ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988

Ф.К. АХМАДИШИНА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

1. В связи с имеющимися многочисленными результатами по приближенному решению различных классов операторных уравнений в последнее время возникла и развивается теория оптимизации вычислительных методов, т. е. теория построения и исследования наиболее точных методов решения задач. В данной статье придерживаемся подхода, разработанного Б.Г. Габдулхаевым [1]. Этот подход был использован многими авторами при обосновании оптимальности (в основном, по порядку) прямых методов решения операторных уравнений.

Рассмотрим уравнения

$$Kx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{1}$$

$$P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{2}$$

Здесь X, Y — нормированные пространства над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, $K : X \to Y$ — линейная биекция, n — фиксированное натуральное число, X_n и Y_n — n-мерные подпространства в X и Y соответственно, P_n — линейная сюръекция из Y на Y_n. Уравнение (2) называется *проекционным методом* решения уравнения (1), заданным оператором P_n и подпространством приближенных решений X_n. Решение уравнения (1) обозначим x^*. Далее будем предполагать, что уравнение (2) однозначно разрешимо для любого $y \in Y$. Его решение обозначим x_n^*. Возникает вопрос о нахождении среди всех однозначно разрешимых проекционных методов тех, для которых отклонение точного решения x^* от приближенного решения x_n^* было бы наименьшим на заданном множестве решений $F \subset X$. Для характеризации этого отклонения была введена [1]–[3] *оптимальная оценка погрешности класса всех проекционных методов*

$$V_n(F) = \inf_{X_n, Y_n, P_n} \sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\|,$$

где inf берется по всевозможным подпространствам X_m, Y_m размерности $m \le n$ в X и Y соответственно и линейным сюръекциям P_m из Y на Y_m таким, что уравнение (2) однозначно разрешимо для любых $y \in Y$.

Определение 1. Проекционный метод (2) называется *асимптотически оптимальным для множества решений F среди всех проекционных методов*, если

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\| \sim V_n(F) \quad (n \to \infty).$$

Рассмотрим величину

$$V(F, X_n) = \inf_{Y_n, P_n} \sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\|.$$

Определение 2. Проекционный метод (2) назовем *асимптотически оптимальным для множества F*, если

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\| \sim V(F, X_n) \quad (n \to \infty).$$

Говорят (напр., [5], с. 191), что последовательность подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(X_n \subset X)$ *предельно плотна* в X, если $E_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ для любого $x \in X$.

Напомним (напр., [4], с. 17), что *n-м проекционным поперечником* центрально-симметричного (ц. с.) множества $F \subset X$ называется величина

$$\pi_n(F) = \inf_{X_m, S_m} \sup_{x \in F} \|x - S_m x\|,$$

где inf берется по всем m-мерным подпространствам X_m в X таким, что $m \le n$ и всем проекторам S_m в X таким, что $\operatorname{Im} S_m = X_m$.

Теорема 1. *Для любого центрально-симметричного множества $F \subset X$ решений уравнения* (1) *имеет место равенство*

$$V_n(F) = \pi_n(F).$$

Для любого множества $F \subset X$ положим

$$E(F, X_n) = \sup_{x \in F} E_n(x),$$

где $E_n(x)$ — наилучшее приближение элемента x подпространством X_n.

Теорема 2. *Пусть X — гильбертово пространство, K — плотно заданный в X инъективный оператор, $(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp} \subset D(K^*)$, $\dim K^*(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp} = n$, B_n^1 — единичный шар в $K^*((\operatorname{Ker} P_n)^{\perp})$. Тогда, если $E(B_n^1, X_n) < 1$, то уравнение* (2) *однозначно разрешимо для любого $y \in \operatorname{Im} K$ и*

$$\|x^* - x_n^*\| \le \frac{E_n(x^*)}{\sqrt{1 - E^2(B_n^1, X_n)}}.$$

В частности, если $E(B_n^1, X_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого ц. с. множества решений $F \subset X$ проекционный метод (2) *будет асимптотически оптимальным. Если, кроме того, X_n является экстремальным подпространством для $\pi_n(F)$ $(n \ge n_0)$, то проекционный метод* (2) *будет асимптотически оптимальным среди всех проекционных методов решения уравнения* (1).

Пусть H — гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение

$$Kx =: (A + B)x = y \quad (x, y \in H), \tag{3}$$

где A и B — плотно заданные в H линейные операторы.

Теорема 3. *Пусть существует непрерывный обратный к A оператор A^{-1}, B — компактный оператор, последовательность подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в H, $(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp} \subset D(A^*)$ $(n \ge n_0)$ и $E(A^*(V_n^1), X_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, где V_n^1 — единичный шар в $(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp}$. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (3), *имеет только нулевое решение, то проекционный метод* (2) *решения уравнения* (3) *будет асимптотически оптимальным для любого ц. с. множества решений F. Если, кроме того, X_n является экстремальным подпространством для проекционного поперечника $\pi_n(F)$ $(n \ge n_0)$, то проекционный метод* (2) *будет асимптотически оптимальным среди всех проекционных методов решения уравнения* (3).

Пример 1 представляет интегральное уравнение

$$\alpha(s)x(s) + \int_a^b h(s,t)x(t)dt = y(s), \tag{4}$$

где решение x ищется в $L_2[a,b]$, $y \in L_2[a,b]$, $h \in L_2[a,b]^2$, $D(\alpha)$ плотно в $L_2[a,b]$ и $1/\alpha \in L_{\infty}[a,b]$.

Пусть последовательность подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в $L_2[a,b]$, $Y_n = X_n/a$, P_n — ортопроектор на Y_n.

Предположим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (4), имеет только нулевое решение. Тогда проекционный метод (2) решения уравнения (4) является асимптотически оптимальным для любого ц. с. множества решений F.

Если, кроме того, X_n является экстремальным для проекционного поперечника $\pi_n(F)$ ($n \geq n_0$), то проекционный метод (2) будет асимптотически оптимальным среди всех проекционных методов решения уравнения (4).

Теорема 4. *Пусть существует A^{-1} — компактный оператор, B — непрерывный оператор, последовательность подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в H, $(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp} \subset D(A^*)$ ($n \geq n_0$) и $E(A^*(V_n^1), X_n) \to 0$ ($n \to \infty$), где V_n^1 — единичный шар в $(\operatorname{Ker} P_n)^{\perp}$. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет только нулевое решение, то проекционный метод (2) решения уравнения (3) будет асимптотически оптимальным для любого ц. с. множества решений F. Если, кроме того, X_n является экстремальным для проекционного поперечника $\pi_n(F)$ ($n \geq n_0$), то проекционный метод (2) будет асимптотически оптимальным среди всех проекционных методов решения уравнения (3).*

Пример 2 — сингулярное интегральное уравнение I-рода

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - t} x(\tau)d\tau + H(x,\tau) = y(t), \tag{5}$$

где x ищется в $L_{2,p}[-1,1]$, $p(t) = \sqrt{1-t^2}$, $y(t) \in L_{2,p}[-1,1]$, $H : L_{2,p} \to L_{2,p}$ — непрерывный оператор такой, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (5), имеет только нулевое решение. Пусть $X_n = \operatorname{Lin}\{1, t, \dots, t^{n-1}\}$, P_n — ортопроектор на X_n. Тогда проекционный метод (2) решения уравнения (5) является асимптотически оптимальным для любого ц. с. множества решений F.

Пример 3 составляет краевую задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x(t) = y(t),$$
$$x(0) = x(1) = 0,$$

где $p(t) \in L_\infty[0,1]$. Пусть $X_n = \operatorname{Lin}\{\sin k\pi t,\ k = \overline{1,n}\}$, P_n — ортопроектор на X_n. Тогда проекционный метод (2) решения рассматриваемой задачи является асимптотически оптимальным для любого ц. с. множества F.

Литература

1. Бахвалов Н.С. *Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Докт. дис. в форме науч. докл. – Киев, 1985. – 48 с.
4. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Казанский государственный университет

Поступила
22.12.1998