Известия вузов. Математика
2017, №5, с. 26–31

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Н. БЛАГОВИСНАЯ, О.А. ПИХТИЛЬКОВА, С.А. ПИХТИЛЬКОВ

О ПРОБЛЕМЕ М.В. ЗАЙЦЕВА ДЛЯ НЕТЕРОВЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Аннотация. Проблема М.В. Зайцева решена в следующей редакции: любая нетерова полупервичная специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей.

Ключевые слова: нетерова алгебра Ли, специальная алгебра Ли, первичный радикал алгебры Ли, центроид Мартиндейла.

УДК: 512.554

Введение

Нам потребуется ряд определений.

Определение 1. Алгебра Ли L называется первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U,V]=0$ следует $U=0$ или $V=0$.

Скажем, что идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P — первична.

Определение 2. Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.

Подробнее про теорию первичного радикала для алгебр Ли можно прочитать, например, в [1].

Определение 3. Назовем нетеровой алгеброй Ли алгебру, у которой возрастающая цепочка идеалов стабилизируется.

Ассоциативная алгебра A называется PI-алгеброй, если существует некоммутативный полином $f(x_1,\dots,x_n)\in F(X)$, где $F(X)$ — свободная ассоциативная алгебра, такой, что $f(a_1,\dots,a_n)=0$ для произвольных $a_1,\dots,a_n\in A$.

Определение 4 ([2])**.** Алгебра Ли L называется специальной алгеброй или SPI-алгеброй, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ — алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$.

М.В. Зайцев в 1992 году сообщил одному из авторов следующую проблему: верно ли, что любая нетерова специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц над конечно порожденным коммутативным кольцом?

Пусть $M=V\otimes_F C$, где V — конечномерное пространство над полем F, $C=C_1\oplus\ldots\oplus C_n$ — прямая сумма полей.

Поступила 09.12.2015

Введем понятие размерности над C. Каждый C-подмодуль W однозначно представим в виде прямой суммы подпространств $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ над полями C_k. Каждое подпространство W_k конечномерно над полем C_k.

Определим $\dim_C W = \dim_{C_1} W_1 + \cdots + \dim_{C_n} W_n$.

Лемма 1. *Пусть $M = V \otimes_F C$, где V — конечномерное пространство над полем F, $C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ — прямая сумма полей. Пусть $K \subset L \subset M$ — C-подпространства.*

Тогда $K = L \Leftrightarrow \dim_C K = \dim_C L$.

Доказательство. $K = L \Leftrightarrow \dim_C K_i = \dim_C L_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Отличие подпространств K и L возможно только при отличии размерностей $\dim_C K = \dim_C L$. □

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие центроида Мартиндейла.

1. Центроид Мартиндейла для алгебр Ли

Определение 5. Назовем алгебру полупервичной, если для любого ее идеала I из $I^2 = 0$ следует $I = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.

Согласно [1] оно эквивалентно равенству нулю первичного радикала.

Для изучения строения специальных алгебр Ли полезна конструкция центроида Мартиндейла и понятие центрального замыкания. Будем рассматривать единый подход к алгебрам Ли и ассоциативным алгебрам. В неассоциативном случае он был разработан в ([3], с. 40; [4]). Будем следовать подходу, предложенному Ю.П. Размысловым для универсальных алгебр ([3], с. 51).

Нам потребуется понятие инъективного модуля и инъективной оболочки.

Определение 6. Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1, M_2, любого мономорфизма $\varphi : M_1 \to M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \to M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \to M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.

Определение 7. Подмодуль M модуля P называется большим в P, если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.

Определение 8. A-модуль P называется инъективной оболочкой A-модуля M, если выполнены условия

а) P — инъективный A-модуль,

б) M — подмодуль в P,

в) M — большой подмодуль в P.

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M, и она единственна с точностью до изоморфизма.

Ю.П. Размыслов для каждой F-алгебры L сигнатуры Ω определил связанную с ней ассоциативную подалгебру $A = A(L)$ в $\mathrm{End}_F A$ ([3], с. 40). В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй $\mathrm{Ad}L$ алгебры L, порожденной в $\mathrm{End}_F L$ всеми внутренними дифференцированиями adx ($x \in L$). Если L — ассоциативная F-алгебра, то $A(L)$ является алгеброй умножений алгебры L, порожденной в $\mathrm{End}_F L$ элементами вида r_a, l_b ($a, b \in L$), где $a, x \in L$, $r_a(x) = xa$, $l_a(x) = ax$.

Пусть L — F-алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ — связанная с ней ассоциативная подалгебра в $\mathrm{End}_F A$. Пусть P — инъективная оболочка A-модуля L, $E = \mathrm{End}_A P$ — алгебра всех эндоморфизмов A-модуля P, $S = EL$ — A-подмодуль в P.

Приведем без доказательства ряд утверждений относительно введенных объектов.

Лемма 2 ([3], лемма 3.1)**.** *Пусть L — полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω. Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A-модуль S коммутативно.*

Замечание. Мы не даем определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр, так как будем применять эти понятия только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Для универсальных алгебр они определяются аналогично.

Так как по определению $S = EL$ и согласно лемме 2 алгебра $C(L) = E/\mathrm{Ker}\,\rho$ коммутативна, то можем продолжить все операции сигнатуры Ω по C-линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z-алгебры сигнатуры Ω. Алгебру $C = C(L)$ будем называть *центроидом Мартиндейла* полупервичной алгебры L, а C-алгебру S — центральным замыканием алгебры L.

Предложение 1 ([3], предложение 3.1)**.** *Если L — полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами*:

1) *C — коммутативная F-алгебра с единицей и $S = CL$;*

2) *произвольный ненулевой A-подмодуль в S пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L;*

3) *для любого A-гомоморфизма φ ненулевого A-подмодуля I и A-модуля S в S существует элемент $c \in C$, для которого $ci = \varphi(i)$, где i — произвольный элемент модуля I. Более того, если I — большой A-подмодуль в S, то элемент c однозначно определяется гомоморфизмом φ.*

Предложение 2 ([3], предложение 3.2)**.** *Если L — первичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C(L)$ является полем, $S(L)$ — первичной F-алгеброй и C-алгебра S характеризуется следующими свойствами*:

1) *$S = CL$;*

2) *произвольный ненулевой A-подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L;*

3) *любой частичный A-эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ.*

Теорема 1 (Познера [5])**.** *Пусть A — первичная ассоциативная PI-алгебра, K — поле частных центра $Z(A)$,*

$$Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$$

— алгебра центральных частных A. Тогда $Q(A)$ — простая алгебра, конечномерная над своим центром, и $Z(Q(A)) = K$.

Теорема 2. *Пусть A — первичная PI-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d. Тогда A конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и ее размерность над C не превосходит $[d/2]^2$.*

Доказательство. Пусть K, $Q(A)$ те же, что и в теореме 1. Так как $Q(A)$ является тензорным произведением алгебры A на коммутативную алгебру K, она удовлетворяет тому же тождеству степени d, что и A. Следовательно, согласно теореме Капланского размерность $Q(A)$ над K не превосходит $[d/2]^2$. Так как $K \subseteq C(A)$, то размерность A над $C(A)$ также не превосходит $[d/2]^2$. □

Определение 9. Пусть A — ассоциативная PI-алгебра или алгебра Ли, удовлетворяющая тождественному соотношению. Назовем сложностью $n(A)$ алгебры A наименьший из порядков матричных алгебр, всем тождествам которой удовлетворяет фактор алгебры A по первичному радикалу. Скажем, что алгебра A нематричная, если $n(A) = 1$.

Аналог теоремы Познера для специальных алгебр Ли следует из теоремы Ю.П. Размыслова о ранге. Хотя теорема о ранге справедлива даже для универсальных алгебр ([3], с. 47) будем иметь в виду ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

Пусть A — алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F. Любой полином

$$d_k(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \ldots, x_k$, называется полиномом Капелли порядка k. Пусть V — произвольное векторное F-подпространство в алгебре A. Скажем, что на V выполнены все тождества Капелли порядка k, если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов $v_1, \ldots, v_k \in V, a_1, \ldots, a_l \in A$ в алгебре A выполняются равенства $d_k(v_1, \ldots, v_k, a_1, \ldots, a_l) = 0$.

Рангом векторного F-подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. Это число обозначается $\operatorname{rank}(A, V)$.

Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n+1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порожденном алгеброй A.

Теорема 3 ([6]). *Пусть L — специальная алгебра Ли.*

1) *Если L — первичная, то у нее существует первичная PI-оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI-оболочки.*

2) *У простой специальной алгебры Ли существует простая PI-оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI-оболочки.*

Теорема 4 (Ю.П. Размыслова о ранге, [3], теорема 4.1). *Пусть V — векторное F-подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли. Если $\operatorname{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство*

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \operatorname{rank}(A, V) - 1.$$

Теорема 5. *Пусть L первичная специальная алгебра Ли. Тогда*

1) *L — матричная алгебра Ли;*

2) *если L имеет сложность n, то она конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2.*

Доказательство. 1) Согласно теореме 3 у алгебры L существует первичная PI-оболочка A. Из теоремы Познера следует, что алгебра A удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц некоторого порядка. Следовательно, и алгебра L удовлетворяет лиевым тождествам некоторой алгебры матриц, т. е. является матричной алгеброй.

2) Пусть алгебра L имеет сложность n. Тогда она удовлетворяет всем лиевым тождествам алгебры матриц порядка n. Ранг любого подпространства V алгебры $Sl(n, F)$ не превосходит $n^2 + 1$.

Согласно теореме 4 справедливо неравенство $\dim_{C(L)} L \leq n^2$. □

2. Критерий разложимости полупервичной алгебры Ли в конечное подпрямое произведение

Пусть U — подмножество в алгебре Ли L. Ясно, что аннулятор $Z_L(U)$ — подалгебра в L. Более того, если U — идеал в L, то $Z_L(U)$ также является идеалом в L.

Идеал U в L называется аннуляторным, если существует такой ненулевой идеал V в L, что $U = Z_L(V)$. Если V — идеал в L и $U = Z_L(V)$, то

$$Z_L(Z_L(U)) = U. \tag{1}$$

Действительно, $V \subseteq Z_L(U)$ и поэтому $U = Z_L(V) \supseteq Z_L(Z_L(U))$. С другой стороны, $[U, Z_L(U)] = 0$ и, следовательно, $U \subseteq Z_L(Z_L(U))$.

Пусть L — полупервичная алгебра Ли и V — идеал в L. Тогда $V \cap Z_L(V)$ — идеал с нулевым умножением. Следовательно,

$$V \cap Z_L(V) = 0 \tag{2}$$

в силу полупервичности L.

Аннуляторный идеал алгебры Ли L называется максимальным, если он не является собственным подмножеством любого другого аннуляторного идеала.

В [7] был получен критерий представимости специальной алгебры Ли в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр.

Лемма 3. *Пусть L — полупервичная алгебра Ли. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *L не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов*;
(ii) *L не содержит бесконечных множеств ненулевых попарно непересекающихся идеалов*;
(iii) *L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных идеалов*;
(iv) *каждый максимальный аннуляторный идеал в L является первичным*;
(v) *множество максимальных аннуляторных идеалов в L конечно и их пересечение равно нулю*;
(vi) *L представимо в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.*

3. Формулировка основного результата

Цель данной работы — доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть алгебра Ли L — нетерова полупервичная специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C — прямая сумма полей.*

Доказательство. По условию алгебра L — полупервичная и нетерова. Применяя п. (iii) леммы 3 получим разложимость алгебры L в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Эти первичные алгебры являются SPI-алгебрами, поскольку лежат в многообразии, порожденном специальной алгеброй Ли L и имеют тривиальные центры ([8], следствие 6.3.5). Тогда центроид $C(L)$ алгебры Ли L представим в виде прямой суммы центроидов первичных алгебр Ли, т. е. полей.

Согласно теореме 5, размерности всех первичных алгебр над своими центроидами Мартиндейла не превосходят некоторой константы $m = [d/2]^2$, где d — степень тождества выполненного в PI-оболочке.

Можно считать, что L вложена в матричную алгебру порядка не выше m над центроидом Мартиндейла $C(L)$. □

Литература

[1] Балаба И.Н, Михалев А.В., Пихтильков С.А. *Первичный радикал градуированных Ω-групп*, Фундамент. и прикл. матем. **12** (2), 159–174 (2006).

[2] Латышев В.Н. *Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями*, Сиб. матем. журн. **4** (4), 821–829 (1963).

[3] Размыслов Ю.П. *Тождества алгебр и их представления* (Наука, М., 1989).
[4] Baxter W.E., Martindale W.S. *Central closure of semiprime non-associative rings*, Commun. in Algebra **7** (11), 1105–1132 (1979).
[5] Jacobson N. *PI-algebras* (Springer-Verlag, Berlin–Heideilberg–New York, 1975).
[6] Бейдар К.И., Пихтильков С.А. *О PI-оболочках специальных алгебр Ли*, Тез. докл. международн. конф. "Универсальная алгебра и ее приложения" (Волгоград, 1999), с. 18–19.
[7] Пихтилькова О.А., Пихтильков С.А. *О специальных алгебрах Ли, имеющих точный модуль с размерностью Крулля*, Изв. РАН. Сер. матем. **81** (1), 93–100 (2017).
[8] Бахтурин Ю.А. *Тождества в алгебрах Ли* (Наука, М., 1985).

А.Н. Благовисная

Оренбургский государственный университет,
просп. Победы, д. 13, г. Оренбург, 460018, Россия,

e-mail: matmet@bk.ru

О.А. Пихтилькова

Оренбургский государственный университет,
просп. Победы, д. 13, г. Оренбург, 460018, Россия,

e-mail: OPikhtilkova@mail.ru

С.А. Пихтильков

Оренбургский государственный университет,
просп. Победы, д. 13, г. Оренбург, 460018, Россия,

e-mail: pikhtilkov@mail.ru

A.N. Blagovisnaya, O.A. Pikhtilkova, and S.A. Pikhtilkov

On the M.V. Zaicev problem for a noetherian special Lie algebras

Abstract. We solve M.V. Zaicev's problem in the following sense: any Noetherian semiprime special Lie algebra be an algebra of matrixes over the commutative ring which is the direct sum of fields.

Keywords: Noetherian Lie algebra, special Lie algebra, Martidale's centroid.

A.N. Blagovisnaya

Orenburg State University,
13 Pobeda Ave., Orenburg, 460018 Russia,

e-mail: matmet@bk.ru

O.A. Pikhtilkova

Orenburg State University,
13 Pobeda Ave., Orenburg, 460018 Russia,

e-mail: OPikhtilkova@mail.ru

S.A. Pikhtilkov

Orenburg State University,
13 Pobeda Ave., Orenburg, 460018 Russia,

e-mail: pikhtilkov@mail.ru