ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 514.796

К.В. АНДРЕЕВ

О СПИНОРНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ПРИ $n = 6$

В работе показано, как с помощью связующих операторов Нордена построить в явном виде соответствующие алгебраические представления некоторых изоморфизмов векторных пространств и гомоморфизмов групп (так называемый спинорный формализм). Полученные результаты применяются для изучения комплексно-аналитических связностей в соответствующих векторных расслоениях с базой — комплексно-аналитическим римановым пространством CV_6. Показано, что принцип тройственности Картана есть обобщение соответствия Кляйна, а это, в свою очередь, позволяет построить более общую геометрическую интерпретацию тройственности.

Предполагается, что индексы пробегают следующие значения: $\alpha, \beta, \ldots = 1,2,3,4,5,6$; $a_1, b_1, \ldots, a, b, c, d, e, f, k, l, m, n, \ldots = 1,2,3,4$; $i, j, g, h = 1,2,3,4,5,6$; $\Lambda, \Psi, \ldots = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$; $A, B, \ldots, H, K, \ldots, N = 1,2,3,4,5,6,7,8$; I, J пробегают конечный набор значений; P, Q — целые неотрицательные числа такие, что $P + Q = 6$.

1. Базовые представления спинорного формализма при $n = 6$

Спинорный формализм редуцированных 4-спиноров Картана можно построить на основе связующих операторов Нордена [1]. Покажем, как это делается. Как известно, операторы Нордена ${\eta^\alpha}_{aa_1}$, ${\eta_\alpha}^{aa_1}$ задают изоморфизм между евклидовым пространством CR_6 ($R^6{}_{(3,3)}$) и пространством бивекторов пространства C^4 (R^4) по следующим правилам:

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\beta} = 1/4 \cdot {\eta^\alpha}_{aa_1} {\eta^\beta}_{bb_1} \varepsilon^{aa_1bb_1}, \quad \varepsilon^{aa_1bb_1} = {\eta_\alpha}^{aa_1} {\eta_\beta}^{bb_1} g^{\alpha\beta}, \\
g_{\alpha\beta} = 1/4 \cdot {\eta_\alpha}^{aa_1} {\eta_\beta}^{bb_1} \varepsilon_{aa_1bb_1}, \quad \varepsilon_{aa_1bb_1} = {\eta^\alpha}_{aa_1} {\eta^\beta}_{bb_1} g_{\alpha\beta}, \\
r^\alpha = 1/2 \cdot {\eta^\alpha}_{aa_1} r^{aa_1}, \quad r^{aa_1} = {\eta_\alpha}^{aa_1} r^\alpha, \quad r_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} r^{cd}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь r^{aa_1} — координаты бивектора, принадлежащего пространству $\Lambda^2 C^4$, а r^α — координаты его образа в CR_6. Если $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства CR_6, то его образ — метрический тензор $\varepsilon_{aa_1bb_1}$, кососимметричный по всем индексам ([2], с. 83).

Замечание 1. С помощью метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, заданного на пространстве CR_6, можно поднимать и опускать одиночные индексы, в то время как с помощью метрического 4-вектора $\varepsilon_{aa_1bb_1}$, заданного на пространстве $\Lambda^2 C^4$, можно поднимать и опускать только парные кососимметричные индексы, и нет такого метрического тензора, с помощью которого можно было бы проделать подобную операцию с одиночными индексами.

Можно доказать, что операторы Нордена удовлетворяют уравнению Клиффорда, записанному в виде

$${\eta_\alpha}^{ab} \eta_{\beta ad} + {\eta_\beta}^{ab} \eta_{\alpha ad} = g_{\alpha\beta} {\delta_d}^b. \tag{2}$$

Формула (1) описывает в явном виде первое представление спинорного формализма — изоморфизм пространств $\Lambda^2 C^4 \cong CR_6$.

С помощью операторов Нордена определяется оператор

$$A_{\alpha\beta d}{}^{c}=\frac{1}{2}\eta_{[\alpha}{}^{ca}\eta_{\beta]}{}^{bk}\varepsilon_{dabk},$$

связывающий между собой бивекторы $e_{\alpha\beta}=-e_{\beta\alpha}$ пространства CR_6 и бесследовые тензоры $e_c{}^d$ ($e_c{}^c=0$) пространства Λ^2C^4: $e_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta d}{}^{c}e_c{}^d$, $e_m{}^n=\frac{1}{2}A^{\alpha\beta}{}_m{}^n e_{\beta\alpha}$. При этом оператор $A_{\alpha\beta d}{}^{c}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{gathered}A_{\alpha\beta d}{}^{c}A^{\alpha\beta}{}_r{}^s=\frac{1}{2}\delta_r{}^s\delta_d{}^c-2\delta_r{}^c\delta_d{}^s,\quad A_{\alpha\beta d}{}^{c}A^{\lambda\mu}{}_c{}^d=2\delta_{[\alpha}{}^{\mu}\delta_{\beta]}{}^{\lambda},\\ A_{\alpha\beta d}{}^{c}A_{\gamma}{}^{\beta}{}_r{}^s=(\eta_\alpha{}^{cs}\eta_{\gamma rd}+\eta_\alpha{}^{ck}\eta_{\gamma kr}\delta_d{}^s)+1/2(\eta_\alpha{}^{sn}\eta_{\gamma rn}\delta_d{}^c+\eta_\alpha{}^{ck}\eta_{\gamma dk}\delta_r{}^s)-1/4g_{\alpha\gamma}\delta_r{}^s\delta_d{}^c.\end{gathered}\tag{2'}$$

Двойственный к бивектору $e_{\alpha\beta}$ тетравектор $e_{\alpha\beta\gamma\delta}=e_{[\alpha\beta\gamma\delta]}$ тоже будет связан с некоторым бесследовым тензором по следующему правилу:

$$\begin{gathered}e_{\alpha\beta\gamma\delta}=A_{\alpha\beta b}{}^{a}A_{\gamma\delta d}{}^{c}e_a{}^b{}_c{}^d,\quad e_a{}^b:=\tfrac{1}{3}e_a{}^k{}_k{}^b,\quad e_k{}^k=0,\\ B_{\alpha\beta\gamma\delta r}{}^{k}:=A_{\alpha\beta r}{}^{d}A_{\gamma\delta d}{}^{k}+A_{\alpha\beta c}{}^{k}A_{\gamma\delta r}{}^{c},\quad e_{\alpha\beta\gamma\delta}=B_{\alpha\beta\gamma\delta r}{}^{k}e_k{}^r.\end{gathered}\tag{3}$$

В свою очередь, с помощью этих разложений можно получить аналогичное тождество и для 6-вектора $e_{\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu}=e_{[\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu]}$

$$\begin{gathered}e_{\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu}=A_{\alpha\beta b}{}^{a}A_{\gamma\delta d}{}^{c}A_{\lambda\mu l}{}^{k}e_a{}^b{}_c{}^d{}_k{}^l,\\ e_a{}^b{}_c{}^d{}_k{}^l=\frac{ie}{8}(2((4\delta_k{}^b\delta_c{}^l-\delta_k{}^l\delta_c{}^b)\delta_a{}^d+(4\delta_k{}^d\delta_a{}^l-\delta_k{}^l\delta_a{}^d)\delta_c{}^b)-\\ -(4\delta_k{}^b\delta_a{}^l-\delta_k{}^l\delta_a{}^b)\delta_c{}^d-(4\delta_k{}^d\delta_c{}^l-\delta_k{}^l\delta_c{}^d)\delta_a{}^b).\end{gathered}$$

Оператор $A_{\alpha\beta d}{}^{c}$ задает второе представление спинорного формализма — изоморфизм алгебр Ли $so(6,C)\cong sl(4,C)$.

Обозначим через $K_\alpha{}^\beta$ преобразования из группы $O(6,C)$, через $S_a{}^b$ — преобразования из группы $SL(4,C)$, а через S_{ab} — тензоры валентности $(2,0)$ пространства C^4.

Теорема 1. *Для собственного преобразования $K_\alpha{}^\beta$ из группы $O(6,C)$ имеет место представление*

$$\text{I)}\quad K_\alpha{}^\beta:=\frac{1}{4}\eta_\alpha{}^{ab}\eta^\beta{}_{cd}\cdot 2S_{[a}{}^{c}S_{b]}{}^{d},\tag{4}$$

а для несобственного $K_\alpha{}^\beta$ соответствующее представление имеет вид

$$\text{II)}\quad K_\alpha{}^\beta:=\frac{1}{4}\eta_\alpha{}^{ab}\eta^\beta{}_{cd}\cdot\varepsilon S_{ak}S_{bl}\varepsilon^{klcd}.\tag{5}$$

При этом всякому преобразованию $K_\alpha{}^\beta$, принадлежащему ортогональной группе $O(6,C)$, соответствует два и только два преобразования $\pm S_a{}^b$ ($\pm S_{ab}$) таких, что $\det\|S_c{}^d\|=1$ ($\det\|S_{cd}\|=1$). *И наоборот, любым преобразованиям $\pm S_a{}^b$ ($\pm S_{ab}$) соответствует единственное преобразование $K_\alpha{}^\beta$. Соответствие $S_a{}^b\to K_\alpha{}^\beta$ задает двулистное накрытие $SL(4,C)\to SO(6,C)\cong SL(4,C)/\{\pm1\}$.*

Доказательство. Возьмем вектор r такой, что $r^\alpha r_\alpha=2$. Из (2) следует

$$r^\alpha\eta_\alpha{}^{cd}x^\beta\eta_{\beta ca}r^\gamma\eta_\gamma{}^{ba}=((x^\alpha r_\alpha)r^\gamma-x^\gamma)\eta_\gamma{}^{bd}.$$

Свернув это равенство с $\frac{1}{2}\eta^\delta{}_{bd}$, получим

$$\frac{1}{2}r^\alpha\eta_\alpha{}^{cd}x^\beta\eta_{\beta ca}r^\gamma\eta_\gamma{}^{ba}\eta^\delta{}_{bd}=S_\alpha{}^\delta(r)x^\alpha,$$

где $S_\alpha{}^\beta(r)=r_\alpha r^\beta-\delta_\alpha{}^\beta$. Таким образом, строится отображение $\phi_0:r\longmapsto S_\alpha{}^\beta(r)$, которое в точности совпадает с отображением, построенным в ([3], с. 273–274); при этом $\operatorname{Ker}\phi_0=\{\pm1\}$. Из результатов ([3], с. 273–274) следует, что существует конечный набор векторов $(r_I)^\alpha$ ($(r_I)^\alpha(r_I)_\alpha=2$)

такой, что любое преобразование из группы $SO(6,C)$ представляется как композиция вращений $S_\alpha{}^\beta(r_I)$.

Преобразование $-S_\alpha{}^\beta(r)$ есть симметрия в гиперплоскости, перпендикулярной вектору r. Поэтому любое преобразование ортогональной группы $O(6,C)$ можно представить в виде конечного произведения таких симметрий; при этом для собственных вращений необходимо, чтобы число таких симметрий было четно. Таким образом можно определить следующие преобразования:

$$
\begin{aligned}
&K_{\alpha_1}{}^{\alpha_{2J+1}} := \prod_{I=1}^{2J} S_{\alpha_I}{}^{\alpha_{I+1}}(r_I), && K_\alpha{}^\delta K_\beta{}^\gamma g_{\delta\gamma} = g_{\alpha\beta},\\
&(R_I)_{ab} := (r_I)_\alpha \eta^\alpha{}_{ab}, && (R_I)_{ab}(R_I)^{ac} = \delta_b{}^c, \quad (R_I)_{ba}(R_I)^{ca} = \delta_b{}^c,\\
&S_{d_{2J+1}}{}^{d_1} := \prod_{I=1}^{J} (R_I)^{d_{2I-1}d_{2I}}(R_I)_{d_{2I+1}d_{2I}}, && S_a{}^b S_c{}^d S_m{}^n S_k{}^l \varepsilon_{bdnl} = \varepsilon_{acmk},\\
&S_{d_0 d_{J+1}} := (R_0)_{d_0 d_1} \prod_{I=1}^{J} S_{d_{I+1}}{}^{d_I}, && S_{ab}S_{cd}S_{mn}S_{kl}\varepsilon^{bdnl} = \varepsilon^{-2}\varepsilon_{acmk}.
\end{aligned}
$$

Отсюда и следуют разложения (4) и (5). Отметим, что за ε принимается единственная существенная координата 4-вектора ε_{abcd}: $\varepsilon := \varepsilon_{1234}$. $\square$

Формулы (4) и (5) задают третье представление спинорного формализма — двулистное накрытие $SL(4,C) \to SO(6,C) \cong SL(4,C)/\{\pm 1\}$ и соответствие между несобственными преобразованиями группы $O(6,C)$ и битензорами пространства C^4.

Далее воспользуемся результатами статьи [4]. В ней определяются операторы вложения $H_i{}^\alpha$ вещественного векторного пространства в комплексное так, что определена эрмитова инволюция

$$S_\alpha{}^{\beta'} := \overline{H}_i{}^{\beta'} H^i{}_\alpha. \tag{6}$$

В нашем случае с помощью таких операторов можно определить вложение $R^6_{(P,Q)} \subset CR_6$. Это дает возможность записать соотношения

$$\eta_i{}^{ab} := H_i{}^\alpha \eta_\alpha{}^{ab}, \quad \overline{\eta}_i{}^{a'b'} := \overline{H}_i{}^{\alpha'} \overline{\eta}_{\alpha'}{}^{a'b'}, \quad A_{ija}{}^b := H_i{}^\alpha H_j{}^\beta A_{\alpha\beta a}{}^b. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть в 6-мерном комплексном евклидовом пространстве CR_6 задана инволюция вида*

$$S_\alpha{}^{\beta'}\overline{S}_{\beta'}{}^\gamma = \delta_\alpha{}^\gamma, \quad S_\alpha{}^{\beta'} S_\gamma{}^{\delta'} \overline{g}_{\beta'\delta'} = g_{\alpha\gamma},$$

определены операторы вложения $H_i{}^\alpha$: $R^6_{(P,Q)} \subset CR_6$, и пусть

$$s_{aba'b'} = \overline{\eta}_{\beta'a'b'} \eta^\alpha{}_{ab} S_\alpha{}^{\beta'}. \tag{8}$$

Тогда будут выполнены соотношения

$$s_{aba'b'} = \overline{s}_{a'b'ab}, \quad s_{ab}{}^{a'b'}\overline{s}_{a'b'}{}^{cd} = 2\delta^{cd}_{ab},$$

и будут существовать два и только два разложения

$$
\begin{aligned}
&\text{I)}\;\; s_{ab}{}^{a'b'} = 2 s_{[a}{}^{a'} s_{b]}{}^{b'}, \quad \det\|s_a{}^{b'}\| = \varepsilon\overline{\varepsilon}^{-1}, \quad s_a{}^{b'}\overline{s}_{b'}{}^c = \pm\delta_a{}^c \;\; (Q \textit{ нечетно}),\\
&\text{II)}\;\; s_{aba'b'} = 2 s_{[a|a'|}s_{b]b'}, \quad \det\|s_{ab'}\| = \varepsilon\overline{\varepsilon}, \quad s_{ab'} = \pm\overline{s}_{b'a} \;\; (Q \textit{ четно}),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

а для вещественного случая будут верны тождества

$$
\begin{aligned}
&\text{I)}\;\; \overline{\eta}_i{}^{a'b'} = \eta_i{}^{cd} s_c{}^{a'} s_d{}^{b'}, \qquad \text{II)}\;\; \overline{\eta}_i{}^{a'b'} = \eta_{icd} s^{ca'} s^{db'},\\
&\overline{A}_{ija'}{}^{b'} = A_{ijc}{}^d \overline{s}_{a'}{}^c s_d{}^{b'}, \qquad \overline{A}_{ija'}{}^{b'} = -A_{ijc}{}^d s_{da'} s^{cb'}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Доказательство. Поскольку в специальном базисе матрица эрмитовой инволюции ортогональна, то к ней можно применить разложения (4) и (5) с заменой преобразования $K_\alpha{}^\beta$ на преобразование $S_\alpha{}^{\beta'}$, что и доказывает (9). Для доказательства (10) воспользуемся операторами вложения $H_i{}^\alpha$. Для случая II) имеем

$$\begin{gathered}\overline{\eta}_i{}^{a'b'} = \overline{H}_i{}^{\alpha'}\overline{\eta}_{\alpha'}{}^{a'b'} = \overline{H}_i{}^{\alpha'}\overline{S}_{\alpha'}{}^{\beta}\eta_{\beta cd}s^{ca'}s^{db'} = H_i{}^\beta\eta_{\beta cd}s^{ca'}s^{db'} = \eta_{icd}s^{ca'}s^{db'},\\ \overline{A}_{ija'}{}^{b'} = \overline{\eta}_{[i}{}^{b'k'}\overline{\eta}_{j]a'k'} = H_i{}^\gamma H_j{}^\delta\eta_{[\gamma|bk|}\eta_{\delta]}{}^{ak}s_{aa'}s^{bb'} = -A_{ijb}{}^a s_{aa'}s^{bb'}.\end{gathered}$$

В случае I) доказательство такое:

$$\begin{gathered}\overline{\eta}_i{}^{a'b'} = \overline{H}_i{}^{\alpha'}\overline{\eta}_{\alpha'}{}^{a'b'} = \overline{H}_i{}^{\alpha'}\overline{S}_{\alpha'}{}^{\beta}\eta_{\beta}{}^{cd}s_c{}^{a'}s_d{}^{b'} = H_i{}^\beta\eta_\beta{}^{cd}s_c{}^{a'}s_d{}^{b'} = \eta_i{}^{cd}s_c{}^{a'}s_d{}^{b'},\\ \overline{A}_{ija'}{}^{b'} = \overline{\eta}_{[i}{}^{b'k'}\overline{\eta}_{j]a'k'} = H_i{}^\gamma H_j{}^\delta\eta_{[\gamma}{}^{ck}\eta_{\delta]dk}s_c{}^{b'}\overline{s}_{a'}{}^d = \eta_{[i}{}^{ck}\eta_{j]dk}s_c{}^{b'}\overline{s}_{a'}{}^d = A_{ijd}{}^c s_c{}^{b'}\overline{s}_{a'}{}^d. \quad \square\end{gathered}$$

Формулы (8) и (9) задают четвертое представление спинорного формализма, являющееся ограничением третьего представления на действительную область $R^6_{(P,Q)} \subset CR_6$.

Рассмотрим в качестве примера вложение вещественного пространства $R^6_{(2,4)}$ в комплексное пространство CR_6. В этом случае появляется возможность с помощью тензора $s_{aa'}$ осуществить отождествление верхних штрихованных с нижними нештрихованными индексами. Имеют место тождества

$$\begin{gathered}K_i{}^j = \overline{K}_i{}^j, \quad K_i{}^j := H_i{}^\alpha H^j{}_\beta K_\alpha{}^\beta, \quad \eta_j{}^{ab}K_i{}^j\eta^i{}_{cd} = \eta_j{}^{ab}\overline{K}_i{}^j\eta^i{}_{cd},\\ 2S_{[c}{}^a S_{d]}{}^b = \frac{1}{4}\eta_j{}^{ab}\overline{\eta}_i{}^{m'n'}2\overline{S}_{m'}{}^{k'}\overline{S}_{n'}{}^{l'}\overline{\eta}^j{}_{k'l'}\eta^i{}_{cd}, \quad s^{lk'}\overline{S}_{k'}{}^{m'}s_{am'}S_{[c}{}^a S_{d]}{}^b s_{bn'}\overline{S}_{r'}{}^{n'}s^{sr'} = \delta_{[c}{}^l\delta_{d]}{}^s.\end{gathered}$$

Но тогда

$$s^{lk'}\overline{S}_{k'}{}^{m'}s_{am'}S_c{}^a = n\delta_c{}^l, \quad n = \pm 1. \tag{11}$$

Выбором знака "+" в (11) получаются преобразования из группы, изоморфной группе $SU(2,2)$, которая будет, как видно из вышесказанного, двулистно накрывать связную компоненту единицы группы $SO^e(2,4)$. Эта компонента определится условиями

$$1)\ \ \det\|K_\alpha{}^\beta\| = 1, \ \ \alpha,\beta = \overline{1,6}, \quad 2)\ \ \det\|K_\alpha{}^\beta\| > 0, \ \ \alpha,\beta = \overline{1,2}. \tag{12}$$

Если в (11) выбрать "$-$", то знак $\det\|K_\alpha{}^\beta\|$ в 2) из (12) изменится на противоположный. Вид матрицы тензора s в некотором специальном базисе для основных случаев вложения приведен в таблице.

Таблица. Вид матрицы тензора s

Пункт	Пространство	s	s в спец. базисе	Изоморфизм (лок.)
1	R^6 $\ll ++++++ \gg$	$s_{kk'}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$SU(4) \cong SO^e(6)$
2	$R^6_{(1,5)}$ $\ll +----- \gg$	${s_k}^{k'}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$	$SL(2,H) \cong SO^e(1,5)$
3	$R^6_{(2,4)}$ $\ll ++---- \gg$	$s_{kk'}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$SU(2,2) \cong SO^e(2,4)$
4	$R^6_{(3,3)}$ $\ll +++--- \gg$	${s_k}^{k'}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$SL(4,R) \cong SO^e(3,3)$

2. Введение связности и тензор кривизны 6-мерных комплексно-аналитичных римановых пространств

Пусть задано комплексно-аналитичное риманово пространство CV_6 с комплексно-аналитическим метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$. Действительная реализация такого пространства V_{12} будет обладать метрическим тензором $G_{\Lambda\Psi}$ и комплексной структурой ${f_\Lambda}^\Psi$. Обозначим через $\tau^C(CV_6)$ касательное расслоение с базой CV_6, через $\tau^R(CV_6)$ — действительную реализацию $\tau^C(CV_6)$, через $\tau^R(V_{12})$ — касательное расслоение с базой V_{12}, а через $\tau^C(V_{12})$ — комплексную реализацию $\tau^R(V_{12})$. Все вычисления будем производить локально в окрестности некоторой точки $Z \in CV_6$, поэтому все утверждения, приведенные в этой части, носят локальный характер. Согласно [4] можно построить операторы ${m_\alpha}^\Lambda : {f_\Lambda}^\Psi {m_\alpha}^\Lambda = -i{m_\alpha}^\Psi$. Они отвечают за отождествление касательных пространств $\tau^C_z(V_{12})$ и $\tau^R_z(V_{12})$ — слоев над точкой z базы V_{12}. Это позволит записать соотношения между метрическими тензорами указанных пространств следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} = {m_\alpha}^\Lambda {m_\beta}^\Psi G_{\Lambda\Psi}, \quad G_{\Lambda\Psi} = g_{\alpha\beta} {m^\alpha}_\Lambda {m^\beta}_\Psi + \overline{g}_{\alpha'\beta'} {\overline{m}^{\alpha'}}_\Lambda {\overline{m}^{\beta'}}_\Psi. \tag{13}$$

Рассмотрим далее расслоение $A^C(V_{12})$ со слоями, изоморфными C^4, и базой V_{12}. Зададим соответствие между векторами R^Λ пространства R_{12} с комплексной структурой ${f_\Lambda}^\Psi$ и бивекторами R^{ab} пространства C^4 следующим образом:

$$R^{ab} := {M_\Lambda}^{ab} R^\Lambda.$$

При этом оператор ${M^\Lambda}_{ab} : {f_\Lambda}^\Psi {M^\Lambda}_{ab} = -i{M^\Psi}_{ab}$ [5] удовлетворяет соотношениям

$$G_{\Lambda\Psi} = \frac{1}{4}({M_\Lambda}^{ab} {M_\Psi}^{cd} \varepsilon_{abcd} + {\overline{M}_\Lambda}^{a'b'} {\overline{M}_\Psi}^{c'd'} \overline{\varepsilon}_{a'b'c'd'}),$$

$$\varepsilon_{abcd} = {M^\Lambda}_{ab} {M^\Psi}_{cd} G_{\Lambda\Psi}, \quad {M^\Lambda}_{ab} := \frac{1}{2} M^{\Lambda cd} \varepsilon_{abcd}, \quad {\overline{M}^\Lambda}_{a'b'} := \overline{{M^\Lambda}_{ab}},$$

где ε_{abcd} — 4-вектор с единственной существенной координатой $\varepsilon = \varepsilon_{1234}$. Если теперь положить ${\eta^\alpha}_{ab} := {m^\alpha}_\Lambda {M^\Lambda}_{ab}$, ${\overline{\eta}^{\alpha'}}_{a'b'} := {\overline{m}^{\alpha'}}_\Lambda {\overline{M}^\Lambda}_{a'b'}$, ${\eta^{\alpha'}}_{ab} := {\overline{m}^{\alpha'}}_\Lambda {M^\Lambda}_{ab} = 0$, ${\overline{\eta}^\alpha}_{a'b'} := {m^\alpha}_\Lambda {\overline{M}^\Lambda}_{a'b'} = 0$, то метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ пространства CV_6 будет связан с метрическим 4-вектором ε_{abcd}, действующим на слоях расслоения $A^C(CV_6)$, по формуле (1). Поэтому можно рассматривать риманову комплексно-аналитическую связность без кручения в расслоении $\tau^C(CV_6)$, построенную по действительной римановой связности в расслоении $\tau^R(V_{12})$ без кручения и ковариантно-постоянной комплексной структурой. Соответствующие операторы ковариантной производной будут связаны соотношениями

$$\nabla_\alpha = m_\alpha{}^\Lambda \nabla_\Lambda, \quad \overline{\nabla}_{\alpha'} := \overline{m}_{\alpha'}{}^\Lambda \nabla_\Lambda, \quad \nabla_\Lambda = m^\alpha{}_\Lambda \nabla_\alpha + \overline{m}^{\alpha'}{}_\Lambda \overline{\nabla}_{\alpha'}.$$

Нетрудно показать, что риманова комплексно-аналитическая связность в расслоении $\tau(CV_6)$ при условии $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$, $\overline{\nabla}_{\alpha'} g_{\beta\gamma} = 0$ и комплексно-аналитическая связность в расслоении $A^C(CV_6)$ со свойствами $\nabla_\alpha \varepsilon_{abcd} = 0$, $\overline{\nabla}_{\alpha'} \varepsilon_{abcd} = 0$, для которых (связностей) существуют связующие операторы $\eta_\beta{}^{ab}$, $m_\alpha{}^\Psi$ такие, что $\nabla_\alpha \eta_\beta{}^{ab} = 0$, $\overline{\nabla}_{\alpha'} \eta_\beta{}^{ab} = 0$, $\nabla_\beta m_\alpha{}^\Lambda = 0$, $\overline{\nabla}_{\beta'} m_\alpha{}^\Lambda = 0$, задают одну и ту же связность в расслоении бивекторов на слоях расслоения $A^C(CV_6)$.

Используя оператор вложения $H_i{}^\alpha$ (см. (6), (7)), можно показать, что аналогичная ситуация имеет место для действительного риманового пространства $V^6_{(P,Q)}$ с метрическим тензором $g_{ij} = H_i{}^\alpha H_j{}^\beta g_{\alpha\beta}$. Именно, риманова вещественная связность в расслоении $\tau(V^6_{(P,Q)})$ со свойством $\nabla_i g_{gh} = 0$ и вещественная связность в расслоении $A^C(V^6_{(P,Q)})$ со свойствами $\nabla_i \varepsilon_{abcd} = 0$, $\nabla_i s_{ab'} = 0$ (Q четно), $\nabla_i s_a{}^{b'} = 0$ (Q нечетно), для которых (связностей) существует связующий оператор $\eta_j{}^{ab}$ такой, что $\nabla_i \eta_j{}^{ab} = 0$, задают одну и ту же связность в расслоении бивекторов на слоях расслоения $A^C(CV_6)$.

Свойства тензора кривизны 6-мерного комплексно-евклидова пространства можно исследовать с помощью спинорного формализма.

Теорема 3. *Пусть битензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в касательном расслоении $\tau^C(CV_6)$ над шестимерным комплексным аналитическим римановым пространством CV_6 обладает свойствами*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \tag{14}$$

Тогда определен тензор $R_a{}^b{}_c{}^d$ 4-мерного комплексного векторного пространства, удовлетворяющий равенству

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta d}{}^c A_{\gamma\delta r}{}^s R_c{}^d{}_s{}^r.$$

При этом тензор $R_a{}^b{}_c{}^d$ будет удовлетворять следующим соотношениям:

$$R_k{}^k{}_s{}^r = R_s{}^r{}_k{}^k = 0, \quad R_c{}^d{}_s{}^r = R_s{}^r{}_c{}^d,$$

а разложение

$$R_c{}^d{}_s{}^r = C_c{}^d{}_s{}^r - P_{cs}{}^{dr} - \frac{1}{40} R (3\delta_s{}^d \delta_c{}^r - 2\delta_s{}^r \delta_c{}^d) \tag{15}$$

будет соответствовать разложению тензора $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} + R_{[\alpha}{}^{[\gamma} g_{\beta]}{}^{\delta]} - \frac{1}{10} R g_{[\alpha}{}^{[\gamma} g_{\beta]}{}^{\delta]}$ на неприводимые ортогональными преобразованиями компоненты, которые удовлетворяют тождествам

$$P_{cs}{}^{rd} = -4(R_{[c}{}^{[r}{}_{s]}{}^{d]} + R_k{}^{[r}{}_{[c}{}^{|k|} \delta_{s]}{}^{d]}),$$

$$C_c{}^d{}_s{}^r = R_{(c}{}^{(d}{}_{s)}{}^{r)} + \frac{1}{40} R \delta_{(s}{}^d \delta_{c)}{}^r, \quad C_c{}^d{}_s{}^r = C_{(c}{}^{(d}{}_{s)}{}^{r)}, \tag{16}$$

$$R = R_\beta{}^\beta = -2R_k{}^r{}_r{}^k, \quad P_{kc}{}^{kd} = \frac{1}{2} R \delta_c{}^d,$$

$$R_l{}^d{}_s{}^l = -\frac{1}{8} R \delta_s{}^d, \tag{17}$$

последнее из которых эквивалентно тождеству Бианки (14).

Доказательство. Теорема доказывается на основании тождества ($2'$). Например, тождество Бианки (14) можно переписать в виде

$$(A_{\alpha\beta d}{}^c A_{\gamma\delta r}{}^s + A_{\alpha\gamma d}{}^c A_{\delta\beta r}{}^s + A_{\alpha\delta d}{}^c A_{\beta\gamma r}{}^s) R_c{}^d{}_s{}^r = 0.$$

Свертка этого уравнения с $A^{\alpha\beta}{}_t{}^l A^{\gamma\delta}{}_m{}^n$ даст

$$4R_k{}^l{}_m{}^k \delta_t{}^n + 4R_r{}^n{}_t{}^r \delta_m{}^l - 2R_k{}^l{}_t{}^k \delta_m{}^n - 2R_k{}^n{}_m{}^k \delta_t{}^l - 2R_k{}^r{}_r{}^k \delta_t{}^n \delta_m{}^l + R_r{}^k{}_k{}^r \delta_m{}^n \delta_t{}^l = 0.$$

Далее, свертывая с $\delta_n{}^t$, получим (17). При этом все 15 существенных уравнений сохранены. В свою очередь из разложений

$$R_{[\alpha}{}^{[\gamma} g_{\beta]}{}^{\delta]} = A_{\alpha\beta d}{}^c A^{\gamma\delta}{}_r{}^s \cdot \frac{1}{4}\left(P_{sc}{}^{dr} - \frac{1}{2} R \delta_s{}^d \delta_c{}^r + \frac{1}{4} R \delta_s{}^r \delta_c{}^d\right),$$

$$g_{[\alpha}{}^{[\gamma} g_{\beta]}{}^{\delta]} = A_{\alpha\beta d}{}^c A^{\gamma\delta}{}_r{}^s \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\delta_s{}^r \delta_c{}^d - 2\delta_s{}^d \delta_c{}^r\right)$$

получаются разложения (15) и (16). $\square$

Теорема 4. 1. *Пусть бивектор 6-мерного пространства CR_6 является простым, и, значит, удовлетворяет тождеству $p_{[\alpha\beta} p_{\gamma\beta]} = 0$. Тогда координатам такого бивектора можно сопоставить бесследовую комплексную матрицу 4×4 такую, что выполнено*

$$p_l{}^d p_s{}^l - 1/4 (p_l{}^k p_k{}^l) \delta_s{}^d = 0. \qquad (18)$$

2. *Простому изотропному ($p^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$) бивектору пространства CR_6 можно сопоставить вырожденную нуль-пару Розенфельда — ковектор и вектор пространства C^4, свертка которых есть нуль. При этом указанные вектор и ковектор определяются с точностью до комплексного множителя.*

Доказательство. 1) Поскольку тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta}$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то (18) есть прямое следствие тождеств Бианки (17). С другой стороны, ее можно вывести непосредственно из формул (3).

2) В условиях первого пункта добавится условие изотропности, которое ввиду формул (18) примет вид $p_b{}^a p_a{}^b = 0$, и тогда (18) упростится до $p_l{}^d p_s{}^l = 0$. Отсюда следует, что существуют ненулевые X^a и Y_b, удовлетворящие уравнениям $p_b{}^a = Y_b X^a$, $X^a Y_a = 0$ и определенные с точностью до преобразования $X^a \longmapsto e^{\phi} X^a$, $Y_b \longmapsto e^{-\phi} Y_b$. Пара (X^a, Y_b) является нуль-парой Розенфельда. В пространстве $CP^4 = {}'C^4/{}'C$ (где ${}'C^s = C^s/0$) X^a определит точку, а Y_b — плоскость с условием инцидентности $X^a Y_a = 0$. Поэтому можно построить пространство $C\Pi^4 = {}'C^{*4}/{}'C$, двойственное пространству CP^4. Тогда уже пространство $CP^4 \times C\Pi^4$ будет пространством нуль-пар Розенфельда. $\square$

Отметим, что такие пространства изучались впервые Д.М. Синцовым [6] и А.П. Котельниковым [7].

Замечание 2. Проблему классификации тензора Вейля на основании теоремы 3 можно свести к классификации спинора Вейля по собственным значениям λ, исходя из уравнения

$$C_c{}^d{}_s{}^r \phi_{dr} = \lambda \phi_{cs},$$

причем таких λ всего может быть не более 10 (см. (16)).

Замечание 3. Если битензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ из теоремы 3 действителен, то на соответствующий 4-мерный тензор накладывается условие

$$R_{ab'cd'} = \overline{R}_{b'ad'c}, \quad R_{ab'cd'} := R_a{}^b{}_c{}^d s_{bb'} s_{dd'}$$

для метрики четного индекса Q и

$$R_a{}^{b'}{}_c{}^{d'} = \overline{R}^{b'}{}_a{}^{d'}{}_c, \quad R_a{}^{b'}{}_c{}^{d'} := R_a{}^b{}_c{}^d s_b{}^{b'} s_d{}^{d'}$$

для метрики нечетного индекса Q.

Поскольку в некотором неголономном базисе операторы $A_{\alpha\beta a}{}^{b}$ являются константами, то все свойства тензора кривизны можно получить, рассматривая спинор кривизны $R_a{}^b{}_c{}^d$. Положим

$$\nabla_{ab} := \eta^{\alpha}{}_{ab}\nabla_{\alpha}, \quad \square_a{}^d := \frac{1}{2}(\nabla_{ak}\nabla^{dk} - \nabla^{dk}\nabla_{ak}), \quad \square_{\alpha\beta} := 2\nabla_{[\,\alpha}\nabla_{\beta\,]},$$

тогда ввиду ковариантного постоянства операторов Нордена (1) будем иметь

$$\square_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta d}{}^{a}\square_a{}^d.$$

Сформулируем несколько основных утверждений, касающихся оператора $\square_a{}^d$ и спинора кривизны $R_a{}^b{}_c{}^d$. Для них будут верны три вида тождеств:

1. тождество Риччи $\square_a{}^b X^c = R_a{}^b{}_m{}^c X^m$, $\square_a{}^b X_c = -R_a{}^b{}_c{}^m X_m$;
2. дифференциальные тождества Бианки $\nabla_{c(\,m}R_{t\,)}{}^c{}_r{}^s = 0$;
3. тождество для дивергенции тензора Риччи $\nabla_{cm}R_t{}^c{}_r{}^m = 1/8\nabla_{rt}R$.

Пример. Согласно [8] деривационные уравнения гармонически нормализованной действительной реализации RM многообразия M плоских образующих максимального ранга квадрики $CQ_6 \subset CP_7$ имеют вид

$$\nabla_{\Lambda}X_a = Y^b K_{\Lambda ab}, \quad \nabla_{\Lambda}Y^b = X_a N_{\Lambda}{}^{ab}. \tag{19}$$

На указанном многообразии введем метрику по формулам (13), превратив его в риманово пространство V_{12} с комплексной структурой f. На основании принципа тройственности Картана ([9], с. 159) каждой точке пространства V_{12} можно поставить в соответствие плоскую образующую максимального ранга квадрики $CQ_6 \subset CP_7$ или, иначе говоря, 4-мерную образующую 7-мерного конуса $CK_8 \subset CR_8$. Это даст возможность рассматривать такую 4-мерную образующую как слой расслоения $A^C(V_{12})$. Поэтому X_a и Y^b можно интерпретировать как вектор и ковектор такого расслоения. Положим

$$\widetilde{\eta}_{\alpha ab} := m_{\alpha}{}^{\Lambda}K_{\Lambda ab}, \quad \tilde{\tilde{\eta}}_{\alpha}{}^{ab} := m_{\alpha}{}^{\Lambda}N_{\Lambda}{}^{ab}, \quad \widetilde{S}_{\alpha}{}^{\beta} := \frac{1}{2}\widetilde{\eta}_{\alpha}{}^{ab}\eta^{\beta}{}_{ab}, \quad \tilde{\tilde{S}}_{\alpha}{}^{\beta} := \frac{1}{2}\tilde{\tilde{\eta}}_{\alpha}{}^{ab}\eta^{\beta}{}_{ab},$$

где $\eta_{\alpha}{}^{ab}$ — операторы Нордена (1). Тогда систему (19) можно привести к виду

$$\begin{cases}\nabla_{\alpha}X_a = Y^b\widetilde{S}_{\alpha}{}^{\beta}\eta_{\beta ab};\\ \nabla_{\alpha}Y^b = X_a\tilde{\tilde{S}}_{\alpha}{}^{\beta}\eta_{\beta}{}^{ab},\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{\nabla}_{\alpha'}X_a = 0;\\ \overline{\nabla}_{\alpha'}Y^b = 0,\end{cases}$$

рассматривая уже в качестве базы пространство CV_6 с метрикой (1). Условия интегрируемости [5] первой системы приводят к соотношениям

$$R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \widetilde{S}_{[\,\alpha}{}^{[\,\gamma}\tilde{\tilde{S}}_{\beta\,]}{}^{\delta\,]}, \quad \nabla_{[\,\gamma}\widetilde{S}_{\alpha\,]}{}^{\beta} = 0, \quad \nabla_{[\,\gamma}\tilde{\tilde{S}}_{\alpha\,]}{}^{\beta} = 0,$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны в касательном расслоении $\tau^C(CV_6)$. Такой тензор необходимо должен удовлетворять тождествам Бианки, что повлечет за собой выполнение

$$\widetilde{S}_{[\,\alpha\beta}\tilde{\tilde{S}}_{\gamma\,]\delta} = \widetilde{S}_{[\,\alpha|\delta|}\tilde{\tilde{S}}_{\gamma\beta\,]}.$$

Отметим, что в [8] изучался случай, когда $\widetilde{\eta}_{\alpha}{}^{ab} \equiv \eta_{\alpha}{}^{ab}$, что приводит к конформно-плоским пространствам. Рассмотрим битвисторное уравнение $\nabla^{a(\,b}X^{c\,)} = 0$. Условия его совместности имеют вид $\frac{1}{2}\varepsilon_{akmn}\nabla^{m(\,n}\nabla^{d|k|}X^{c)} = \frac{5}{6}C_a{}^c{}_l{}^d X^l = 0$, где $C_a{}^c{}_l{}^d$ — спинорный аналог тензора Вейля (16). Поэтому в конформно-плоском пространстве битвисторное уравнение всегда имеет решение

$$X^a = \dot{X}^a - ir^{ab}\dot{Y}_b, \quad Y_b = \dot{Y}_b, \tag{20}$$

где $\dot{X}^a$ — постоянное векторное поле, а r^{ab} — координаты бивектора (1). Как и в случае твисторного уравнения Пенроуза, исследование решений такого уравнения приводит к довольно интересным геометрическим соответствиям, о чем и пойдет речь в следующем параграфе.

3. Принцип тройственности Картана для двух квадрик

С использованием техники п. 1 построим две квадрики CQ_6 и $C\widetilde{Q}_6$ и опишем соответствие между их плоскими образующими.

Обозначим через $(C^4)^*$ пространство, двойственное C^4, и образуем 8-мерное комплексное пространство T^2 как прямую сумму $C^4 \oplus (C^4)^*$. Если X^a — координаты вектора в C^4, а Y_b — координаты ковектора в $(C^4)^*$, то $X^A := (X^a, Y_b)$ суть координаты вектора из T^2. Отметим, что решение (20) битвисторного уравнения можно рассматривать как преобразование слоя суммы Уитни расслоений $A^C(CV_6)$ и $(A^C(CV_6))^*$. Будем рассматривать типовой слой этого расслоения, который изоморфен T^2. Тогда (20) является линейным преобразованием T^2, однако не сохраняющим структуру прямой суммы. Будем рассматривать координаты бивектора r^{ab} как координаты точки аффинного пространства CA_6, полученного из типового слоя касательного расслоения $\tau^C(CV_6)$, изоморфного CR_6. Нас будет интересовать множество точек T^2, заданное уравнением

$$X^a = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{X}^a = ir^{ab}\dot{Y}_b. \tag{21}$$

Если задать точку $(\dot{X}^a, \dot{Y}_b)$, то (21) будет системой, состоящей из четырех линейных уравнений с шестью неизвестными r^{ab}, а $(\dot{X}^a, \dot{Y}_b)$ можно интерпретировать как нуль-пару Розенфельда ([10], с. 289). Обозначим через $\dot{X}^a$, $\dot{S}^a$, $\dot{Z}^a$ базисные решения уравнения $\dot{X}^a\dot{Y}_a = 0$, тогда общее решение уравнения (21) примет вид

$$r^{ab} = r^{ab}_{\text{частное}} + \lambda_1 \dot{S}^{[a}\dot{X}^{b]} + \lambda_2 \dot{X}^{[a}\dot{Z}^{b]} + \lambda_3 \dot{S}^{[a}\dot{Z}^{b]}, \tag{22}$$

где r^{ab} — бивектор, являющийся частным решением (21). Пространство T^2 будет комплексным евклидовым пространством, в котором скалярный квадрат вектора определится в некотором базисе квадратичной формой

$$\varepsilon_{AB}X^AX^B = 2X^aY_a, \quad \|\varepsilon_{AB}\| = \begin{pmatrix} 0 & \delta_a{}^c \\ \delta^b{}_d & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Отметим, что форма (23) будет инвариантна по отношению к преобразованию (20). При фиксированном r^{ab} уравнение (21) определит в T^2 4-мерное подпространство — 4-мерную плоскую образующую конуса $\varepsilon_{AB}X^AX^B = 0$. Ее четыре базисные точки будут удовлетворять условию

$$\varepsilon_{AB}X^A_kX^B_l = 0. \tag{24}$$

Кроме того, в проективном пространстве CP_7 такому конусу соответствует 6-мерная квадрика CQ_6. Точку (t, v, w, x, y, z) упомянутого выше пространства CA_6 можно представить прямой $(\lambda T, \lambda V, \lambda U, \lambda S, \lambda W, \lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ пространства CR_8, наделенного метрикой

$$dL^2 = dT^2 + dV^2 + dU^2 + dS^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

Эти прямые являются образующими изотропного конуса CK_8

$$T^2 + V^2 + U^2 + S^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

а на пересечении 7-плоскости $U - iS = 1$ с указанным конусом CK_8 индуцирована метрика

$$d\widetilde{L}^2 = dT^2 + dV^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

Такое пространство имеет вид параболоида на CK_8 и может быть отождествлено с пространством CR_6

$$U = 1 + iS = \frac{1}{2}(1 - T^2 - V^2 - W^2 - X^2 - Y^2 - Z^2).$$

Всякая прямолинейная образующая конуса CK_8 (множество точек конуса с постоянным отношением $T : V : U : S : W : X : Y : Z$), не лежащая на гиперплоскости $U = iS$, пересекает параболоид в единственной точке. Образующим конуса, лежащим на гиперплоскости $U = iS$, соответствуют точки, принадлежащие бесконечности пространства CR_6. Таким образом, прямым CR_8, проходящим через начало CR_8, соответствуют точки проективного пространства CP_7. Стереографическая проекция указанного сечения на плоскость $S = i$, $U = 0$ с полюсом $N(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 0, 0, 0, 0)$ отображает точку $P(T, V, U, S, W, X, Y, Z)$ гиперболоида на точку $p(t, v, 0, i, w, x, y, z)$ плоскости $S = i$, $U = 0$:

$$\lambda T = t,\ \ \lambda V = v,\ \ \lambda W = w,\ \ \lambda X = x,\ \ \lambda Y = y,\ \ \lambda Z = z,$$
$$\lambda = -\frac{1}{U + iS},\ \ pf(r) = -\frac{U - iS}{U + iS}.$$

Прямолинейным образующим конуса CK_8 соответствует квадрика $C\widetilde{Q}_6$ в проективном пространстве CP_7

$$G_{AB}R^AR^B = 0,\quad \begin{matrix} R^1 = T, & R^2 = V, & R^3 = U, & R^4 = S, \\ R^5 = W, & R^6 = X, & R^7 = Y, & R^8 = Z. \end{matrix}$$

При этом тензор G_{AB} является метрическим для пространства CR_8 и в некотором базисе имеет единичную матрицу. В силу (22) каждой точке квадрики CQ_6 можно поставить в соответствие 3-мерную изотропную плоскость пространства CA_6. Такая 3-мерная плоскость взаимно однозначно определит 3-мерную плоскую образующую квадрики $C\widetilde{Q}_6$. Отметим, что идея такой проекции взята из ([2], с. 355–362). Положим по аналогии с ([2], с. 83)

$$\begin{gathered} \widetilde{R}^{AB} := \begin{pmatrix} r^{an} & -\frac{1}{2}i\delta^a{}_k r^\gamma r_\gamma \\ -i\delta_c{}^n & r_{ck} \end{pmatrix},\quad \widetilde{R}_{AB} := \varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\widetilde{R}^{CD}, \\ R^{AB} := \dot{Y}_m\dot{Z}^m\widetilde{R}^{AB},\quad R_{AB} := \dot{Y}_m\dot{Z}^m\widetilde{R}_{AB}, \end{gathered} \tag{25}$$

так что спуск и подъем одиночных индексов типа $A, B, \ldots$ осуществляется с помощью метрического тензора ε_{AB} (23). Оказывается, можно поставить в соответствие точке квадрики $C\widetilde{Q}_6$ тензор $\widetilde{R}_{AB}$ (25), которым эта точка определится однозначно. Иначе говоря, зная точку квадрики $C\widetilde{Q}_6$, можно однозначно определить положение образующей CP_3 на квадрике CQ_6. Чтобы перейти к пространству CR_8, определим однородные координаты как

$$\begin{matrix} R^{12} & : & R^{13} & : & R^{14} & : & R^{23} & : & R^{24} & : & R^{34} & : & R^{15} & : & R^{51} & = \\ r^{12} & : & r^{13} & : & r^{14} & : & r^{23} & : & r^{24} & : & r^{34} & : & -\frac{1}{2}ir^\gamma r_\gamma & : & -i & \end{matrix}$$

$$\text{с нормировкой}\ \ \dot{Y}_m\dot{Z}^m := -U - iS.$$

Отметим, что такой тензор R^{AB} имеет матрицу вида Ξ^* ([10], с. 518), только здесь используется мнимая единица i. Построим связующие операторы $\eta_A{}^{BC}$ так, чтобы выполнялись условия $R^A = \frac{1}{4}\eta^A{}_{BC}R^{BC}$, $R^A\eta_A{}^{BC} = R^{BC}$. Базисные точки $R_k{}^A$ плоской образующей максимального ранга квадрики $C\widetilde{Q}_6$ удовлетворяют соотношению

$$G_{AB}R_k{}^AR_l{}^B = 0. \tag{26}$$

Применяя операторы $\eta_A{}^{KL}$ к этому тождеству, получим

$$\begin{aligned} (R_m)^{AB}(R_n)_{AB} = 0 \ \Leftrightarrow\ ((R_m)^{AB} - (R_n)^{AB})((R_k)_{AB} - (R_l)_{AB}) = 0 \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ ((r_m)^{ab} - (r_n)^{ab})((r_k)_{ab} - (r_l)_{ab}) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь k, l — номера базисных точек. Таким образом, завершено построение квадрик CQ_6, $C\widetilde{Q}_6$ и алгебраическое описание их плоских образующих.

Теорема 5 (принцип тройственности для двух квадрик). *В проективном пространстве CP_7 существуют две квадрики, обладающие следующими общими свойствами.*

1. *Плоская образующая CP_3 первой квадрики взаимно однозначно определяет точку R второй.*
2. *Плоская образующая CP_2 первой квадрики однозначно определяет точку R второй. Точке R сопоставляется многообразие плоских образующих CP_2, принадлежащих одной плоской образующей CP_3 первой квадрики.*
3. *Прямолинейная образующая CP_1 первой квадрики взаимно однозначно определяет прямолинейную образующую CP_1 второй. Все прямолинейные образующие, принадлежащие одной плоской образующей CP_3 первой квадрики, определяют пучок с центром в точке R, принадлежащий второй квадрике.*

Плоские образующие CP_3 обеих квадрик принадлежат одному и тому же из двух семейств таких образующих.

Доказательство. Обозначим $X_1^A := (\dot{X}^a, \dot{Y}_b)$, $X_2^A := (\dot{Z}^a, \dot{T}_b)$, $X_3^A := (\dot{L}^a, \dot{N}_b)$, $X_4^A := (\dot{K}^a, \dot{M}_b)$. Тогда уравнение (24) перепишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ir^{ab}\dot{Y}_b & = & \dot{X}^a, \\ ir^{ab}\dot{T}_b & = & \dot{Z}^a, \\ ir^{ab}\dot{N}_b & = & \dot{L}^a, \\ ir^{ab}\dot{M}_b & = & \dot{K}^a, \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \dot{X}^a\dot{Y}_a = 0, \quad \dot{Z}^a\dot{T}_a = 0, \quad \dot{L}^a\dot{N}_a = 0, \quad \dot{K}^a\dot{M}_a = 0, \\ \dot{X}^a\dot{T}_a = -\dot{Z}^a\dot{Y}_a, \quad \dot{X}^a\dot{N}_a = -\dot{L}^a\dot{Y}_a, \quad \dot{X}^a\dot{M}_a = -\dot{K}^a\dot{Y}_a, \\ \dot{Z}^a\dot{N}_a = -\dot{L}^a\dot{T}_a, \quad \dot{Z}^a\dot{M}_a = -\dot{K}^a\dot{T}_a, \quad \dot{K}^a\dot{N}_a = -\dot{L}^a\dot{M}_a. \end{array} \tag{28}$$

Таким образом, из шестнадцати уравнений (28) с шестью неизвестными r^{ab} существенными будут только шесть уравнений (десять условий связи (28)), что определит точку CA_6, а значит, и точку R квадрики $C\widetilde{Q}_6$ (рис. 1).

Рис. 1. Соответствие $\forall CP_2 \subset CP_3 \leftrightarrow R$

Если из системы (28) известно одно уравнение, то из четырех уравнений с шестью неизвестными существенными будут лишь три (одно условие связи). Поэтому точке квадрики CQ_6 будет соответствовать плоская 3-мерная образующая CP_3, принадлежащая квадрике $C\widetilde{Q}_6$. Это также следует и из (22). Если из системы (28) известны два уравнения, то из восьми уравнений с шестью неизвестными существенными будут лишь пять (три условия связи). Это означает, что прямолинейной образующей CP_1 квадрики CQ_6 будет соответствовать прямолинейная образующая CP_1, принадлежащая квадрике $C\widetilde{Q}_6$. При этом многообразие образующих $CP_1(CQ_6)$, принадлежащих одной и той же образующей $CP_3(CQ_6)$, определит пучок образующих $CP_1(C\widetilde{Q}_6)$, принадлежащий квадрике $C\widetilde{Q}_6$ (этот пучок на самом деле определит некоторый конус с вершиной в точке R). Центр пучка R определится системой (28) (рис. 2).

Рис. 2. Соответствие $CP_3 \supset CP_1 \leftrightarrow CP_1 \subset K_6$

Если из системы (28) известны три уравнения, то из двенадцати уравнений с шестью неизвестными существенными будут лишь шесть (с шестью условиями связи). Это означает, что 2-мерной образующей CP_2 квадрики CQ_6 будет соответствовать точка R квадрики $C\widetilde{Q}_6$. При этом многообразие образующих $CP_2(CQ_6)$, принадлежащих одной и той же образующей $CP_3(CQ_6)$, определит единственную точку квадрики $C\widetilde{Q}_6$. Эта точка R определится системой (28) (рис.1).

Обратная часть теоремы доказывается с помощью системы

$$\begin{cases} i(r_1)^{ab}\dot{Y}_b &= \dot{X}^a, \\ i(r_2)^{ab}\dot{Y}_b &= \dot{X}^a, \\ i(r_3)^{ab}\dot{Y}_b &= \dot{X}^a, \\ i(r_4)^{ab}\dot{Y}_b &= \dot{X}^a, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i((r_1)^{ab} - (r_2)^{ab})\dot{Y}_b &= 0, \\ i((r_1)^{ab} - (r_3)^{ab})\dot{Y}_b &= 0, \\ i((r_3)^{ab} - (r_4)^{ab})\dot{Y}_b &= 0, \\ i(r_1)^{ab}\dot{Y}_b &= \dot{X}^a, \end{cases}$$

которая следует из (26) и (27). $\square$

Доказанная теорема является обобщением соответствия Кляйна. Многообразие образующих на квадрике CQ_6 вида $X^A = (0, \dot{Y}_b)$ диффеоморфно CP_3. Каждой такой образующей можно поставить в соответствие точку квадрики $CQ_4 \subset C\widetilde{Q}_6$. Следует отметить, что из этой теоремы следует принцип тройственности Картана ([9] с. 175): существует 3 диффеоморфных многообразия — многообразие точек квадрики и два многообразия плоских образующих I и II семейств ([11], с. 258). Это действительно так, поскольку две построенные квадрики можно отождествить, например, с помощью тензора

$$P_A{}^L := \eta_{AK}{}^L X^K, \quad R_A = P_A{}^L Y_L,$$

где X^K — произвольный вектор CR_8 такой, что $X_K X^K = 2$. Тогда

$$P_A{}^L P_B{}^K \varepsilon_{LK} = G_{AB}, \quad P_A{}^L P_B{}^K G^{AB} = \varepsilon^{LK}.$$

Кроме того, согласно выкладкам ([2], с. 543–544) операторы $\eta_{AK}{}^L$ могут служить прообразом структурных констант алгебры октав и удовлетворяют уравнению Клиффорда. Операторы $\eta_A{}^{MN}$ определяют взаимно однозначное отображение прямых двух шестимерных квадрик (см. теорему 5, п. 3).

Литература

1. Норден А.П. *О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 1. – С. 156–164.
2. Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля.* Т. 2. – М.: Мир, 1987. – 528 с.
3. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр* 5. *Группы и алгебры Ли.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1982. – 448 с.
4. Нейфельд Э.Г. *Об инволюциях в комплексных пространствах* // Тр. геометрич. семин. – Казань, 1989, вып. 19. – С. 71–82.
5. Нейфельд Э.Г. *Нормализация комплексных грассманианов и квадрик* // Тр. геометрич. семин. – Казань, 1990, вып. 20. – С. 58–69.
6. Синцов Д.М. *Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.* – Казань, 1894.
7. Котельников А.П. *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии механики.* – Казань, 1895.
8. Андреев К.В. *О внутренних геометриях многообразия плоских образующих* 6*-мерной квадрики* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 3–8.
9. Картан Э. *Теория спиноров.* – М.: Ин. лит., 1947. – 223 с.
10. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы геометрии.* – М.: ГИТТЛ, 1955. – 744 с.
11. Ходж П., Пидо Д. *Методы алгебраической геометрии.* Т. 2. – М.: Ин. лит., 1954. – 431 с.

Башкирский государственный университет

Поступили
первый вариант 23.02.1998
окончательный вариант 12.07.1999