ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 512.534:510.227

В.А. КОЛМЫКОВ

О СООТНОШЕНИИ КОММУТАТИВНОСТИ В ПОЛУГРУППАХ ИНЪЕКЦИЙ

Введение. Со всяким множеством M связана полугруппа $\mathcal{I}(M)$, состоящая из всевозможных частичных инъективных преобразований множества M. Она называется симметрической инверсной полугруппой. В ней имеется важная подполугруппа $I(M)$, состоящая из всевозможных инъекций $M \to M$.

Полугруппа $\mathcal{I}(M)$ в теории инверсных полугрупп играет роль, аналогичную роли симметрической группы $S(M)$ в теории групп, т. е. является универсальной представляющей (теорема Вагнера — аналог теоремы Кэли).

Несмотря на достаточное исследование инверсных полугрупп (см. [1]–[3]; [4], гл. 4; [5] и [6]), некоторые свойства полугруппы $\mathcal{I}(M)$ и ее подполугрупп еще не выявлены. Например, автором обнаружено, что в случае несчетности множества M полугруппы $\mathcal{I}(M)$ и $I(M)$ обладают свойством, которое коротко можно охарактеризовать как *сбалансированность коммутативности.*

1. Формулировка результата. Частичным преобразованием множества M называется всякое отображение $f : L \to M$, где L — подмножество в M, называемое областью определения $D(f)$ частичного преобразования f.

Если $A \subseteq M$, то через e_A обозначается частичное преобразование множества M, определенное следующим образом: $D(e_A) = A$ и $e_A(x) = x$ для любого $x \in A$. Частичное преобразование $e_{M\setminus A}$ обозначается через 0_A.

Частичное преобразование f множества M называется частичным инъективным преобразованием множества M, если соответствующее отображение $D(f) \to M$ инъективно.

Частичные инъективные преобразования множества M образуют (относительно операции суперпозиции) полугруппу $\mathcal{I}(M)$. Элемент e_M (соответственно 0_M) этой полугруппы является единичным (соответственно нулевым) элементом.

Полугруппу назовем сбалансированной, если для любого ее неединичного и ненулевого элемента a множество элементов, коммутирующих с a, равномощно множеству элементов, не коммутирующих с a.

Теорема. *Пусть множество M бесконечно. Полугруппы $\mathcal{I}(M)$ и $I(M)$ не сбалансированы тогда и только тогда, когда множество M счетно.*

2. Доказательство теоремы. Так как множество M бесконечно, то $|\mathcal{I}(M)| = |I(M)| = |M|^{|M|} = 2^{|M|}$. Если F — полугруппа и $f \in F$, то через $C_F(f)$ обозначается централизатор элемента f в полугруппе F.

Полугруппы $\mathcal{I}(\mathbf{Z})$ и $I(\mathbf{Z})$ континуальны. Предъявим элемент со счетным централизатором.

Пусть $\sigma : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ таково, что $\sigma(n) \equiv n+1$. Опишем централизатор элемента σ в более широкой полугруппе $\mathcal{PT}(\mathbf{Z})$ всех частичных преобразований множества $\mathbf{Z}$. Покажем, что $C_{\mathcal{PT}(\mathbf{Z})}(\sigma) = \{\sigma^k\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{0_\mathbf{Z}\}$. Пусть $f \in C_{\mathcal{PT}(\mathbf{Z})}(\sigma)$. Если $n_0 \in D(f)$, то $\sigma^{\pm1}(f(n_0)) = f(\sigma^{\pm1}(n_0)) = f(n_0 \pm 1)$, поэтому $n_0 \pm 1 \in D(f)$, т. е. $D(f) = \mathbf{Z}$. Далее имеем $f(n) = f(\sigma^n(0)) = \sigma^n(f(0)) = \sigma^{f(0)}(n)$.

Обратное следует из лемм 4 и 5 ниже, для обоснования которых введем некоторые понятия и докажем три леммы.

Областью значений частичного преобразования f множества M называется множество $E(f) = f(D(f))$. Положим $DE(f) = D(f) \cup E(f)$, $f^0(x) = x$ для любого $x \in d(f)$.

На множестве $DE(f)$ введем отношение эквивалентности следующим образом: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа k_1 и k_2 такие, что $f^{k_1}(x_1) = f^{k_2}(x_2)$. Это отношение эквивалентности, для которого $x \sim f(x)$ для любого $x \in DE(f)$.

Если $f \in \mathcal{I}(M)$, то описание введенного отношения эквивалентности можно переформулировать иначе: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда существует неотрицательное целое число k такое, что $f^k(x_1) = x_2$ или $x_1 = f^k(x_2)$.

Если $f \in \mathcal{I}(M)$ и $n \in \mathbf{N}$, то выражение $(f^n)^{-1}(x)$ либо не определено, либо определено однозначно (т. е. является некоторым однозначно определенным элементом). В последнем случае этот элемент обозначается $f^{-n}(x)$. Кроме того, для любого $x \in D(f)$ имеем $f^0(x) = x$. Таким образом, если $f \in \mathcal{I}(M)$, $x \in M$ и $n \in \mathbf{Z}$, то выражение $f^n(x)$ либо не определено, либо определено однозначно.

Теперь еще более упростим описание введенного отношения эквивалентности в случае, если $f \in \mathcal{I}(M)$. Имеем $x' \sim x$ тогда и только тогда, когда $x' = f^k(x)$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$.

Множество всех классов эквивалентности рассматриваемого отношения обозначим через $U(f)$.

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{I}(M)$ и множество $DE(f)$ несчетно, то $|U(f)| = |DE(f)|$.*

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{I}(M)$, то каждый класс эквивалентности $\sim$ не более чем счетен. Поэтому $|DE(f)| \le \aleph_0 |U(f)|$. Отсюда следует $|U(f)| > \aleph_0$ (в противном случае было бы $|DE(f)| \le \aleph_0 |U(f)| \le \aleph_0$ — противоречие). Поэтому $|U(f)| \le |DE(f)| \le \aleph_0 |U(f)| = |U(f)|$. $\square$

Если $W \subseteq U(f)$, то положим $\overline{W} = \bigcup\limits_{A \in W} A$.

Лемма 2. *Если $f \in \mathcal{I}(M)$, то $|C_{\mathcal{I}(M)}(f)| \ge 2^{|U(f)|}$.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq U(f)$. Легко проверить, что $e_{\overline{X}} \in C_{\mathcal{I}(M)}(f)$. Кроме того, если $Y \subseteq U(f)$ и $Y \ne X$, то $e_{\overline{Y}} \ne e_{\overline{X}}$. Поэтому $|C_{\mathcal{I}(M)}(f)| \ge 2^{|U(f)|}$. $\square$

Лемма 3. *Если $f \in I(M)$ и множество $U(f)$ бесконечно, то $|C_{I(M)}(f)| \ge 2^{|U(f)|}$.*

Доказательство. Через U_1 обозначим множество одноэлементных классов эквивалентности $\sim$ и положим $U_* = U(f) \setminus U_1$. Пусть $|U_1| = |U(f)|$. Для всякой биекции $\phi : \overline{U}_1 \to \overline{U}_1$ определим отображение $f_\phi : M \to M$ следующим образом:

$$f_\phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{если } x \in \overline{U}_1; \\ f(x), & \text{если } x \notin \overline{U}_1. \end{cases}$$

Очевидно, f_ϕ — инъекция. Легко проверяется, что f_ϕ коммутирует с f. Кроме того, если $\psi : \overline{U}_1 \to \overline{U}_1$ и $\psi \ne \phi$, то $f_\psi \ne f_\phi$. Значит, мощность централизатора $C_{I(M)}(f)$ не меньше мощности множества всевозможных биекций $\overline{U}_1 \to \overline{U}_1$. Поэтому $|C_{I(M)}(f)| \ge 2^{|\overline{U}_1|} = 2^{|U(f)|}$.

Пусть $|U_*| = |U(f)|$. Для всякого подмножества $X \subseteq U_*$ определим отображение $f_X : M \to M$ следующим образом:

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \overline{X}; \\ x, & \text{если } x \notin \overline{X}. \end{cases}$$

Очевидно, f_X — инъекция. Легко проверяется, что f_X коммутирует с f. Кроме того, если $Y \subseteq U_*$ и $Y \ne X$, то $f_Y \ne f_X$. Поэтому $|C_{I(M)}(f)| \ge 2^{|U_*|} = 2^{|U(f)|}$. $\square$

Лемма 4. *Если множество M несчетно, $f \in \mathcal{I}(M)$, $g \in I(M)$, то $|C_{\mathcal{I}(M)}(f)| = |C_{I(M)}(g)| = 2^{|M|}$.*

Доказательство. Пусть $|DE(f)| = |M|$. Тогда утверждение следует из лемм 1 и 2. Пусть $|DE(f)| < |M|$. Тогда $|M \setminus DE(f)| = |M|$. Если $X \subseteq M \setminus DE(f)$, то $e_X \in C_{\mathcal{I}(M)}(f)$. Поэтому $|C_{\mathcal{I}(M)}(f)| \geq 2^{|M|}$.

Утверждение о централизаторе $C_{I(M)}(g)$ следует из лемм 1 и 3. $\square$

Лемма 5. *Если множество M бесконечно и $f \in \mathcal{I}(M) \setminus \{e_M, 0_M\}$, то* $|I(M) \setminus C_{\mathcal{I}(M)}(f)| = 2^{|M|}$.

Доказательство. Пусть $f = e_A$ для некоторого одноэлементного множества $A = \{a\}$ и $b \neq a$. Если $g \in I(M)$ и $g(a) = b$, то $g \notin C_{\mathcal{I}(M)}(f)$. Поэтому $|I(M) \setminus C_{\mathcal{I}(M)}(f)| \geq 2^{|M|}$. Пусть $f \neq e_A$ для любого одноэлементного множества A. Тогда в множестве M существуют b и c такие, что $b \in D(f)$, $f(b) \neq b$, $c \neq b$, $c \neq f(b)$ и $c \neq f^2(b)$ (если $f^2(b)$ не определено, то утверждение $c \neq f^2(b)$ является верным, т. к. выражение c определено). Пусть $g \in I(M)$, $\{b, f(b)\} \subseteq D(g)$, $g(b) = f(b)$ и $g(f(b)) = c$. Тогда $g \notin C_{I(M)}(f)$. Поэтому $|I(M) \setminus C_{\mathcal{I}(M)}(f)| \geq 2^{|M|}$. $\square$

Замечание 1. В [7] рассматривалась полугруппа $\mathcal{T}(M)$ всех преобразований множества M. На несчетное множество M было наложено дополнительное ограничение, связанное с его мощностью. При этом условии было доказано, что для любой инъекции $g : M \to M$ централизатор $C_{\mathcal{T}(M)}(g)$ имеет мощность $2^{|M|}$. Таким образом, утверждение о сбалансированности полугруппы $I(M)$ является существенным усилением теоремы 2 из [7].

Замечание 2. В связи с леммой 5 возникает естественный вопрос: верно ли, что в случае несчетного множества M любая полугруппа S такая, что $I(M) \subseteq S \subseteq \mathcal{I}(M)$, является сбалансированной?

Автор благодарит рецензента за ценные советы и предложения.

Литература

1. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 288 с.
2. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 2. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
3. Petrich M. *Inverse semigroups.* – New York: John Wiley & Sons, 1984. – 674 p.
4. Jurgensen H., Migliorini F., Szep J. *Semigroups.* – Budapest: Akademiai Kiado, 1991. – 121 p.
5. Ганюшкин А.Г., Кормышева Т.В. *О нильпотентных подполугруппах конечной симметрической инверсной полугруппы* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56. – № 3. – С. 29–35.
6. Немировская Н.А. *Теорема Фрухта для инверсных полугрупп* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 61. – № 2. – С. 246–251.
7. Колмыков В.А. *О соотношении коммутативности в симметрической полугруппе* // Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45. – № 5. – С. 1130–1135.

Воронежский государственный университет

Поступили
первый вариант 20.09.2004
окончательный вариант 14.06.2005