ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.972.8

А.Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ ОБ ИТЕРАЦИОННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУПРЕЖДАЮЩИХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Предлагается обобщение метода программных итераций (МПИ) [1]–[4], применяемого ранее в теории дифференциальных игр (ДИ) [5]–[7]. Конструкции [1]–[4] предусматривали предварительное построение объектов, определяющих решение ДИ: осуществлялось построение цены ДИ, как функции позиции, и множества позиционного поглощения, соответствующего альтернативному разбиению пространства позиций в ДИ сближения-уклонения [6], [7]. Вариант МПИ для построения функции цены рассматривался, например, в [1]; конструкция МПИ, реализующая множество позиционного поглощения, исследовалась, в частности, в [2], [3]. В [4] дан обзор различных версий МПИ, использовавшихся для решения ДИ, и проведено сравнение результатов, получаемых с помощью этих версий (отметим вариант МПИ для решения ДИ с информационной памятью в [8]). Впоследствии аналоги МПИ использовались в ДИ с дополнительным ограничением на число коррекций полезного управления ([9], [10]), для исследования свойств неподвижных точек на пространстве множеств ([11], [12]), для построения функции Беллмана в задачах маршрутизации [13], [14], для построения обобщенных (минимаксных) решений уравнения Гамильтона–Якоби [15]. В данной работе рассматривается прямой вариант МПИ для (непосредственного) преобразования “произвольных” многозначных отображений в неупреждающие, т. е. в аналоги так называемых квазистратегий.

1. Обсуждение задачи

Рассмотрим задачу о наибольшем, в некотором естественном смысле, неупреждающем многозначном селекторе априорного многозначного отображения. Именно, если есть хоть какая-то возможность для неупреждающей реакции на непредсказуемые помеховые воздействия, то эта возможность реализуется посредством предлагаемой конструкции. Вышеупомянутые априорные отображения возникают в прикладных задачах из естественных требований соблюдения конкретных условий (ограничений). Рассмотрим простейший пример дифференциальной игры. Дана скалярная система

$$\dot{x} = u + v, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1,$$

рассматриваемая на отрезке времени $[0,1]$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$. Введем $I \triangleq [0,1[$ и множество $\mathbb{C}$ всех кусочно-постоянных (к.-п.) и непрерывных справа (н. спр.) управлений $c(\cdot) : I \longrightarrow [-1,1]$; полагаем, что в системе реализуются только управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ из множества $\mathbb{C}$. Цель игрока 1, формирующего $u(\cdot)$, — осуществление события $x(1) = 0$; цель игрока 2, формирующего $v(\cdot)$, противоположна. Игра разрешима в классе чистых позиционных стратегий в смысле альтернативы ([6], с. 68; [7], с. 231); в данном простейшем случае можно совсем легко построить синтез в форме экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, А.И. Субботина. Задача игрока 1 для нулевой начальной позиции успешно разрешима. Рассмотрим программные процедуры управления. Сопоставим функции $v(\cdot) \in \mathbb{C}$ множество $m(v(\cdot))$ всех управлений $u(\cdot) \in \mathbb{C}$, обладающих свойством: сумма интегралов функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ равна нулю. Выбор $u(\cdot) \in m(v(\cdot))$ соответствует парирующему действию игрока 1; оно заключается,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458) и Международного научно-технического центра (проект 98-1293).

в реализации события $x(1) = 0$ на движении, порождаемого парой $u(\cdot) \in \mathbb{C}$ и $v(\cdot) \in \mathbb{C}$ из нуля. Полученное многозначное отображение m, определенное на $\mathbb{C}$, является упреждающим, но содержит неупреждающий селектор ([4], гл. IV). Действительно, определяя управление $\mathbb{O} \in \mathbb{C}$ условием $\mathbb{O}(t) \equiv 0$, имеем для функции $u_*(\cdot) \in \mathbb{C}$ такой, что $u_*(t) = 1$ при $t \in [0,\ 1/2[$ и $u_*(t') = -1$ для $t' \in [1/2,\ 1[$, свойство $u_*(\cdot) \in m(\mathbb{O})$. Если в момент $t = 1/2$ управление $\mathbb{O}$ изменить до управления, равного (при $t \in [1/2,\ 1[$) единице, то получившееся управление $v^0(\cdot) \in \mathbb{C}$, совпадающее с $\mathbb{O}$ на $[0,\ 1/2[$ (и "единичное" на $[1/2,\ 1[$), оказывается таким, что в множестве $m(v^0(\cdot))$ нет управлений, совпадающих со значениями $u_*(\cdot)$ на $[0,\ 1/2[$. Неупреждающий селектор m определяется контруправлением [3]–[5] в виде отображения φ, действующего в отрезке $[-1, 1]$ по правилу $\varphi(v) \stackrel{\triangle}{=} -v$; с помощью φ реализуем неупреждающее отображение n, действующее в $\mathbb{C}$ по правилу: $n(v'(\cdot))(t) \stackrel{\triangle}{=} -v'(t) = \varphi(v'(t))$. Тогда $n(v(\cdot)) \in m(v(\cdot))$ при $v(\cdot) \in \mathbb{C}$. В связи с заменой m на n отметим свойство: при любом $v(\cdot) \in \mathbb{C}$ $\{n(v(\cdot))\}$ есть (одноэлементное) множество всех управлений $u(\cdot) \in m(v(\cdot))$ таких, что $\forall v'(\cdot) \in \mathbb{C}\ \forall t \in]0, 1]$

$$(v(\xi) = v'(\xi)\ \forall \xi \in [0, t[) \Longrightarrow (\exists u'(\cdot) \in m(v'(\cdot))\ u(\xi) = u'(\xi)\ \forall \xi \in [0, t[).$$

Действительно, пусть $u(\cdot) \in m(v(\cdot)) \setminus \{n(v(\cdot))\}$. Рассмотрим к.-п. и н. спр. функцию $w(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} u(\cdot) + v(\cdot)$, не равную нулю тождественно. Выберем наименьший момент $t_* \in I$ со свойством $w(t_*) \neq 0$ и число $\kappa \in]0, \infty[$, удовлетворяющее условиям 1) $t_* + \kappa < 1$; 2) $w(t) = w(t_*)$, $t \in [t_*, t_* + \kappa[$. Интеграл $\mathcal{J}$ функции $w(\cdot)$ на полуинтервале $[0, t_* + \kappa[$ отличен от нуля. Изменим управление $v(\cdot)$; именно, заменим на $[t_*+\kappa,\ 1[$ его значения константой $\operatorname{sgn}(\mathcal{J})$, не меняя $v(t)$ при $t \in [0,\ t_*+\kappa[$. Получившееся в итоге управление $v_1(\cdot) \in \mathbb{C}$ (совпадающее с $v(\cdot)$ на $[0,\ t_* + \kappa[$) таково, что при $u_1(\cdot) \in m(v_1(\cdot))$ условие совпадения $u(t)$ и $u_1(t)$ на $[0,\ t_* + \kappa[$ непременно нарушается: если функция $u_1(\cdot)$ совпадает с $u(\cdot)$ на $[0,\ t_* + \kappa[$, то интеграл $u_1(\cdot) + v_1(\cdot)$ на I равен сумме $\mathcal{J}$ и числа, которое либо равно нулю, либо имеет знак числа $\mathcal{J}$; в обоих случаях "полный" интеграл управления-суммы отличен от нуля, что противоречит свойству $u_1(\cdot) \in m(v_1(\cdot))$. Итак, в данном примере посредством естественного правила, ориентированного на "отслеживание" значений оператора m по мере развития $v(\cdot) \in \mathbb{C}$, получаем сужение m до неупреждающего селектора n. Это правило принимаем за основу итерационной процедуры на пространстве многозначных отображений.

Рассмотрим другую задачу. Пусть E — непустое множество, $\mathcal{L}$ — полуалгебра ([16], гл. I; [17], с. 58) подмножеств E; через $B(E, \mathcal{L})$ обозначаем, следуя [17]–[19], банахово пространство всевозможных равномерных пределов ступенчатых, в смысле $(E, \mathcal{L})$, вещественнозначных (в/з) функций на E. Пусть $f \in B(E, \mathcal{L})$, $g \in B(E, \mathcal{L})$, $\mathbb{Y}$ — замкнутое в топологии покоординатной сходимости подмножество плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Рассмотрим множество $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ всех конечно-аддитивных (к.-а.) вероятностей на $\mathcal{L}$. Фиксируем непустые множества $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}(\mathcal{L})$, и $\mathbb{P}^0$, $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}(\mathcal{L})$; пусть

$$\forall \mu \in \mathbb{P}_0 : m_0(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \left\{ \nu \in \mathbb{P}^0 \,\Big|\, \left(\int_E f d\mu,\ \int_E g d\nu \right) \in \mathbb{Y} \right\} \tag{1.1}$$

(используем в (1.1) простейшее определение интеграла по к.-а. мере ([17], гл. III; [18], гл. 3). Тогда $m_0 = m_0(\cdot)$ — многозначное отображение в пространстве к.-а. вероятностей на $\mathcal{L}$. Множество $\mathbb{P}^0$ полагаем замкнутым в топологическом пространстве (ТП) ([17], (4.2.6)). Итак, постулируем $*$-слабую замкнутость $\mathbb{P}^0$ в пространстве $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющую ограниченную вариацию; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ изометрически изоморфно пространству $B^*(E, \mathcal{L})$, топологически сопряженному к $B(E, \mathcal{L})$. Каждое множество (1.1) компактно в упомянутом ТП ([17], (4.2.6)). Фиксируем непустое семейство множеств $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Множества $L \in \mathcal{L}_0$ считаем простейшими. Пусть $\mathbb{X}$ — непустое множество, элементами которого являются семейства (множеств) $\mathcal{H}$ такие, что $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L}$. Отображение m_* из множества $\mathbb{P}_0$ в семейство всех подмножеств $\mathbb{P}^0$ назовем неупреждающим многозначным селектором m_0, если 1) $m_*(\mu) \subset m_0(\mu)$ при $\mu \in \mathbb{P}_0$; 2) при всяком выборе $\mu \in \mathbb{P}_0$, $\nu \in m_*(\mu)$, $\mathcal{H} \in \mathbb{X}$ и $\widetilde{\mu} \in \mathbb{P}_0$ со свойством совпадения сужений ([19], с. 13) $(\mu|\mathcal{H}) = (\widetilde{\mu}|\mathcal{H})$ можно указать $\widetilde{\nu} \in m_*(\widetilde{\mu})$ так, что $(\nu \mid \mathcal{H}) = (\widetilde{\nu} \mid \mathcal{H})$. Итак, для m^* постулируется принципиальная возможность выращивания к.-а. меры $\nu \in \mathbb{P}^0$ в ответ на развивающуюся реализацию $\mu \in \mathbb{P}_0$; при этом для μ и ν должно соблюдаться $\mathbb{Y}$-ограничение. В качестве $\mathcal{L}_0$ можно использовать полуалгебру множеств; при этом разумно считать, что $\mathcal{L}_0 \in \mathbb{X}$ и $\mathcal{L} \in \mathbb{X}$. В качестве $\mathbb{X}$ можно выбрать множество всех семейств $\mathcal{H}$ подмножеств E со свойством $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L}$; можно однако ограничить выбор $\mathcal{H}$ определенным типом измеримых структур (полуалгебра, алгебра или σ-алгебра множеств). Данную конструкцию можно связать с проблемой продолжения к.-а. меры, полагая, например, что $\mathbb{P}_0$ — множество всех $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ таких, что $(\mu \mid \mathcal{L}_0) = \mu_0$, где μ_0 — заданная к.-а. вероятность на $\mathcal{L}_0$. В этой связи отметим пример ([17], с. 90), иллюстрирующий эффект неединственного и,в известной степени, паталогического продолжения к.-а. меры. В рассматриваемой задаче условие компактнозначности априорного многозначного отображения m_0 естественно. Это условие существенно и в дальнейшем.

2. Сводка топологических понятий

Если A и B — множества, обозначаем через B^A множество всех операторов из A в B; если $f \in B^A$ и C — подмножество A, то через $(f \mid C)$ обозначаем сужение [19] f на множество C, получая оператор из C в B. Используем стандартные понятия общей топологии [20]–[22]. В частности, потребуются понятия подпространства (п/п) топологического пространства (ТП) и топологии поточечной сходимости в пространстве операторов, действующих из заданного множества в ТП (частный случай тихоновского произведения ТП; см. [19]–[23]). Используем сходимость по Мору-Смиту [20]–[22]. Направленности обозначаем посредством триплетов $(D,\ \preceq,\ h)$, где $(D,\ \preceq)$ — непустое направленное множество (НМ) и h есть оператор на D; если при этом H — множество и $h \in H^D$, то $(D,\ \preceq,\ h)$ — направленность в H (если к тому же H оснащено топологией t, то именуем, следуя традиции, $(D,\ \preceq,\ h)$ направленностью в ТП (H, t)). Если $(D,\ \preceq,\ h)$ — направленность в ТП (H, t) и $x \in H$, то для обозначения сходимости [19]–[22] направленности $(D,\ \preceq,\ h)$ к x используем выражение

$$(D,\ \preceq,\ h)\ \xrightarrow{t}\ x; \tag{2.1}$$

сходимость (в ТП (H, t)) последовательности $(x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ в H к x обозначаем более традиционно: $(x_i)_{i\in\mathcal{N}}\ \xrightarrow{t}\ x$; эта сходимость — частный случай (2.1). Об изотонном "прореживании" направленностей в ТП до сходящихся поднаправленностей см. [20], [21]. Если $(D,\ \preceq)$ и $(\Delta,\ \ll)$ — два непустых НМ, то через $(\mathrm{Isot})[D;\preceq;\Delta;\ll]$ обозначаем множество всех операторов $l \in \Delta^D$ таких, что

$$(\forall \delta \in \Delta\ \exists d \in D : \delta \ll l(d))\ \&\ (\forall d_1 \in D\ \forall d_2 \in D : (d_1\ \preceq\ d_2) \Longrightarrow (l(d_1)\ \ll\ l(d_2)))$$

(см. символику в ([18], с. 34)). О понятиях, связанных с компактностью, счетной и секвенциальной компактностью, а также секвенциальной замкнутостью см. [21]–[24]. Различаем компактность ([21], с. 196), счетную компактность ([21], с. 304) и секвенциальную компактность ([21], с. 314); термин "бикомпактность" не используем. В части перехода к п/п учитываем стандартные соглашения ([21], с. 196–197) и ([22], с. 239). Через $\mathcal{N}$ обозначаем натуральный ряд: $\mathcal{N} \triangleq \{1;\ 2;\ \ldots\}$; $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$. В дальнейшем $\leq$ используется только для обозначения естественного порядка $\mathcal{N}$, индуцированного обычной упорядоченностью $\mathbb{R}$; $(\mathcal{N},\ \leq)$ — НМ. Если $(D,\ \preceq)$ — непустое НМ, то $(\mathrm{Isot})[D;\ \preceq] \triangleq (\mathrm{Isot})[D;\ \preceq;\ \mathcal{N};\ \leq]$.

3. Общие определения

Ниже рассматривается процедура построения неупреждающих селекторов многозначных отображений. Эти селекторы также предполагаются многозначными; допускается возможность реализации $\emptyset$ в виде значений этих селекторов. Среди всевозможных селекторов с "плохими", вообще говоря, свойствами выделяются экстремальные. Изучение этих экстремальных селекторов позволяет получать некоторые утверждения относительно существования однозначных неупреждающих селекторов.

Дополним систему обозначений. Пусть X и Υ — непустые множества; $\mathcal{X}$ — непустое семейство непустых подмножеств X; (Y,τ) — ТП, $Y \neq \emptyset$; $\otimes^X(\tau)$ — топология множества Y^X, определяемая тихоновским произведением экземпляров (Y,τ) с индексным множеством X ($\otimes^X(\tau)$ — топология поточечной сходимости множества Y^X, где Y оснащено топологией τ); Z — непустое подмножество Y^X, оснащаемое топологией θ, индуцированной из $(Y^X, \otimes^X(\tau))$; Ω — непустое подмножество множества Υ^X; $\mathbb{Z}$ — семейство всех подмножеств Z; $M \in \mathbb{Z}^\Omega$. Итак, даны множества Ω и Z, причем функции — элементы Ω и Z — имеют общую область определения X; оператор M сопоставляет точке $\omega \in \Omega$ подмножество Z; (Z,θ) есть п/п ТП $(Y^X,\ \otimes^X(\tau))$.

Если $\omega \in \Omega$ и $A \in \mathcal{X}$, то через $\Omega_0(\omega \mid A)$ обозначаем множество всех отображений $\widetilde{\omega} \in \Omega$ со свойством $(\omega \mid A) = (\widetilde{\omega} \mid A)$. Итак, введено множество всех продолжений отображения $(\omega \mid A)$ до операторов из Ω. Оснащаем $\mathbb{Z}^\Omega$ поточечным порядком $\sqsubseteq$, полагая def $\forall H_1 \in \mathbb{Z}^\Omega\ \forall H_2 \in \mathbb{Z}^\Omega$

$$(H_1 \ \sqsubseteq\ H_2) \iff (H_1(\omega) \ \subset\ H_2(\omega)\ \forall \omega \in \Omega).$$

Используем традиционную символику для монотонной сходимости последовательностей множеств: если $(A_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность подмножеств множества H и A — подмножество H, то $(A_i)_{i\in\mathcal{N}} \downarrow A$ обозначает конъюнкцию следующих двух высказываний: 1) A — пересечение всех множеств A_i, $i \in \mathcal{N}$; 2) $A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \in \mathcal{N}$. Эта сходимость порождает поточечную сходимость в $\mathbb{Z}^\Omega$: если $(H_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{Z}^\Omega$ и $H \in \mathbb{Z}^\Omega$, то def

$$((H_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow H) \iff ((H_i(\omega))_{i\in\mathcal{N}} \ \downarrow\ H(\omega)\ \forall \omega \in \Omega). \tag{3.1}$$

Пусть $\Gamma : \mathbb{Z}^\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^\Omega$ есть def такой оператор, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega\ \forall \omega \in \Omega$

$$\Gamma(\mathcal{C})(\omega) \triangleq \{f \in \mathcal{C}(\omega) \mid \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega|A)\ \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}(\widetilde{\omega}) : (f \mid A) = (\widetilde{f} \mid A)\}. \tag{3.2}$$

Отметим, что Γ — монотонный в смысле $(\mathbb{Z}^\Omega,\ \sqsubseteq)$ оператор, т. е. $(U \sqsubseteq V) \Longrightarrow (\Gamma(U) \sqsubseteq \Gamma(V))$ $\forall U \in \mathbb{Z}^\Omega\ \forall V \in \mathbb{Z}^\Omega$. Неподвижные точки Γ именуем неупреждающими операторами. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{N} \triangleq \{\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega \mid (\Gamma(\mathcal{C}) = \mathcal{C})\,\&\,(\mathcal{C} \ \sqsubseteq\ M)\} = \{\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega \mid \forall \omega \in \Omega : (\mathcal{C}(\omega) \subset M(\omega))\,\& \\ \&\,(\forall f \in \mathcal{C}(\omega)\ \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A)\ \exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}(\widetilde{\omega}) : (f \mid A) = (\widetilde{f} \mid A))\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Нашей целью является исследование множества (3.3) всех неподвижных точек оператора (3.2), подчиненных априорному многозначному отображению M. В частности, важно установить вид некоторых инвариантных п/п оператора Γ (3.2) и получить в пределах этих п/п свойство секвенциальной непрерывности в смысле (3.1). Условимся о некоторых обозначениях. Пусть $\mathbb{F}$ — семейство всех замкнутых в ТП (Z,θ) подмножеств Z; $\mathcal{F}$ — семейство всех секвенциально замкнутых в (Z,θ) подмножеств Z; $\mathbb{K}$ — семейство всех компактных в (Z,θ) подмножеств Z; $\mathcal{K}$ — семейство всех секвенциально компактных в (Z,θ) подмножеств Z; $\mathbb{C}$ — семейство всех счетно-компактных в (Z,θ) подмножеств Z; $\mathbb{T} \ \triangleq\ \mathbb{C} \cap \mathbb{F}$. Отметим представления семейств $\mathbb{K}$, $\mathcal{K}$ и $\mathbb{C}$ в терминах обобщенной сходимости. Характеризация $\mathcal{K}$ очевидна; $\mathbb{C}$ — семейство всех множеств $K_* \in \mathbb{Z}$, для каждого из которых при всяком выборе последовательности $(z_i)_{i\in\mathcal{N}}$ в K_* можно указать непустое НМ $(D,\ \preceq)$, отображение $h \in (\mathrm{Isot})[D;\ \preceq]$ и элемент $z \in K_*$ такие, что

$$(D,\ \preceq,\ (z_{h(d)})_{d\in D})\ \xrightarrow{\theta}\ z.$$

Наконец, $\mathbb{K}$ — семейство всех множеств $K^* \in \mathbb{Z}$, для каждого из которых при всяком выборе направленности $(D,\ \preceq,\ h)$ в K^* можно указать непустое НМ $(\Delta, \ll)$, оператор $l \in (\mathrm{Isot})[\Delta;\ \ll;\ D;\ \preceq]$ и элемент $z \in K^*$ такие, что $(\Delta,\ \ll,\ h \circ l)\ \xrightarrow{\theta}\ z$; $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ и $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$. Рассматриваем $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathcal{K}^\Omega$ и $\mathbb{T}^\Omega$, как п/п $\mathbb{Z}^\Omega$.

Предложение 3.1. *Пусть (Y,τ) — хаусдорфово ТП. Тогда $\mathbb{K}^\Omega$ есть инвариантное п/п оператора Γ, т. е. $\forall U \in \mathbb{K}^\Omega : \Gamma(U) \in \mathbb{K}^\Omega$.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathbb{K}^{\Omega}$ и $\omega \in \Omega$. Достаточно установить замкнутость $\Gamma(U)(\omega)$ в ТП (Z, θ), т. к. $U(\omega) \in \mathbb{K}$. Заметим, что (Z, θ) — хаусдорфово ТП. Используем теорему Биркгофа ([21], с. 89; [22], с. 98). Пусть $(D, \preceq, \varphi)$ — направленность в $\Gamma(U)(\omega)$, $f \in Z$ и $(D, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\theta} f$. Поскольку $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, то $f \in U(\omega)$. Пусть $A \in \mathcal{X}$ и $\widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A)$. В силу аксиомы выбора можно указать оператор $\widetilde{\varphi}$ из D в $U(\widetilde{\omega})$ такой, что $(\varphi(d) \mid A) = (\widetilde{\varphi}(d) \mid A)$ при $d \in D$. Поскольку $U(\widetilde{\omega}) \in \mathbb{K}$, то для некоторых $f_* \in U(\widetilde{\omega})$, непустого НМ $(\Delta, \ll)$ и оператора $l \in (\mathrm{Isot})[\Delta;\ \ll;\ D;\ \preceq]$ имеет место

$$(\Delta,\ \ll,\ \widetilde{\varphi} \circ l) \xrightarrow{\theta} f_*.$$

Как следствие, при всяком $x \in X$ имеем сходимость

$$(\Delta,\ \ll,\ (\widetilde{\varphi} \circ l)(\cdot)(x)) \xrightarrow{\tau} f_*(x), \tag{3.4}$$

где $(\widetilde{\varphi} \circ l)(\cdot)(x)$ — оператор из Δ в Y со значениями $(\widetilde{\varphi} \circ l)(\delta)(x)$. С другой стороны, имеет место (при $x \in X$) сходимость

$$(\Delta,\ \ll,\ (\varphi \circ l)(\cdot)(x)) \xrightarrow{\tau} f(x). \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) имеем ([21], с. 91) равенство $(f \mid A) = (f_* \mid A)$. Поскольку A и $\widetilde{\omega}$ выбирались произвольно, то (см. (3.2)) $f \in \Gamma(U)(\omega)$. Поскольку выбор $(D, \preceq, \varphi)$ и f был также произвольным, то $\Gamma(U)(\omega) \in \mathbb{F}$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть (Y, τ) — хаусдорфово ТП. Тогда $\mathcal{K}^{\Omega}$ есть инвариантное п/п оператора Γ, т. е. $\forall U \in \mathcal{K}^{\Omega} : \Gamma(U) \in \mathcal{K}^{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{K}^{\Omega}$ и $\omega \in \Omega$. Поскольку $U(\omega) \in \mathcal{K}$, достаточно показать, что $\Gamma(U)(\omega) \in \mathcal{F}$. Выберем произвольно последовательность $(f_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\Gamma(U)(\omega)$ и $f \in Z$ со свойством $(f_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} f$; при $x \in X$ имеем сходимость последовательности $(f_i(x))_{i \in \mathcal{N}}$ к $f(x)$ в (Y, τ). Поскольку $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, имеем $f \in U(\omega)$. Пусть $A \in \mathcal{X}$ и $\widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A)$. С использованием (3.2) и аксиомы выбора подберем последовательность $(\widetilde{f}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $U(\widetilde{\omega})$ такую, что $(f_j \mid A) = (\widetilde{f}_j \mid A)\ \forall j \in \mathcal{N}$. Но $U(\widetilde{\omega}) \in \mathcal{K}$, и можно указать строго возрастающую последовательность η в $\mathcal{N}$, а также $\widetilde{f} \in U(\widetilde{\omega})$, для которых

$$(\widetilde{f}_{\eta(k)})_{k \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} \widetilde{f}.$$

Рассуждение, являющееся секвенциальным аналогом (3.4), (3.5), доставляет равенство $(f \mid A) = (\widetilde{f} \mid A)$, что в силу произвольного выбора A и $\widetilde{\omega}$ означает: $f \in \Gamma(U)(\omega)$; т. к. $(f_i)_{i \in \mathcal{N}}$ и f выбирались произвольно, то $\Gamma(U)(\omega) \in \mathcal{F}$. $\square$

Для всяких последовательности $(T_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\mathbb{T}$ и множества $T \in \mathbb{Z}$

$$((T_i)_{i \in \mathcal{N}} \downarrow T) \implies (T \in \mathbb{T}). \tag{3.6}$$

Если $(\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{T}^{\Omega}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^{\Omega}$, то согласно (3.1), (3.6)

$$((\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \implies (\mathcal{C} \in \mathbb{T}^{\Omega}). \tag{3.7}$$

Предложение 3.3. *Пусть (Y, τ) есть T_1-пространство ([21], с. 69), $(\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{T}^{\Omega}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^{\Omega}$. Тогда*

$$((\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \implies ((\Gamma(\mathcal{C}_i))_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow \Gamma(\mathcal{C})). \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка (3.8). Тогда (см. (3.7)) $\mathcal{C} \in \mathbb{T}^{\Omega}$. Фиксируем $\omega_* \in \Omega$ и элемент f_* пересечения всех множеств $\Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega_*)$, $i \in \mathcal{N}$. Разумеется, $f_* \in \mathcal{C}(\omega_*)$. Фиксируем $A^* \in \mathcal{X}$ и $\omega^* \in \Omega_0(\omega_* \mid A^*)$, после чего подберем последовательность $(f_i^*)_{i \in \mathcal{N}}$, являющуюся элементом произведения всех множеств $\mathcal{C}_i(\omega^*)$, $i \in \mathcal{N}$, со свойством

$$(f_* \mid A^*) = (f_j^* \mid A^*)\ \ \forall j \in \mathcal{N}.$$

Такая возможность обеспечивается в (3.2). Имеем сходимость

$$(\mathcal{C}_i(\omega^*))_{i \in \mathcal{N}} \downarrow \mathcal{C}(\omega^*) \tag{3.9}$$

(см. посылку (3.8)). В силу (3.9) $(f_i^*)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в множестве $\mathcal{C}_1(\omega^*) \in \mathbb{C}$. Можно указать непустое НМ $(D_0, \preceq)$, отображение $l \in (\mathrm{Isot})[D_0; \preceq]$ и элемент $\widehat{f} \in \mathcal{C}_1(\omega^*)$, для которых

$$(D_0,\ \preceq,\ (f^*_{l(d)})_{d\in D_0})\ \stackrel{\theta}{\to}\ \widehat{f}. \tag{3.10}$$

Разумеется, $(f_* \mid A^*) = (f^*_{l(d)} \mid A^*)$ при $d \in D_0$, а в силу (3.10)

$$(D_0,\ \preceq,\ (f^*_{l(d)}(x))_{d\in D_0})\ \stackrel{\tau}{\to}\ \widehat{f}(x)\ \forall x \in X. \tag{3.11}$$

В частности, имеем (3.11) при $x \in A^*$; $f^*_{l(d)}(x) = f_*(x)$ при $d \in D_0$ для таких x. Согласно (3.11) имеем, что при $x \in A^*$ элемент $f_*(x) \in Y$ содержится в любой окрестности $\widehat{f}(x)$; это означает равенство $f_*(x) = \widehat{f}(x)$ (здесь учтено, что (Y, τ) есть T_1-пространство). Итак, $(f_* \mid A^*) = (\widehat{f} \mid A^*)$. Пусть $n \in \mathcal{N}$. По свойствам l имеем при некотором $\delta_1 \in D_0$, что

$$(\delta_1\ \preceq\ d) \implies (n \le l(d))\ \ \forall d \in D_0.$$

Это означает (см. (3.1) и посылку (3.8)), что $\mathcal{C}_{l(d)}(\omega^*) \subset \mathcal{C}_n(\omega^*)$ при $d \in D_0$, $\delta_1\ \preceq\ d$, а тогда (для таких d) $f^*_{l(d)} \in \mathcal{C}_n(\omega^*)$. Получаем в силу (3.10), что каждая окрестность точки $\widehat{f} \in Z$ имеет непустое пересечение с $\mathcal{C}_n(\omega^*) \in \mathbb{F}$; тогда $\widehat{f} \in \mathcal{C}_n(\omega^*)$. Поскольку выбор n был произвольным, установлено, что $\widehat{f} \in \mathcal{C}_k(\omega^*)\ \forall k \in \mathcal{N}$. Это означает (см. (3.9)), что $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\omega^*)$ и при этом $(f_* \mid A^*) = (\widehat{f} \mid A^*)$. Поскольку выбор A^* и ω^* был произвольным, установлено (см. (3.2)), что $f_* \in \Gamma(\mathcal{C})(\omega_*)$. Установлено вложение

$$\bigcap_{i\in\mathcal{N}} \Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega_*) \subset \Gamma(\mathcal{C})(\omega_*).$$

Противоположное вложение очевидно, т. е. $\Gamma(\mathcal{C})(\omega_*)$ есть пересечение всех множеств $\Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega_*)$, $i \in \mathcal{N}$. По предположению $\mathcal{C}_{i+1}\ \sqsubseteq\ \mathcal{C}_i$ и в силу монотонности Γ имеем вложение $\Gamma(\mathcal{C}_{i+1})(\omega_*) \subset \Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega_*)$ при $i \in \mathcal{N}$. Итак,

$$(\Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega_*))_{i\in\mathcal{N}} \downarrow \Gamma(\mathcal{C})(\omega_*).$$

Поскольку выбор ω_* был произвольным, имеем (см. (3.1)) следствие импликации (3.8). $\square$

Если (Y, τ) — хаусдорфово ТП, $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{K}^\Omega$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$, то

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \mathcal{C}) \implies (\mathcal{C} \in \mathbb{K}^\Omega).$$

Предложение 3.4. *Пусть* (Y, τ) *есть хаусдорфово ТП,* $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ *— последовательность в* $\mathbb{K}^\Omega$ *и* $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$*. Тогда*

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \mathcal{C}) \implies ((\Gamma(\mathcal{C}_i))_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \Gamma(\mathcal{C})). \tag{3.12}$$

Доказательство. Имеем $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, т. к. (Z, θ) — хаусдорфово ТП; $\mathcal{C}_i(\omega) \in \mathbb{C}$ при $i \in \mathcal{N}$ и $\omega \in \Omega$. Тогда $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{T}^\Omega$ и (3.12) следует из предложения 3.3. $\square$

Если (Y, τ) — хаусдорфово ТП, то $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ и при всяком выборе последовательности $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ в $\mathcal{K}^\Omega$ и отображения $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \mathcal{C}) \implies (\mathcal{C} \in \mathcal{K}^\Omega). \tag{3.13}$$

Предложение 3.5. *Пусть* (Y, τ) *есть хаусдорфово ТП,* $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ *— последовательность в* $\mathcal{K}^\Omega$ *и* $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$*. Тогда*

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \mathcal{C}) \implies ((\Gamma(\mathcal{C}_i))_{i\in\mathcal{N}}\ \Downarrow\ \Gamma(\mathcal{C})). \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка импликации (3.14). Тогда (см. (3.13)) $\mathcal{C} \in \mathcal{K}^\Omega$. Имеем при $j \in \mathcal{N}$ свойства $\mathcal{C}_{j+1} \sqsubseteq \mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{C}_j$. В силу монотонности Γ получаем $\Gamma(\mathcal{C}_{j+1}) \sqsubseteq \Gamma(\mathcal{C}_j)$ и $\Gamma(\mathcal{C}) \sqsubseteq \Gamma(\mathcal{C}_j)$ при $j \in \mathcal{N}$. Фиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда $\Gamma(\mathcal{C}_{i+1})(\omega) \subset \Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega)$ при $i \in \mathcal{N}$; $\Gamma(\mathcal{C})(\omega)$ — подмножество пересечения всех множеств $\Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega)$, $i \in \mathcal{N}$. Установим вложение

$$\bigcap_{i\in\mathcal{N}} \Gamma(\mathcal{C}_i)(\omega) \subset \Gamma(\mathcal{C})(\omega). \tag{3.15}$$

Пусть f — точка множества в левой части (3.15). Тогда $f \in \mathcal{C}(\omega)$; см. посылку (3.14). Пусть $A \in \mathcal{X}$ и $\widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A)$, а последовательность

$$(\widetilde{f}_i)_{i\in\mathcal{N}} \in \prod_{i\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_i(\widetilde{\omega}) \tag{3.16}$$

такова, что (см. (3.2)) $(f \mid A) = (\widetilde{f}_j \mid A)\ \forall j \in \mathcal{N}$. Из (3.16) имеем, что $(\widetilde{f}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathcal{C}_1(\widetilde{\omega}) \in \mathcal{K}$. Подберем $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_1(\omega)$ и строго возрастающую последовательность $\eta : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, для которых

$$(\widetilde{f}_{\eta(k)})_{k\in\mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} \widetilde{f}. \tag{3.17}$$

Разумеется, имеет место свойство

$$(\widetilde{f}_{\eta(k)})_{k\in\mathcal{N}} \in \prod_{k\in\mathcal{N}} \mathcal{C}_k(\widetilde{\omega}).$$

Пусть $n \in \mathcal{N}$. Тогда $\mathcal{C}_k(\widetilde{\omega}) \subset \mathcal{C}_n(\widetilde{\omega})$ при $k \in \mathcal{N}$, $n \le k$. Как следствие, $(\widetilde{f}_{\eta(n+k)})_{k\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathcal{C}_n(\widetilde{\omega}) \in \mathcal{F}$, сходящаяся к $\widetilde{f}$ в (Z,θ). Тогда $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_n(\widetilde{\omega})$. Поскольку n выбиралось произвольно, то $\widetilde{f} \in \mathcal{C}(\widetilde{\omega})$. Из (3.17) имеем

$$(\widetilde{f}_{\eta(k)}(x))_{k\in\mathcal{N}} \xrightarrow{\tau} \widetilde{f}(x)\ \forall x \in X. \tag{3.18}$$

Поскольку $\widetilde{f}_{\eta(k)}(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $k \in \mathcal{N}$, то из (3.18) получаем (т. к. (Y,τ) есть T_1-пространство), что $(f \mid A) = (\widetilde{f} \mid A)$. Поскольку выбор A и $\widetilde{\omega}$ был произвольным, из (3.2) имеем $f \in \Gamma(\mathcal{C})(\omega)$, чем и завершается обоснование (3.15). □

На основе предложений 3.1, 3.4 и 3.2, 3.5 конструируем две версии итерационной процедуры построения неупреждающего многозначного селектора M.

4. Итерационная процедура

Для оператора Γ введем последовательность степеней, т. е. следующую последовательность $(\Gamma^k)_{k\in\mathcal{N}_0}$ операторов, действующих в $\mathbb{Z}^\Omega$. Пусть $\mathbb{J} : \mathbb{Z}^\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^\Omega$ есть def тождественный оператор: $\mathbb{J}(\mathcal{C}) \triangleq \mathcal{C}$ при $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$; тогда

$$(\Gamma^0 \triangleq \mathbb{J})\,\&\,(\Gamma^k = \Gamma \circ \Gamma^{k-1}\ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{4.1}$$

($\circ$ — символ суперпозиции). Введем оператор Γ^∞, действующий в $\mathbb{Z}^\Omega$ по правилу: если $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$ и $\omega \in \Omega$, то

$$\Gamma^\infty(\mathcal{C})(\omega) \triangleq \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \Gamma^k(\mathcal{C})(\omega). \tag{4.2}$$

Разумеется (см. (3.2), (4.1)), $\Gamma^k(\mathcal{C}) \sqsubseteq \Gamma^{k-1}(\mathcal{C})\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega\ \forall k \in \mathcal{N}$. Введем последовательность в $\mathbb{Z}^\Omega$, полагая $\mathbb{M}_k \triangleq \Gamma^k(M)\ \forall k \in \mathcal{N}_0$. Итак,

$$(\mathbb{M}_0 = M)\,\&\,(\mathbb{M}_k = \Gamma(\mathbb{M}_{k-1})\ \forall k \in \mathcal{N}). \tag{4.3}$$

Разумеется, $\mathbb{M}_k \sqsubseteq \mathbb{M}_{k-1}\ \forall k \in \mathcal{N}$. Для $\mathbb{M}_\infty \triangleq \Gamma^\infty(M) \in \mathbb{Z}^\Omega$ согласно (4.2) имеем

$$\mathbb{M}_\infty(\omega) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathbb{M}_k(\omega)\ \forall \omega \in \Omega. \tag{4.4}$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным

Условие 4.1. (Y, τ) — *хаусдорфово ТП.*

Из предложения 3.1 и (4.1) следует, что $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, а $\mathbb{K}^\Omega$ есть инвариантное п/п каждого из операторов Γ^k, $k \in \mathcal{N}_0$. В силу (4.2) $\mathbb{K}^\Omega$ — инвариантное п/п оператора Γ^∞, т. е. $\Gamma^\infty(\mathcal{C}) \in \mathbb{K}^\Omega$ $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{K}^\Omega$. Наконец, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$. В силу предложения 3.2 и (4.1) $\mathcal{K}^\Omega$ есть инвариантное п/п каждого из операторов Γ^k, $k \in \mathcal{N}_0$; $\Gamma^\infty(U) \in \mathcal{K}^\Omega$ $\forall U \in \mathcal{K}^\Omega$.

Теорема 4.1. *Пусть* $M \in \mathbb{K}^\Omega$. *Тогда* $\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{K}^\Omega$ *есть наибольший в* $(\mathbb{Z}^\Omega, \sqsubseteq)$ *элемент* $\mathbb{N}$: $(\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{N}) \,\&\, (\forall \mathcal{C} \in \mathbb{N} : \mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_\infty)$.

Доказательство. Свойство $\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{K}^\Omega$ следует из инвариантности $\mathbb{K}^\Omega$ относительно Γ^∞. Из (4.3), (4.4) имеем сходимость

$$(\mathbb{M}_k)_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathbb{M}_\infty, \tag{4.5}$$

где $(\mathbb{M}_k)_{k \in \mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{K}^\Omega$. Из предложения 3.4 и (4.5) имеем

$$(\Gamma(\mathbb{M}_k))_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \Gamma(\mathbb{M}_\infty). \tag{4.6}$$

Тогда при $\omega \in \Omega$ имеем равенство

$$\Gamma(\mathbb{M}_\infty)(\omega) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}} \Gamma(\mathbb{M}_k)(\omega) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_{k+1}(\omega) = \mathbb{M}_\infty(\omega). \tag{4.7}$$

Итак, $\Gamma(\mathbb{M}_\infty) = \mathbb{M}_\infty$, причем (см. (4.3), (4.4)) $\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq M$. В силу (3.3), (4.7) $\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}^\Omega$. Пусть $\mathcal{C} \in \mathbb{N}$, т. е. $\Gamma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \sqsubseteq M$. Согласно (4.3) $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_0$. Пусть $m \in \mathcal{N}_0$ обладает свойством $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_m$. Тогда в силу (4.3) и монотонности Γ имеем $\mathcal{C} = \Gamma(\mathcal{C}) \sqsubseteq \Gamma(\mathbb{M}_m) = \mathbb{M}_{m+1}$. Итак, $(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_m) \Longrightarrow (\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_{m+1})$. По индукции установлено, что $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_k$ $\forall k \in \mathcal{N}_0$. Поэтому (см. (4.4)) $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_\infty$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть* $M \in \mathcal{K}^\Omega$. *Тогда* $\mathbb{M}_\infty \in \mathcal{K}^\Omega$ *есть наибольший в* $(\mathbb{Z}^\Omega, \sqsubseteq)$ *элемент* $\mathbb{N}$, *т. е.* $(\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{N}) \,\&\, (\mathcal{C} \sqsubseteq \mathbb{M}_\infty \ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{N})$.

Доказательство использует инвариантность $\mathcal{K}^\Omega$ относительно Γ_∞, а в части обоснования (4.6), (4.7), — предложение 3.5.

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathbb{M}_\infty = \Gamma(\mathbb{M}_\infty)$, *а* $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}^\Omega$ *таково, что* $(\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq \mathcal{C}) \,\&\, (\mathcal{C} \sqsubseteq M)$. *Тогда* 1) $\Gamma^\infty(\mathcal{C}) = \mathbb{M}_\infty$; 2) $\Gamma^k(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_k$ $\forall k \in \mathcal{N}_0$.

Доказательство. Имеем $(\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq \Gamma^0(\mathcal{C})) \,\&\, (\Gamma^0(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_0)$. Пусть $m \in \mathcal{N}_0$ обладает свойством $(\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq \Gamma^m(\mathcal{C})) \,\&\, (\Gamma^m(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_m)$. Используя равенства $\Gamma^{m+1}(\mathcal{C}) = (\Gamma \circ \Gamma^m)(\mathcal{C}) = \Gamma(\Gamma^m(\mathcal{C}))$ и монотонность Γ, получаем согласно (4.3) и предположению о том, что $\mathbb{M}_\infty$ — неподвижная точка Γ, свойства

$$(\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq \Gamma^{m+1}(\mathcal{C})) \,\&\, (\Gamma^{m+1}(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_{m+1}).$$

Итак, по индукции имеем

$$(\mathbb{M}_\infty \sqsubseteq \Gamma^k(\mathcal{C})) \,\&\, (\Gamma^k(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_k) \ \forall k \in \mathcal{N}_0. \tag{4.8}$$

Из (4.8) имеем теперь с очевидностью, что

$$\mathbb{M}_\infty(\omega) \subset \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \Gamma^k(\mathcal{C})(\omega) \subset \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathbb{M}_k(\omega) \ \forall \omega \in \Omega.$$

В силу (4.2), (4.4) $\Gamma^\infty(\mathcal{C}) = \mathbb{M}_\infty$, причем (см. (4.8)) $\Gamma^k(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathbb{M}_k$ при $k \in \mathcal{N}_0$. $\square$

Пусть $(\mathrm{Dom})[U] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \neq \emptyset\}$ $\forall U \in \mathbb{Z}^\Omega$. В качестве U можно, в частности, использовать $\mathbb{M}_k$, $k \in \mathcal{N}_0$, и $\mathbb{M}_\infty$.

Теорема 4.3. *Пусть* $(M \in \mathbb{K}^\Omega) \vee (M \in \mathcal{K}^\Omega)$. *Тогда*

$$((\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_k])_{k \in \mathcal{N}} \downarrow (\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty].$$

Доказательство. Из (4.3) имеем $(\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_{k+1}] \subset (\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_k]$ $\forall k \in \mathcal{N}$. В силу (4.4)

$$(\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty] \subset \bigcap_{k \in \mathcal{N}} (\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_k]. \tag{4.9}$$

Равенство в (4.9) установим в следующих двух случаях: 1) $M \in \mathbb{K}^\Omega$; 2) $M \in \mathcal{K}^\Omega$. Рассмотрим случай 1). Итак, M — компактнозначное отображение на Ω. Выберем произвольный элемент ω_0 множества-пересечения в правой части (4.9). Тогда $\omega_0 \in \Omega$ и $\mathbb{M}_k(\omega_0) \neq \emptyset$ при $k \in \mathcal{N}$. Итак, $M(\omega_0) \in \mathbb{K}$, а $(\mathbb{M}_s(\omega_0))_{s \in \mathcal{N}}$ — последовательность подмножеств $M(\omega_0)$. Пусть $\mathcal{M} \triangleq \{\mathbb{M}_i(\omega_0) : i \in \mathcal{N}\}$. В силу условия 4.1 $\mathbb{M}_s(\omega_0) \in \mathbb{F}$ при $s \in \mathcal{N}_0$. Множества из $\mathcal{M}$ замкнуты в $M(\omega_0)$ с топологией компактного п/п ТП (Z, θ). Итак, $\mathcal{M}$ — центрированная система замкнутых множеств в компактном ТП и

$$\mathbb{M}_\infty(\omega_0) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}} \mathbb{M}_k(\omega_0) = \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H \neq \emptyset,$$

т. е. $\omega_0 \in (\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty]$. Установлено вложение, противоположное (4.9). Рассмотрим случай 2) $M \in \mathcal{K}^\Omega$. Фиксируем точку ω^0 множества-пересечения в правой части (4.9), тогда $(\mathbb{M}_s(\omega^0))_{s \in \mathcal{N}}$ — последовательность непустых подмножеств $M(\omega^0) \in \mathcal{K}$. Пусть $(f_k)_{k \in \mathcal{N}}$ — элемент произведения всех множеств $\mathbb{M}_s(\omega^0)$, $s \in \mathcal{N}$. Подберем строго возрастающую последовательность η в $\mathcal{N}$ и элемент $f \in M(\omega^0)$, для которых

$$(f_{\eta(s)})_{s \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} f; \tag{4.10}$$

$f_{\eta(k)} \in \mathbb{M}_k(\omega^0)$ при $k \in \mathcal{N}$. Пусть $n \in \mathcal{N}$. Тогда $\mathbb{M}_n(\omega^0) \in \mathcal{F}$; $f_{\eta(s)} \in \mathbb{M}_n(\omega^0)$ при $s \in \overrightarrow{n, \infty}$. Последовательность

$$(f_{\eta(n+k)})_{k \in \mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{M}_n(\omega^0)$$

в силу (4.10) сходится к f в ТП (Z, θ). Поэтому $f \in \mathbb{M}_n(\omega^0)$. Поскольку n было выбрано произвольным, имеем $f \in \mathbb{M}_\infty(\omega^0)$, т. е. $\omega^0 \in (\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty]$. Вложение, противоположное (4.9), установлено. $\square$

5. Некоторые следствия

В статье установлено, что при $M \in \mathbb{K}^\Omega \cup \mathcal{K}^\Omega$ множество $\mathbb{N}$ обладает наибольшим в $(\mathbb{Z}^\Omega, \sqsubseteq)$ элементом $\mathbb{M}_\infty$, который наследует от M свойство принимать в качестве своих значений только компактные или только секвенциально компактные множества соответственно. Многозначное отображение $\mathbb{M}_\infty$ определено в (4.3), (4.4). В связи с условиями на M полезно учесть положение ([21], с. 199).

Если (Y, τ) — хаусдорфово ТП, а $\widetilde{\theta}$ — топология множества Z, в которой все множества $M(\omega)$, $\omega \in \Omega$, компактны (компактны в ТП $(Z, \widetilde{\theta})$) и, кроме того, имеет место вложение $\theta \subset \widetilde{\theta}$, то $M \in \mathbb{K}^\Omega$, что позволяет использовать теорему 4.1 (см. конструкции [2]–[4], [8], [15]). Это свойство позволяет применять положения раздела 4 в ряде конкретных задач, где пространство Z оснащено более сильной в сравнении с θ и естественной для соответствующей конкретной постановки топологией. Ограничимся обсуждением примера раздела 1 (см. (1.1)) и его аналогов.

Рассмотрим сначала следующую конкретизацию общей постановки. Пусть $X \triangleq \mathcal{L}$; $\Upsilon \triangleq \mathbb{R}$; $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{X}$; $Y \triangleq \mathbb{R}$ оснащено естественной $|\cdot|$-топологией, используемой в дальнейшем в качестве τ; $Z \triangleq \mathbb{P}^0$, причем $\mathbb{P}^0$ замкнуто в ТП ([17], (4.2.6)) (тогда Z $*$-слабо компактно, т. е. компактно в упомянутом ТП); $\widetilde{\theta}$ — топология $\mathbb{P}^0$, индуцированная из ТП ([17], (4.2.6)); $\Omega \triangleq \mathbb{P}_0$; $M \triangleq m_0$ соответствует (1.1). Тогда (см. условия на $\mathbb{Y}$ раздела 1) множества $M(\mu) = m_0(\mu)$, $\mu \in \mathbb{P}_0$, $*$-слабо компактны (компактны в ТП ([17], (4.2.6))) и, следовательно, компактны в ТП $(Z, \widetilde{\theta}) = (\mathbb{P}^0, \widetilde{\theta})$. В качестве θ имеем топологию поточечной сходимости множества Z, а тогда ([17], с. 80) $\theta \subset \widetilde{\theta}$; более того, здесь $\theta = \widetilde{\theta}$ ([17], (4.2.12)). Нетрудно однако построить такой “знакопеременный” вариант примера, что соответствующие аналоги $\theta, \widetilde{\theta}$ могут уже различаться ([17], с. 93). Именно, изменим определения: в качестве $\mathbb{P}_0$ и $\mathbb{P}^0$ используем множество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ ([17], с. 79) (всех к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$); при $\mu \in \mathbb{P}_0 = \mathbb{A}(\mathcal{L})$ определим $M(\mu)$ как пересечение множества (1.1) и шара в сильной норме ([17], с. 62) пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ радиуса $v_\mu(E)$ ([17], (3.3.9)). В данном случае $(Z, \widetilde{\theta})$ есть хаусдорфово ТП ([17], (4.2.6)), а θ есть топология ([17], (4.2.8)); требуемое соотношение для θ, $\widetilde{\theta}$ см. в ([18], с. 45). Здесь компактнозначность M в ТП $(Z, \widetilde{\theta})$ следует из теоремы Алаоглу ([19], гл. V) (см. также [17], с. 71), т. е. и для данного примера $M \in \mathbb{K}^\Omega$.

В [1]–[4], [8], [12] можно использовать в виде реакции $M(\omega)$ часть пучка траекторий нелинейной системы, порожденного управлением-мерой ([4], гл. IV) одного из игроков; эта часть определяется из соображений разрешимости соответствующей задачи наведения [4], [6] и является при типичных для таких задач условиях компактным множеством в пространстве непрерывных вектор-функций (на соответствующем промежутке времени) с топологией равномерной сходимости. Последняя сильнее топологии поточечной сходимости. Итак, роль теоремы 4.1 значительна и в ряде случаев, когда в исходной задаче естественное оснащение не сводится к топологии поточечной сходимости. Семейство $\mathcal{X}$ раздела 3 в задаче конфликтного управления безинерционной точкой можно определить как семейство всех промежутков $[0, t[$, $t \in]0, 1]$; в качестве X используется $I = [0, 1[$. Данная конкретизация $(X, \mathcal{X})$ может быть применена с заменой "стрелки" I нужным промежутком времени $[t_0, \theta_0[$, $t_0 < \theta_0$, в постановках [1]–[4], [8], [24]–[27].

В связи с теоремой 4.3 заметим, что в задачах управления (напр., [1]–[8]) представляют интерес построение отображений из $\mathbb{N}$ с непустыми значениями и построение однозначных неупреждающих селекторов M (построение аналогов обычных квазистратегий [25]). Введем, ориентируясь на [2], [4], [8], [25]–[27], множество $\mathbb{N}_0 \triangleq \{\mathcal{C} \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{Dom})[\mathcal{C}] = \Omega\}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $(M \in \mathbb{K}^\Omega) \vee (M \in \mathcal{K}^\Omega)$. *Тогда условия* $\mathbb{N}_0 \neq \emptyset$ *и* $(Dom)[\mathbb{M}_\infty] = \Omega$ *эквивалентны.*

Доказательство. Если $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$, то $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ и согласно теоремам 4.1 и 4.2 $\alpha_0 \sqsubseteq \mathbb{M}_\infty$, т. е. $\alpha_0(\omega) \subset \mathbb{M}_\infty(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$. Но $\alpha_0(\omega) \neq \emptyset$ при $\omega \in \Omega$. Тогда $\mathbb{M}_\infty(\omega) \neq \emptyset$ $\forall \omega \in \Omega$; как следствие $(\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty] = \Omega$. Если же $(\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty] = \Omega$, то из теорем 4.1, 4.2 следует $\mathbb{M}_\infty \in \mathbb{N}_0$, т. е. $\mathbb{N}_0 \neq \emptyset$.

С теоремой 5.1 уместно связать вопрос о существовании у отображения M однозначных неупреждающих селекторов (аналоги квазистратегий [25]). Пусть $\mathbf{n}$ есть def множество всех функций

$$\alpha \in \prod_{\omega \in \Omega} M(\omega)$$

таких, что $(\alpha(\omega) \mid A) = (\alpha(\widetilde{\omega}) \mid A)$ $\forall \omega \in \Omega$ $\forall A \in \mathcal{X}$ $\forall \widetilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A)$. При $\alpha \in \mathbf{n}$ отображение $\omega \longmapsto \{\alpha(\omega)\} : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ есть элемент $\mathbb{N}_0$. Из теоремы 5.1 имеем следствие: если $(M \in \mathbb{K}^\Omega) \vee (M \in \mathcal{K}^\Omega)$, то для того чтобы $\mathbf{n} \neq \emptyset$, необходимо равенство $(\mathrm{Dom})[\mathbb{M}_\infty] = \Omega$. В связи с вопросом о достаточности последнего условия в конкретных версиях рассматриваемой постановки см. [28].

Литература

1. Ченцов А.Г. *О структуре одной игровой задачи сближения* // ДАН СССР. – 1975. – Т. 224. – № 6. – С. 1272–1275.
2. Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 1. – С. 73–76.
3. Ченцов А.Г. *Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения.* – Ин-т матем и механ. Уральск. науч. центра АН СССР. – Свердловск, 1979. – 102 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
5. Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
8. Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения с информационной памятью* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 306–308.

9. Ченцов А.Г. *О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций.* I. – Ин-т матем и механ. Уральск. науч. центра АН СССР. – Свердловск, 1980. – 59 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.12.80, № 5272-80.
10. Ченцов А.Г. *О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций.* II. – Ин-т матем и механ. Уральск. науч. центра АН СССР. – Свердловск, 1980. – 55 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.12.80, № 5406-80.
11. Дятлов В.П., Ченцов А.Г. *Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления* // Кибернетика. – 1987. – № 2. – С. 92–99.
12. Ченцов А.Г. *О задаче управления с ограниченным числом переключений.* – Уральск. политехн. ин-т. – Свердловск, 1987. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.07.87, № 4942-В87.
13. Рольщиков В.Е., Ченцов А.Г. *Некоторые свойства монотонных операторов и их применение в задачах маршрутизации.* – Уральск. политехн. ин-т. – Екатеринбург, 1992. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.12.92, № 3409-В92.
14. Мальцев А.П., Рольщиков В.Е., Ченцов А.Г. *К вопросу об оптимальной маршрутизации в условиях неаддитивной функции затрат* // Маршрутно-распределительные задачи. – Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 1995. – С. 54–63.
15. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Итерационная процедура для построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348. – № 6. – С. 736–739.
16. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
17. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 232 с.
18. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 322 p.
19. Данфорд Н.,Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* Ч. 1. – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
20. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981 – 431 с.
21. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
22. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* – М.: Высш. школа, 1979. – 336 с.
23. Куратовский К. *Топология.* Т. I. – М.: Мир, 1966. – 786 с.
24. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 622 с.
25. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // J. Optimiz. Theory Appl. – 1969. – V. 3. – № 3. – P. 153–163.
26. Krasovskii N.N., Chentsov A.G. *On the designing of differential games.* I // Probl. Control Inform. Theory. – 1977. – V. 6. – №. 5–6. – P. 381–395.
27. Krasovskii N.N., Chentsov A.G. *On the designing of differential games.* II // Probl. Control Inform. Theory. – 1979. – V. 9. – № 1. – P. 3–11.
28. Ченцов А.Г. *Селекторы многозначных квазистратегий в дифференциальных играх.* – Ин-т матем. и механ. Уральск. науч. центра АН СССР. – Свердловск, 1978. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.09.78, № 3101-78.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
05.08.1997