + \varepsilon_k, \tag{30}$$

где $\delta_k = \varphi(x_k) + \varepsilon_k$. Из (29) следует $\delta_k \to 0$, а тогда из (27) $r_{\delta_k} \longrightarrow 0$. Поэтому из (29) и (30) имеем $\rho(y_k, x_k) \longrightarrow 0$. Отсюда, из (28) и равномерной непрерывности f на Ω_{δ_0} для достаточно больших k следует

$$f(y_k) = f(x_k) + [f(y_k) - f(x_k)] < f^*_\Omega - \frac{a}{2},$$

что противоречит определению f^*_Ω, ибо $y_k \in \Omega$. $\square$

2.3. Точные штрафные функции в двухуровневой задаче

Лемма 2.3. *Если при некотором $\lambda_0 \ge 0$ нашлось $x_{\lambda_0} \in X$ такое, что*

$$F_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}) = F^*_{\lambda_0} := \inf_{x\in X} F_{\lambda_0}(x), \tag{31}$$

и при этом

$$\varphi(x_{\lambda_0}) = 0, \quad \varphi_1(x_{\lambda_0}) = 0,$$

то x_{λ_0} — точка минимума функции f на множестве Ω.

Доказательство. Действительно, для любого $\lambda > 0$ имеем

$$F^*_\lambda := \inf_{x\in X} F_\lambda(x) \le \inf_{x\in G} F_\lambda(x) = \inf_{x\in G}\{f(x) + \lambda_1\varphi(x)\} \le$$
$$\le \inf_{x\in\Omega}\{f(x) + \lambda_1\varphi(x)\} = \inf_{x\in\Omega} f(x) = f^*_\Omega \quad \forall\lambda \ge 0. \tag{32}$$

Из (31) следует $x_{\lambda_0} \in G$, $x_{\lambda_0} \in \Omega$. Тогда $F_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}) = f(x_{\lambda_0})$. Из (31) и (32)

$$F^*_{\lambda_0} := \inf_{x\in X} F_{\lambda_0}(x) = f(x_{\lambda_0}) \le f^*_\Omega := \inf_{x\in\Omega} f(x) \le f(x_{\lambda_0}).$$

Отсюда $f^*_\Omega = f(x_{\lambda_0})$.

При $\lambda > \lambda_0$

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)] =$$
$$= f(x) + [\lambda_{01} + (\lambda_1 - \lambda_{01})][\varphi(x) + (\lambda_{02} + (\lambda_2 - \lambda_{02}))\varphi_1(x)] =$$
$$= F_{\lambda_0}(x) + (\lambda_1 - \lambda_{01})\varphi(x) + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{01}\lambda_{02})\varphi_1(x). \tag{33}$$

Так как

$$\lambda_1 - \lambda_{01} > 0, \quad \lambda_1\lambda_2 - \lambda_{01}\lambda_{02} > 0, \quad \varphi(x) \ge 0, \quad \varphi_1(x) \ge 0, \tag{34}$$

то $F_\lambda(x) \geq F_{\lambda_0}(x)$. Отсюда

$$F_\lambda^* \geq F_{\lambda_0}^*. \tag{35}$$

С другой стороны, из (32)

$$F_\lambda^* \leq f_\Omega^* = F_{\lambda_0}^*. \tag{36}$$

Из (35) и (36) имеем

$$F_\lambda^* = F_{\lambda_0}^*. \tag{37}$$

Если $F_\lambda^* = F_\lambda(x_\lambda)$, то из (33)

$$F_\lambda^* = F_\lambda(x_\lambda) = F_{\lambda_0}(x_\lambda) + (\lambda_1 - \lambda_{01})\varphi(x_\lambda) + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{01}\lambda_{02})\varphi_1(x_\lambda).$$

Отсюда, из (34) и (37) следует $\varphi(x_\lambda) = \varphi_1(x_\lambda) = 0$ (в противном случае $F_{\lambda_0}(x_\lambda) < F_\lambda^*$, и из (37) $F_{\lambda_0}(x_\lambda) < F_{\lambda_0}^*$, что противоречит определению $F_{\lambda_0}^*$). $\square$

Таким образом, при $\lambda > \lambda_0$ любая точка минимума функции F_λ на X является точкой минимума функции f на Ω. Справедливо и обратное: *при $\lambda > \lambda_0$ любая точка минимума функции f на Ω является точкой минимума функции F_λ на X.*

Действительно, пусть x_λ — точка минимума функции $F_\lambda(x)$ на X и $x_\lambda \in \Omega$. Тогда

$$f(x_\lambda) = f_\Omega^*, \quad F_\lambda(x_\lambda) = F_\lambda^*.$$

Если $x^* \in \Omega$ и $f(x^*) = f_\Omega^*$, то $f(x^*) = f(x_\lambda)$ и

$$F_\lambda(x^*) = f(x^*) = f(x_\lambda) = F_\lambda(x_\lambda) = F_\lambda^*,$$

т. е. x^* (точка минимума функции f на Ω) является и точкой минимума функции F_λ на X.

Итак, *при $\lambda > \lambda_0$ множество точек минимума функции f на Ω совпадает с множеством точек минимума функции F_λ на X.* Функцию $F_\lambda(x)$ в этом случае будем называть точной штрафной функцией (для двухуровневой задачи).

2.4. Достаточные условия существования точной штрафной функции

Пусть $\{X, \rho\}$ — метрическое пространство. Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x)$ на множестве

$$\Omega = \{x \in G \mid \varphi(x) = 0\},$$

где $\varphi(x) = \sup\limits_{y \in G}(f_1(x) - f_1(y))$, $G \subset X$. Положим

$$\Omega_\delta = \{x \in G \mid \varphi(x) \leq \delta\}, \quad F_{1\lambda_1}(x) = f(x) + \lambda_1\varphi(x).$$

Предположим, что

$$\inf_{x \in G} f(x) = f_G^* > -\infty.$$

Положим

$$\varphi_G^{\downarrow}(x) := \liminf_{\substack{y \in G \\ y \to x}} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\rho(x, y)} = \liminf_{\substack{y \in G \\ y \to x}} \frac{f_1(y) - f_1(x)}{\rho(x, y)} =: f_{1G}^{\downarrow}(x).$$

Из теоремы 1.5 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть*

1) *существует $\lambda_{10} < \infty$ такое, что для каждого $\lambda_1 > \lambda_{10}$ найдется $x_{\lambda_1} \in X$, для которого*

$$F_{1\lambda_1}(x_{\lambda_1}) = F_{1\lambda G}^* = \inf_{x \in G} F_{1\lambda_1}(x);$$

2) *найдутся $\delta > 0$ и $a > 0$ такие, что*

$$f_{1G}^{\downarrow} = \varphi_G^{\downarrow}(x) \leq -a < 0 \ \ \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega; \tag{38}$$

3) *функция f липшицева на $\Omega_\delta \setminus \Omega$.*

Тогда существует $\lambda_1^* \geq \lambda_{10}$ такое, что

$$\varphi(x_{\lambda_1}) = 0 \quad \forall \lambda_1 > \lambda_1^*, \quad f(x_{\lambda_1}) = f_\Omega^* = \inf_{x\in\Omega} f(x),$$

т.е. точка x_{λ_1} — решение задачи $\mathbf{P}_1$.

Таким образом, при $\lambda_1 > \lambda_1^*$ задача минимизации f на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функции $F_{1\lambda_1}$ на множестве G.

Рассмотрим случай $G = \{x \in X \mid \varphi_1(x) = 0\}$, где $\varphi_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$. Зафиксируем любое $\lambda_1 > \lambda_1^*$. Снова применим теорему 1.5. Построим функцию

$$F_\lambda(x) = F_{1\lambda_1}(x) + \lambda_2\varphi_1(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)].$$

Предположим, что функции f и f_1 липшицевы на множестве $G_\varepsilon \setminus G$, где

$$\varepsilon > 0, \quad G_\varepsilon = \{x \in X \mid \varphi_1 \leq \varepsilon\},$$

а функция φ_1 удовлетворяет условию

$$\varphi_1^\downarrow(x) := \liminf_{\substack{y\in X\\ y\to x}} \frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(x)}{\rho(x,y)} \leq -a_1 < 0 \ \ \forall x \in G_\varepsilon \setminus G, \tag{39}$$

тогда по теореме 1.5 существует $\overline{\lambda}_2^* \geq 0$ (зависящее от λ_1) такое, что при $\overline{\lambda}_2 > \overline{\lambda}_2^*$ задача минимизации $F_{1\lambda_1}$ на множестве G эквивалентна задаче минимизации функции $F_{1\lambda_1} + \overline{\lambda}_2\varphi_1(x)$ на множестве X.

Положим $\overline{\lambda}_2 = \lambda_1\lambda_2$. Из изложенного следует

Теорема 2.2. *Если выполнены условия теоремы* 2.1 *и условие* (39)*, то существует $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \geq 0$ такое, что при $\lambda > \lambda^*$ задача минимизации f на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функции $F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)]$ на множестве X.*

Если проверка условия (39) обычно не представляет трудностей, то проверка условия (38) является достаточно сложной задачей (из того, что $\varphi^\downarrow(x) = f_1^\downarrow(x) \leq -a < 0$, не следует $\varphi_G^\downarrow(x) = f_{1G}^\downarrow(x) \leq -a < 0$!).

Учитывая (17), заключаем, что задача $\mathbf{P}_1$ эквивалентна задаче минимизации функции $\Phi_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[f_1(x) + \lambda_2\varphi_1(x)]$ на множестве X.

Замечание 2.1. Выше предполагалось, что инфимум функции $F_\lambda(x)$ на X достигается. Полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда этот инфимум не достигается (в терминах минимизирующих последовательностей).

3. Двухуровневая задача в конечномерном пространстве

3.1. Регулярный случай

Рассмотрим подробнее случай, когда $X = \mathbb{R}^n$, f, f_1 — непрерывно дифференцируемые функции, а множество G задано в виде

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0 \ \ \forall i \in \overline{1,N}\},$$

где функции $h_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Это множество можно переписать в форме

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) = 0\},$$

где

$$\varphi_1(x) := \max_{i\in I} h_i(x), \quad I = \overline{0,N}, \tag{40}$$

$h_0(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Множество Ω, как и выше, определено соотношениями (16), (17).

Пусть функции h_i ($i \in \overline{1, N}$) удовлетворяют стандартным условиям регулярности (напр., если в любой точке $x \notin \Omega$ градиенты $h'_i(x)$ "активных" ограничений, т.е. таких, что $h_i(x) = \varphi_1(x)$, линейно независимы). Тогда φ_1 удовлетворяет условию (39). Предположим также, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда, как следует из теоремы 1.5, при достаточно больших λ_1 и λ_2 задача минимизации f на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функции $F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)]$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Учитывая вид функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, получаем, что задача минимизации f на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функции

$$\Phi_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[f_1(x) + \lambda_2 \max_{i\in I} h_i(x)] \tag{41}$$

на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция Φ_λ является субдифференцируемой, и ее субдифференциал имеет вид

$$\partial\Phi_\lambda(x) = f'(x) + \lambda_1[f'_1(x) + \lambda_2\partial\varphi_1(x)], \tag{42}$$

где

$$\partial\varphi_1(x) = \mathrm{co}\{h'_i(x) \mid i \in R(x)\}, \quad R(x) = \{i \in I \mid h_i(x) = \varphi_1(x)\}.$$

Если x^* — точка минимума функции Φ на $\mathbb{R}^n$, то по необходимому условию минимума (см. [13]–[17]) имеет место включение $0_n \in \partial\Phi(x^*)$, т. е. найдутся коэффициенты α_i такие, что

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i\in R(x^*)} \alpha_i = 1, \quad f'(x^*) + \lambda_1\left[f'_1(x^*) + \lambda_2 \sum_{i\in R(x^*)} \alpha_i h'_i(x^*)\right] = 0_n. \tag{43}$$

Поскольку x^* — точка минимума функции f_1 на G, то

$$f'_1(x^*) + \lambda_2 \sum_{i\in R(x^*)} \beta_i h'_i(x^*) = 0_n, \tag{44}$$

где $\beta_i \geq 0$, $\sum\limits_{i\in R(x^*)} \beta_i = 1$. При этом $0 \in R(x^*) = \{i \in I \mid h_i(x^*) = 0\}$.

Из (43) и (44) следует

$$f'(x^*) + \sum_{i\in R(x^*)} \gamma_i h'_i(x^*) = 0_n, \tag{45}$$

где $\gamma_i = (\alpha_i - \beta_i)\lambda_1\lambda_2 \ \ \forall i \in R(x^*)$. Отметим, что коэффициенты γ_i могут быть любого знака. Положим $\gamma_i = 0 \ \ \forall i \notin R(x^*)$. Из (45) вытекает

Теорема 3.1. *Если функция φ_1 задана соотношением* (40) *и выполнены сформулированные выше условия, то найдутся такие коэффициенты $\gamma_i \in R$, что точка минимума функции f на множестве Ω является стационарной точкой функции*

$$F(x, \gamma) = f(x) + \sum_{i\in I} \gamma_i h_i(x)$$

на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^n$.

Из теоремы 3.1 следует, что если известны коэффициенты γ_i, то для решения задачи $\mathbf{P}_1$ достаточно найти стационарные точки функции $F(x, \gamma)$ на $\mathbb{R}^n$, т. е. точки, для которых $F'_x(x, \gamma) = 0_n$. Вся проблема состоит в том, что обычно эти коэффициенты нам не известны.

Замечание 3.1. Положим

$$\overline{\varphi}_1(x) := \max_{i\in 1:N} h_i(x),$$
$$\Omega_\delta = \{x \in G \mid \varphi(x) \leq \delta\}.$$

Тогда
$$\partial\overline{\varphi}_1(x) = \mathrm{co}\{h_i'(x) \mid i \in \overline{R}(x)\},$$
где
$$\overline{R}(x) = \{i \in I \mid h_i(x) = \overline{\varphi}_1(x)\}.$$
Введем конус
$$\mathcal{K}(x) = \begin{cases} \{0_n\}, & \overline{\varphi}_1(x) < 0; \\ \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \mu w,\ \mu \le 0,\ w \in \partial\overline{\varphi}_1(x)\}, & \overline{\varphi}_1(x) = 0. \end{cases}$$
Можно показать, что условие (38) выполнено, например, если существуют $a > 0$ и δ такие, что
$$\rho(f_1'(x), \mathcal{K}(x)) \ge a > 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega,$$
где $\rho(f_1'(x), \mathcal{K}(x)) = \min\limits_{v \in \mathcal{K}(x)} \|f_1'(x) - v\|$.

3.2. Общий случай

Рассмотрим случай, когда условия теоремы 3.1 не выполнены. Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ множество
$$G_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) \le \varepsilon\}$$
ограничено, тогда оно и замкнуто. Положим
$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)].$$
Как следует из леммы 2.1, для минимизирующей последовательности $\{x_{\lambda k}\}$ выполняются соотношения (18), (19). Поэтому, в силу ограниченности множества G_ε, при достаточно больших λ эта последовательность ограничена и (т. к. множество G_ε ограничено, а функция $F_\lambda(x)$ непрерывна) существуют ее предельные точки. Пусть x_λ — точка минимума функции F_λ на $\mathbb{R}^n$. Функция F_λ субдифференцируема и ее субдифференциал совпадает с субдифференциалом функции $\Phi_\lambda(x)$ (см. (41), (42)):
$$\partial F_\lambda(x) = \partial\Phi_\lambda(x) = f'(x) + \lambda_1[f_1'(x) + \lambda_2\partial\varphi_1(x)].$$
По необходимому условию минимума $0_n \in \partial F_\lambda(x_\lambda)$, поэтому найдутся коэффициенты $\alpha_i(\lambda) \ge 0$ такие, что
$$\sum_{i \in R(x_\lambda)} \alpha_i(\lambda) = 1, \quad f'(x_\lambda) + \lambda_1\Big[f_1'(x_\lambda) + \lambda_2 \sum_{i \in R(x_\lambda)} \alpha_i(\lambda) h_i'(x_\lambda)\Big] = 0_n,$$
где $R(x_\lambda) = \{i \in I \mid h_i(x_\lambda) = \varphi_1(x_\lambda)\}$. Отсюда в силу ограниченности $f'(x)$ на G_ε
$$A(x_\lambda) := f_1'(x_\lambda) + \lambda_2 \sum_{i \in R(x_\lambda)} \alpha_i(\lambda) h_i'(x_\lambda) \longrightarrow 0_n. \tag{46}$$
Поскольку множество $\{x_\lambda\}$ ограничено, то можно выбрать сходящуюся последовательность $\{x_{\lambda_k} = x_k\}$: $x_k \to x^* \in G_\varepsilon$. Здесь $\lambda_k = (\lambda_{k1}, \lambda_{k2})$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_{ki} := \alpha_i(\lambda_k) \longrightarrow \alpha_i^*$ и что $R(x_k) = R^* \ \ \forall k$.

Возможны два случая: 1) $0 \in R^*$, 2) $0 \notin R^*$.

Если $0 \in R^*$, то $\varphi_1(x_k) = 0 \ \ \forall k$, т. е. $x_k \in G$.

Если же оказалось $0 \notin R^*$, то из (46) вытекает соотношение
$$\sum_{i \in R^*} \alpha_i^* h_i'(x^*) = 0_n,$$
где $\alpha_i^* \ge 0$, $\sum\limits_{i \in R^*} \alpha_i^* = 1$. При этом $\varphi_1(x^*) = 0$, т. е. градиенты $h_i'(x^*)$ линейно зависимы.

Замечание 3.2. Если заранее известно, что градиенты $h_i'(x^*)$ $(i \in \overline{1, N})$ линейно независимы на множестве G, то соотношение $0 \notin R^*$ невозможно. Это означает, что в этом случае при достаточно больших λ точка x_λ будет принадлежать множеству G.

Литература

1. Демьянов В.Ф. *Условия экстремума и вариационные задачи.* – СПб: НИИ Химии С.-Петерб. ун-та, 2000. – 136 с.
2. Demyanov V.F., Di Pillo G., Facchinei F. *Exact penalization via Dini and Hadamars conditional derivatives* // Optim. Methods and Software. – 1998. – V. 9. – № 1. – P. 19–36.
3. Гроссман К., Каплан А.А. *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 184 с.
4. Еремин И.И. *Метод "штрафов" в выпуклом программировании* // ДАН СССР. – 1967. – Т. 143. – № 4. – С. 748–751.
5. Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г. *Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30. – № 1. – С. 43–57.
6. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* – М.: Наука, 1979. – 278 с.
7. Фиакко А., Мак Кормик Д. *Методы последовательной безусловной минимизации.* – М.: Мир, 1972. – 264 с.
8. Di Pillo G., Facchinei F. *Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems* // Nonsmooth Optimization and Related Topics / F.H. Clarke, V.F. Demyanov, F. Giannessi (Eds.). – New York: Plenum, 1989. – P. 89–107.
9. Fletcher R. *Penalty functions* // Math. program.: the State of the Art / A. Bachen, M. Grötschel, B. Korte (Eds.). – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – P. 87–114.
10. Ward D.E. *Exact penalties and sufficient conditions for optimality in nonsmooth optimization* // J. of Optim. Theory and Appl. – 1988. – V. 57. – № 3. – P. 485–499.
11. Zangwill W.I. *Non-linear programming via penalty functions* // Management Sci. – 1967. – V. 13. – № 5. – P. 344–358.
12. Outrata J.V. *Necessary optimality conditions for Stackelberg problems* // J. of Optim. Theory and Appl. – 1993. – V. 76. – № 2. – P. 305–320.
13. Shimizu K., Ishizuka Yo, Bard J.F. *Nondifferentiable and two-level mathematical programming.* – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 470 p.
14. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 383 с.
15. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* – М.: Мир, 1973. – 472 с.
16. Hiriart-Urruty J.B., Lemarechal C. *Convex analysis and minimization algorithms* I. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 420 p.
17. Hiriart-Urruty J.B., Lemarechal C. *Convex analysis and minimization algorithms* II. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 348 p.

Санкт-Петербургский государственный университет
Университет La Sapienza (Италия)

Поступила 19.09.2003