Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2015, №9, с. 12–21 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Л.Д. ГОГОЛАДЗЕ, В.Ш. ЦАГАРЕЙШВИЛИ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Аннотация. Рассмотрена абсолютная сходимость кратных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара для функций многих переменных, имеющих частные производные высшего порядка. Показано, что полученные результаты неусиляемы для общих ортонормированных систем.

Ключевые слова: коэфициенты Фурье, система Хаара, частные производные, общие ортонормированные системы.

УДК: 517.521

1. Вспомогательные обозначения и результаты

Элемент s-мерного пространства R^s обозначим через $X=(x_1,...,x_s)$, $H=(h_1,...,h_s)$, ... Через $D_s=[0,1]^s$ обозначим единичный куб из R^s. Если $X=(x_1,\dots,x_s)$ и $H=(h_1,\dots,h_s)$, то $X+H=(x_1+h_1,\dots,x_s+h_s)$. Далее, $\|H\|=\Big(\sum\limits_{k=1}^{s}h_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $B\subset\{1,\dots,s\}=\overline{S}$, через X_B обозначается вектор $(x_1',\dots,x_s')$, где $x_i'=x_i$, если $i\in B$, и $x_i'=0$, если $i\notin B$. Кроме того, $B'=\overline{S}\setminus B$, Π_s — множество всех непустых подмножеств множества $\overline{S}$; $|B|$ означает количество элементов множества $|B|$, а $E=(1,\dots,1)$ — s-мерный вектор, все координаты которого равны единице.

Через $M=(m_1,\dots,m_s)$ и $N=(n_1,\dots,n_s)$ обозначаются точки из R^s с целочисленными координатами, $M\ge N$ означает $m_i\ge n_i$, $i=1,\dots,s$.

Если $B=\{i_1,\dots,i_B\}$, то

$$\sum_{\nu_B=M_B}^{N_B}C_{\nu_B}=\sum_{\nu_{i_1}=m_{i_1}}^{n_{i_1}}\cdots\sum_{\nu_{i_{|B|}}=m_{i_{|B|}}}^{n_{i_{|B|}}}c_{\nu_1\cdots\nu_{|B|}}.$$

Говорят, что $f(X)\in\operatorname{Lip}\alpha$ ($\alpha\in(0,1]$), если при $i=1,\dots,s$

$$\sup_{|t_i|\le h_i}\|f(X+T)-f(X)\|_{C(D_s)}=O(\|H\|^\alpha),$$

где $X\in D_s$, $T\in D_s$, $X+T\in D_s$, $H\in D_s$, а $C(D_s)$ — пространство всех непрерывных на D_s функций с нормой $\|f\|_{C(D_s)}=\max\limits_{X\in D_s}|f(X)|$.

Предположим, что $H_{\{j\}}=(0,\dots,0,h_j,0,\dots,0)$,

$$\Delta_{h_j}(f)=f(X+H_{\{j\}})-f(X),\quad X\in D_s,\quad X+H_{\{j\}}\in D_s,$$

и $\Delta_{h_1\cdots h_s}$ означает повторное применение операций Δ_{h_j}, когда j пробегает множество $\overline{S}$.

Поступила 29.01.2014

Функции Радемахера задаются равенством ([1], с. 22)

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \ \ x \in \left(\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right), \\ -1 & \text{при} \ \ x \in \left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

и $r_n(\frac{i}{2^n}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Функции Хаара определяются так ([1], с. 70): при $m = 2^n + k$ $(1 \leq k < 2^n)$

$$\chi_m(x) = \chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{при} \ \ x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{при} \ \ x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{при} \ \ x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

В точках разрыва функции $\chi_m(x)$ равны полусумме значений этой функции на соседних интервалах данной точки,

$$\chi_1(x) = \chi_0^{(0)}(x) = 1 \quad \text{при} \ \ x \in [0, 1].$$

Функции Радемахера и Хаара s переменных определяются следующим образом:

$$r_N(X) = \prod_{i=1}^{s} r_{n_i}(x_i) \quad \text{и} \quad \chi_N(X) = \prod_{i=1}^{s} \chi_{n_i}(x_i),$$

где $r_{n_i}(x_i)$ и $\chi_{n_i}(x_i)$ — функции Радемахера и Хаара соответственно ([1], сс. 22, 70), $N = (n_1, \ldots, n_s)$ и n_i $(i = 1, \ldots, s)$ — натуральные числа, $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, s$.

Кратные системы Радемахера и Хаара обозначаются $(r_N(X))$ и $(\chi_N(X))$ соответственно.

Известны следующие утверждения.

Теорема A ([2])**.** *Пусть $(f_N(X))$ — последовательность функций на D_s такая, что $\|f_N\|_{L_p(D_s)} < C$ для некоторого $p > 2$ ($C > 0$ не зависит от N). Тогда, если $\sum\limits_{N=E}^{\infty} a_N^2 < +\infty$, то функция $f(X, T) = \sum\limits_{N=E}^{\infty} a_N f_N(X) r_N(T)$ принадлежит $L_p(D_s)$ для почти всех (п. в.) $T \in D_s$.*

В случае одной переменной теорема доказана в работе ([3], с. 298).

Теорема B ([4])**.** *Пусть $(\varphi_N(X))$ — полная в $L_2(D_s)$ ортонормированная система (ОНС), а $(f_N(X))$ — ОНС на D_s. Положим*

$$f(X, T) = \sum_{N=E}^{\infty} a_N f_N(X) r_N(T),$$

где

$$\sum_{N=E}^{\infty} a_N^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{N=E}^{\infty} |a_N|^p = +\infty$$

для некоторого $p \in (0, 2)$ и $X, T \in D_s$. Тогда для п. в. $T \in D_s$ $\sum\limits_{N=E}^{\infty} |\widehat{\varphi}_N(f, T)|^p = +\infty$, где $\widehat{\varphi}_N(f, T) = \int\limits_{D_s} f(X, T) \varphi_N(X)\, dx$.

В [4] теорема доказана в случае, когда размерность пространства $s = 2$. Для многомерного случая она доказывается аналогично.

Известно [5], что для любого $f \in L_{D_1}$ при $n = 1$

$$\widehat{\chi}_1(f) = \int_0^1 f(x)\chi_1(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx, \tag{1}$$

а при $n = 2^m + l$, $1 \le l \le 2^m$, $m = 0, 1, \ldots,$

$$\widehat{\chi}_n(f) = 2^{\frac{m}{2}} \int_{\frac{2l-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2l-1}{2^{m+1}}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right) dx = 2^{\frac{m}{2}} \int_{\frac{2l-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2l-1}{2^{m+1}}} (-1)\Delta_{\frac{1}{2^{m+1}}} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Пусть теперь $f \in L_{D_s}$, $B = \{i_1, \ldots, i_{|B|}\}$, $1 \le |B| \le s$, $n_{i_q} = 2^{m_{i_q}} + l_{i_q}$, $1 \le l_{i_q} \le 2^{m_{i_q}}$, $m_{i_q} = 1, \ldots,$ $q = 1, \ldots, |B|$. Тогда, используя (1) и (2), имеем

$$\widehat{\chi}_{N_B+E_{B'}}(f) = \int_{D_{|B'|}} \prod_{\nu \in B'} \chi_1(x_\nu)\,dx_\nu \otimes$$

$$\otimes \prod_{q=1}^{|B|} 2^{\frac{1}{2}m_{i_q}} \int_{\frac{2l_{i_1}-2}{2^{m_{i_1}+1}}}^{\frac{2l_{i_1}-1}{2^{m_{i_1}+1}}} \cdots \int_{\frac{2l_{i_{|B|}}-2}{2^{m_{i_{|B|}}+1}}}^{\frac{2l_{i_{|B|}}-1}{2^{m_{i_{|B|}}+1}}} (-1)^{|B|} \Delta_{\frac{1}{2^{m_{i_1}+1}} \cdots \frac{1}{2^{m_{i_{|B|}}+1}}} f(x) \prod_{q=1}^{|B|} d(x_{i_q}). \tag{3}$$

Полагая

$$\left(\frac{2l_{i_q} - 2}{2^{m_{i_q}+1}}, \frac{2l_{i_q} - 1}{2^{m_{i_q}+1}}\right) \equiv \delta_{M_{i_q}}^{(l_{i_q})}, \tag{4}$$

$$\prod_{q=1}^{|B|} \delta_{m_{i_q}}^{(l_{i_q})} \equiv \delta_{M_B}^{L_B}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2^{m_q+1}} = h_{m_q}, \quad q = 1, \ldots, |B|, \tag{6}$$

и используя равенство $\int\limits_{D_1} \chi_1(t)\,dt = 1$, из (3)–(6) получим

$$\widehat{\chi}_{N_B+E_{B'}}(f) = (-1)^{|B|} \prod_{q=1}^{|B|} 2^{\frac{1}{2}m_{i_q}} \int_{\delta_{M_B}^{L_B}} \Delta_{h_{m_1}} \cdots \Delta_{h_{m_B}} f(x) \prod_{q=1}^{|B|} d(x_{i_q}). \tag{7}$$

Определение. Будем говорить, что функция $2k$ переменных f принадлежит классу $A_{k,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, если для любого $B \subset \{1, \ldots, 2k\}$, $B = \{i_1, \ldots, i_{|B|}\}$, все частные смешанные производные

$$\frac{\partial^{|B|} f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{|B|}}}$$

непрерывны на D_{2k}, когда $|B| < k$, и принадлежат классу $\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, когда $|B| = k$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $f \in A_{k,\alpha}$, $s = 2k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{N=E}^{\infty} |\widehat{\chi}_N(f)|^{\frac{2k}{2k+\alpha}+\varepsilon} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=1}^{\infty} |\widehat{\chi}_{n_1,\ldots,n_s}(f)|^{\frac{2k}{2k+\alpha}+\varepsilon} < +\infty. \tag{8}$$

Доказательство. 1) Пусть $1 \le |B| \le k$. Поскольку

$$\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f) = \int_0^{h_{i_1}} \cdots \int_0^{h_{i_{|B|}}} \frac{\partial^{|B|} f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{|B|}}} \prod_{q=1}^{|B|} dt_{i_q},$$

то, используя (6), имеем $|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)| \le O\Big(\prod\limits_{q=1}^{|B|} 2^{-m_{i_q}}\Big)$. Отсюда и из (4), (5), (7) получим

$$|\widehat{\chi}_{N_B+E_{B'}}(f)| = O\bigg(\prod_{q=1}^{|B|} 2^{\frac{1}{2}m_{i_q}} \cdot |\delta_{m_{i_q}}^{l_{i_q}}| \cdot 2^{-m_{i_q}}\bigg) = O\bigg(\prod_{q=1}^{|B|} 2^{-\frac{3}{2}m_{i_q}}\bigg).$$

Отсюда, поскольку для любого натурального числа $k \le |B|$ и $\alpha \in (0,1]$ имеем $\frac{3}{2} \cdot \frac{2k}{2k+\alpha} \ge 1$, то

$$\sum_{N_B=2E_B}^{\infty} |\chi_{N_B+E_{B'}} f|^{\frac{2k}{2k+\alpha}+\varepsilon} = O\bigg(\prod_{q=1}^{|B|} \sum_{m_{i_q}=0}^{\infty} \sum_{l_{i_q}=1}^{2^{m_{i_q}}} 2^{-m_{i_q}\left(\frac{3}{2}\,\frac{2k}{2k+\alpha}+\frac{3}{2}\varepsilon\right)}\bigg) =$$

$$= O\bigg(\prod_{q=1}^{|B|} \sum_{m_{i_q}=0}^{\infty} 2^{m_{i_q}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2k}{2k+\alpha}-\frac{3}{2}\varepsilon\right)}\bigg) < \infty. \quad (9)$$

2) Пусть $k < |B| \le 2k$. Для каждого h_{i_j}, $j = k+1, \ldots, |B|$,

$$\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_k} h_{i_j}}(f) = \int_0^{h_{i_1}} \cdots \int_0^{h_{i_k}} \Delta_{h_{i_j}} \frac{\partial^k f(X + T_{\{i_1\cdots i_k\}})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \prod_{q=1}^{k} dt_{i_q}.$$

Отсюда $\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_k} h_{i_j}}(f)\|_{C(D_s)} = O\Big(2^{-\alpha m_{i_j}} \prod\limits_{q=1}^{k} 2^{-m_{i_q}}\Big)$. Поскольку для любого $j = k+1, \ldots, |B|$

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_{2k})} = O\big(\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_k} h_{i_j}}(f)\|_{C(D_{2k})}\big),$$

то из последних двух неравенств имеем

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_{2k})}^{|B|-k} = O\bigg(\prod_{p=k+1}^{|B|} 2^{-\alpha m_{i_p}} \prod_{q=1}^{k} 2^{-m_{i_q}(|B|-k)}\bigg),$$

т. е.

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_{2k})} = O\bigg(\prod_{p=k+1}^{|B|} 2^{-\frac{\alpha m_{i_p}}{|B|-k}} \prod_{q=1}^{k} 2^{-m_{i_q}}\bigg).$$

Аналогично,

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_{2k})} = O\bigg(\prod_{p=1}^{|B|-k} 2^{-\frac{\alpha m_{i_p}}{|B|-k}} \prod_{q=|B|-k+1}^{|B|} 2^{-m_{i_q}}\bigg).$$

Из последних двух неравенств получаем

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_{2k})} = O\bigg(\prod_{p=1}^{|B|-k} 2^{-\frac{1}{2}m_{i_p}\left(\frac{\alpha}{|B|-k}+1\right)} \prod_{\nu=|B|-k+1}^{k} 2^{-m_{i_\nu}} \prod_{q=k+1}^{|B|} 2^{-\frac{1}{2}m_{i_p}\left(\frac{\alpha}{|B|-k}+1\right)}\bigg).$$

Ввиду того, что $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{|B|-k}+1\right) \le 1$,

$$\|\Delta_{h_{i_1}\cdots h_{i_{|B|}}}(f)\|_{C(D_k)} = O\biggl(\prod_{q=1}^{|B|} 2^{-\frac{1}{2}m_{i_q}\left(\frac{\alpha}{|B|-k}+1\right)}\biggr).$$

Отсюда и из (4), (5), (7) получаем

$$|\widehat{\chi}_{N_B+E_{B'}}(f)| = O\biggl(\prod_{q=1}^{|B|} 2^{\frac{1}{2}m_{i_q}}\cdot 2^{-m_{i_q}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}m_{i_q}\left(\frac{\alpha}{|B|-k}+1\right)}\biggr) =$$

$$= O\biggl(2^{-m_{i_q}\frac{2(|B|-k)+\alpha}{2(|B|-k)}} = O(k)2^{-m_{i_q}\frac{2k+\alpha}{2k}}\biggr).$$

Поэтому

$$\sum_{N_B=2E_B}^{\infty} |\widehat{\chi}_{N_B+E_{B'}}(f)|^{\frac{2k}{2k+\alpha}+\varepsilon} = O\biggl(\prod_{q=1}^{|B|}\sum_{m_{i_q}=0}^{\infty}\sum_{l_{i_q}=1}^{2^{m_{i_q}}} 2^{-m_{i_q}\left(\frac{2k+\alpha}{2k}\cdot\frac{2k}{2k+\alpha}+\varepsilon\frac{2k+\alpha}{2k}\right)}\biggr) =$$

$$= O\biggl(\prod_{q=1}^{|B|}\sum_{m_{i_q}=0}^{\infty} 2^{-m_{i_q}\cdot\frac{2k+\alpha}{2k}\cdot\varepsilon}\biggr) < \infty,$$

т. е. доказана справедливость неравенства (9) и в случае, когда $k < |B| \le 2k$.

Легко видеть, что если $a_N \ge 0$, $N = (n_1, \dots, n_{2k})$, то

$$\sum_{N=E}^{\infty} a_N = a_E + \sum_{B\in\Pi_{2k}}\sum_{N_B=2E}^{\infty} a_{N_B+E_{B'}} \quad (E_0 = (0,\dots,0)). \tag{10}$$

Учитывая, что (см. (1)) $\widehat{\chi}_E(f) = \int\limits_{D_{2k}} f(x)\,dx$, из этого равенства и (9), (10) получаем требуемое. □

Теперь покажем, что теорема 1 не может быть усилена.

Теорема 2. *Пусть $(\varphi_N(X))$ — полная ортонормированная система в $L_2(D_s)$, $s = 2k$. Тогда для любого $\alpha \in (0,1]$ существует функция $f_\alpha(X)$ такая, что все частные производные порядка k принадлежат* $\operatorname{Lip}\alpha$*, однако,*

$$\sum_{N=E}^{\infty} |\widehat{\varphi}_N(f)|^{\frac{s}{s+\alpha}} = +\infty.$$

Доказательство. Положим

$$f_\alpha(X,T) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}2^{-m(s+\alpha)}\prod_{i=1}^{s}\sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1}\cos 2\pi n_i x_i r_{n_i}(t_i), \tag{11}$$

где $r_{n_i}(t_i)$ — функции Радемахера.

Рассмотрим функцию

$$f_\alpha^{(1)}(X,T) = -2\pi\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}2^{-m(s+\alpha)}\sum_{n_1=2^m}^{2^{m+1}-1} n_1\sin 2\pi n_1 x_1 r_{n_1}(t_1)\prod_{i=2}^{s}\sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1}\cos 2\pi n_i x_i r_{n_i}(t_i).$$

Так как ($s \geq 2$)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-2m(s+\alpha)} \cdot 2^m \cdot 2^{2m} \cdot 2^{(s-1)m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(s+2\alpha-2)} < +\infty$$

и

$$\int_0^1 |\cos 2\pi n_i x_i|^p dx_i < 1, \quad \int_0^1 |\sin 2\pi n_1 x_1|^p dx_1 < 1$$

для любого $p > 2$, то в силу теоремы A

$$f_\alpha^{(1)}(X,T) \in L_p(D_s) \ \text{ для любого } \ p > 2, \ \text{ т. е. } \ \int_0^{x_1} f_\alpha^{(1)}(X,T)\, dX = f_\alpha(X,T).$$

Таким образом (см. (11))

$$\frac{\partial f_\alpha(X,T)}{\partial x_1} = f_\alpha^{(1)}(X,T). \tag{12}$$

Пусть

$$f_\alpha^{(2)}(X,T) = -(2\pi)^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} 2^{-m(s+\alpha)} \sum_{n_1=2^m}^{2^{m+1}-1} n_1^2 \cos 2\pi n_1 x_1 r_{n_1}(t_1) \sum_{i=2}^{s} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1} \cos 2\pi n_i x_i r_{n_i}(t_i).$$

Поскольку

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-2m(s+\alpha)} \cdot 2^m \cdot 2^{4m} \cdot 2^{(s-1)m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-(s+2\alpha-4)m} m^{-2} < +\infty$$

при $s \geq 4$, то в силу теоремы A имеем $f_\alpha^{(2)}(X,T) \in L_p(D_s)$, $p \geq 2$, и $\int\limits_0^{x_1} f_\alpha^{(2)}(X,T)\, dX = f_\alpha^{(1)}(X,T)$. Тогда (см. (12)) $\frac{\partial f_\alpha(X,T)}{\partial x_1} \in C(D_s)$ для п. в. $T \in D_s$. Продолжая этот процесс k раз получаем $\frac{\partial^k f(X,T)}{\partial x_1^k} = f_\alpha^{(k)}(X,T)$, где

$$f_\alpha^{(k)}(X,T) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} 2^{-m(s+\alpha)} \sum_{n_1=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{\partial^k \cos 2\pi n_1 x_1}{\partial x_1^k} r_{n_1}(t_1) \prod_{i=2}^{s} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1} \cos 2\pi n_i x_i r_{n_i}(t_i)$$

и $f_\alpha^{(k)}(X,T) \in L_p(D_s)$ для любого $p > 2$, так как ($s = 2k$)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-2m(s+\alpha)} \cdot 2^m \cdot 2^{2km} \cdot 2^{(s-1)m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2\alpha m} \cdot m^{-2} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^{k-1} f_\alpha(X,T)}{\partial x_1^{k-1}} = f_\alpha^{(k-1)}(X,T) \in C(D_s)$$

для п. в. $T \in D_s$.

Теперь покажем, что $f_\alpha^{(k)}(X,T)\in \operatorname{Lip}\alpha$ для всех $T\in G\subset D_s$ и $\mu(G)>0$, где μ — мера Лебега. Действительно, пусть $2^{-N-1}<h_1\le 2^{-N}$ (N — натуральное число), тогда

$$\int_{D_s}|\Delta_{h_1}f_\alpha^{(k)}(X,T)|^2dT\le$$
$$\le 2\int_{D_s}\Bigg|\sum_{m=N}^{\infty}m^{-1}2^{-m(s+\alpha)}\Delta_{h_1}\Bigg(\sum_{n_1=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{\partial^k\cos 2\pi n_1x_1}{\partial x_1^k}r_{n_1}(t_1)\prod_{i=2}^{2^{m+1}-1}\cos 2\pi n_ix_ir_{n_i}(t_i)\Bigg)\Bigg|^2dT+$$
$$+2\int_{D_s}\Bigg|\sum_{m=1}^{N-1}m^{-1}2^{m(s+\alpha)}\Delta_{h_1}\Bigg(\sum_{n_1=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{\partial^k\cos 2\pi n_1x_1}{\partial x_1^k}r_{n_1}(t_1)\times$$
$$\times\prod_{i=2}^{2^{m+1}-1}\cos 2\pi n_ix_ir_{n_i}(t_i)\Bigg)\Bigg|^2dT=I_1+I_2. \quad (13)$$

Оценим слагаемое I_1. Используя неравенство Хинчина [5] и определение Δ_{h_1}, в силу которого $\|\Delta_{h_1}(f)\|_{C(D_s)}\le 2\|f\|_{C(D_s)}$, имеем

$$I_1\le 2\Bigg(\sum_{m=N}^{\infty}m^{-2}2^{-2m(s+\alpha)}\cdot 2^{2km}\cdot 2^{m(s-1)}\cdot 2^m\Bigg)=$$
$$=O\Bigg(\sum_{m=N}^{\infty}m^{-2}2^{-2m\alpha}\Bigg)=O(N^{-2}2^{-2N\alpha})O\Bigg(\frac{h_1^{2\alpha}}{N^2}\Bigg). \quad (14)$$

Затем, так как

$$\Bigg\|\Delta_{h_1}\Bigg(\frac{\partial^k\cos 2\pi n_1x_1}{\partial x_1^k}\Bigg)\Bigg\|_{C(D_s)}=O(n_1^kh_1),$$

применяя еще раз неравенство Хинчина для I_2, получим

$$I_2=O(h_1^2)\Bigg(\sum_{m=1}^{N-1}m^{-2}2^{-2m(s+\alpha)}\cdot 2^{2(k+1)m}\cdot 2^m\cdot 2^{m(s-1)}\Bigg)=$$
$$=O(h_1^2)\Bigg(\sum_{m=1}^{N-1}m^{-2}2^{2(1-\alpha)m}\Bigg)=O(h_1^2)\cdot 2^{2N(1-\alpha)}=O\Bigg(\frac{h_1^{2\alpha}}{N^2}\Bigg).$$

Тогда (13), (14) при $2^{-m-1}<h_i\le 2^{-m}$ ($i=1,\ldots,s$) имеем

$$\int_{D_s}|\Delta_{h_i}f_\alpha^{(k)}(X,T)|^2dT<A\cdot m^{-2}\cdot 2^{-2m\alpha},$$

где $A>0$ не зависит от m. Следовательно, $\int\limits_{D_s}2^{2m\alpha}|\Delta_{h_i}f_\alpha^{(k)}(X,T)|^2dT<A\cdot m^{-2}$.

Через $F_m^{(i)}$ ($i=1,\ldots,s$) обозначим множество тех $T\in D_s$, для каждого из которых найдется хотя бы одна такая точка $X_T\in D_s$, что $2^{2m\alpha}|\Delta_{h_i}f_\alpha^{(k)}(X_T,T)|>m^{-1/2}$. Отсюда следует $\mu(F_m^{(i)})<A\cdot m^{-3/2}$ ($i=1,\ldots,s$), где μ — мера Лебега.

Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Тогда найдется натуральное число m_0 такое, что

$$A\sum_{m=m_0}^{\infty}m^{-3/2}<\frac{\varepsilon}{s}.$$

Если $E_{m_0}^{(i)} = \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} F_m^{(i)}$, то $\mu\big(E_{m_0}^{(i)}\big) = \mu\Big(\bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} F_m^{(i)}\Big) < \frac{\varepsilon}{s}$. Отсюда при $F^{(i)} = D_s \setminus E_{m_0}^{(i)}$ имеем $\mu(F^{(i)}) > 1 - \frac{\varepsilon}{s}$, где $i = 1, \dots, s$.

Если теперь $G = \bigcap\limits_{i=1}^{s} F^{(i)}$, то $\mu(G) > 1 - \varepsilon$. Таким образом, для любого $T \in G$ $(\mu(G) > 0)$ равномерно относительно $X \in D_s$ имеем $(m > m_0)$ $2^{2m\alpha} |\Delta_{h_i} f_\alpha^{(k)}(X,T)|^2 = O(1)$. Откуда

$$|\Delta_{h_i} f_\alpha^{(k)}(X,T)| = O(2^{-m\alpha}).$$

Наконец, в силу непрерывности функции $\Delta_{h_i} f_\alpha^{(k)}(X,T)$ относительно $X \in D_s$ $(i = 1, \dots, s)$ из последнего неравенства получаем $(2^{-m-1} < h_i \le 2^{-m})$

$$|\Delta_{h_i} f_\alpha^{(k)}(X,T)| = O(h_i^{-\alpha}), \quad i = 1, \dots, s,$$

для любого $T \in G$ равномерно относительно $X \in D_s$.

Откуда заключаем, что существует множество $G \subset D_s$ $(\mu(G) > 0)$ такое, что для любого $T \in G$ любая частная производная порядка k функций $f(X,T)$ принадлежит классу $\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Наконец покажем, что выполняется утверждение теоремы 2. Действительно (11),

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big(2^{-m(s+\alpha)} \cdot m^{-1}\big)^{\frac{s}{s+\alpha}} \prod_{i=1}^{s} \sum_{m_i=2^m}^{2^{m+1}-1} 1 > \frac{1}{2^s} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{s}{s+\alpha}} = +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме B имеем, что для п. в. $T \in D_s$ (см. (1))

$$\sum_{N=E}^{\infty} |\widehat{\varphi}_N(f_\alpha, T)|^{\frac{s}{s+\alpha}} = +\infty. \tag{15}$$

Если положим, что $T \in G$, получим $f_\alpha(X,T) \in \operatorname{Lip}\alpha$ и (15) выполняется для функции $f_\alpha(X,T)$.

Теорему 2 доказали для переменной x_1. Однако для других переменных и других частных производных функций $f_\alpha(X,T)$, $T \in G$, доказательство теоремы 2 проводится аналогично. Рассмотрим функцию

$$f_\alpha^{(k_1,\dots,k_l)}(X,T) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} 2^{-m(s+\alpha)} \prod_{i=1}^{l} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{\partial^{k_i} \cos 2\pi n_i x_i}{\partial x_i^{k_i}} r_{n_i}(t_i) \prod_{i=k+1}^{s} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1} \cos 2\pi n_i x_i r_{n_i}(t_i),$$

где $k_1 + \dots + k_l \le k$. Очевидно, $\Big|\frac{\partial^{k_i} \cos 2\pi n_i x_i}{\partial x_i^{k_i}}\Big| \le n_i^{k_i}$, $i = 1, \dots, l$. Следовательно, принимая во внимание, что $\sum\limits_{i=1}^{l} k_i \le k$ и $s - k - l \ge 0$, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} 2^{-2m(s+\alpha)} \prod_{i=1}^{l} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+1}-1} (n_i^{k_i})^2 \prod_{i=k+1}^{s} \sum_{n_i=2^m}^{2^{m+2}-1} 1^2 \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} 2^{-2m(s+\alpha)} \cdot 2^{ml} \cdot 2^{2m\sum_{i=1}^{l} k_i} \cdot 2^{mk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} 2^{-2ms-2m\alpha} \cdot 2^{ml+2mk+mk} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} 2^{-2m\alpha} \cdot 2^{-(s-k-l)m} < +\infty.$$

Отсюда в силу теоремы A имеем $f_\alpha^{(k_1,\dots,k_l)}(X,T)\in L_p(D_s)$ для любого $p>2$. Повторяя вышеприведенные рассуждения при $k_1+\dots+k_l=k$ получим

$$\frac{\partial^k f_\alpha(X,T)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_l^{k_l}}=f_\alpha^{(k_1,\dots,k_l)}(X,T).$$

Наконец, аналогично (14) и (15) получим

$$\frac{\partial^k f_\alpha(X,T)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_l^{k_l}}=f_\alpha^{(k_1,\dots,k_l)}(X,T)\in\operatorname{Lip}\alpha$$

для всех $T\in G$, $\mu(G)>0$. □

Теоремы 1 и 2 являются обобщением соответствующих теорем из работы [4]. Теорема 2 указывает на неусиляемость теоремы 1.

Из теоремы 2 следует, что когда увеличивается размерность пространства, тогда ухудшается абсолютная сходимость рядов Фурье относительно общих полных ОНС, даже для таких функций, которые имеют все непрерывные частные производные порядка $\frac{s}{2}$ и все частные производные порядка $\frac{s}{2}$ принадлежат $\operatorname{Lip}1$.

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать натуральное число $s=2k$ так, что для любой полной ортонормированной системы найдется функция s-переменных $f_0(X)$, все частные производные порядка k которой принадлежат* $\operatorname{Lip}1$*, однако*

$$\sum_{N=E}^{\infty}|\widehat{\chi}_N(f_0)|^{1-\varepsilon}=+\infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 2 существует функция $f_0(X)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 3 и

$$\sum_{N=E}^{\infty}|\widehat{\varphi}_N(f_0)|^{\frac{s}{s+\alpha}}=+\infty. \tag{16}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и число s подберем так, чтобы

$$\frac{s}{s+\alpha}=1-\frac{\alpha}{s+\alpha}>1-\varepsilon.$$

В этом случае из (16) следует $\sum\limits_{N=E}^{\infty}|\widehat{\varphi}_N(f_0)|^{1-\varepsilon}=+\infty$, где $f_0(X)$ имеет все те свойства, которые изложены в теореме 3. □

Литература

[1] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды* (АФС, М., 1999).

[2] Gogoladze L., Tsagareishvili V. *Absolute convergence of multiple Fourier–Haar series*, Georgian Math. J. **21** (1), 69–74 (2014).

[3] Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов* (ГИФМЛ, М., 1958).

[4] Гоголадзе Л., Цагарейшвили В. *Абсолютная сходимость рядов Фурье–Хаара функций двух переменных*, Изв. вузов. Матем., №5, 13–24 (2008).

[5] Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара*, Матем. сб. **63** (3), 356–391 (1964).

Л.Д. Гоголадзе

профессор, департамент математики,
Тбилисский государственный университет,
пр. И. Чавчавадзе, д. 1, г. Тбилиси, 0128, Республика Грузия,

`e-mail:` lgogoladze1@hotmail.com

В.Ш. Цагарейшвили

профессор, департамент математики,
Тбилисский государственный университет,
пр. И. Чавчавадзе, д. 1, г. Тбилиси, 0128, Республика Грузия,

`e-mail:` cagare@ymail.com

L.D. Gogoladze and V.Sh. Tsagareishvili

On absolute convergence of multiple Fourier series

Abstract. We consider absolute convergence of multiple series of Fourier–Haar coefficients for functions of many variables with partial derivatives of higher order. It is shown that the obtained results are best possible for general orthonormal systems.

Keywords: Fourier coefficients, Haar system, partial derivatives, general orthonormal systems.

L.D. Gogoladze

Professor, Department of Mathematics,
Tbilisi State University,
1 *I. Chavchavadze Ave., Tbilisi* 0128, *Republic of Georgia,*

`e-mail:` lgogoladze1@hotmail.com

V.Sh. Tsagareishvili

Professor, Department of Mathematics,
Tbilisi State University,
1 *I. Chavchavadze Ave., Tbilisi* 0128, *Republic of Georgia,*

`e-mail:` cagare@ymail.com