ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.75

М.А. ЧЕШКОВА

РЕЗНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим резную гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n — гиперповерхность, у которой одна линия кривизны геодезическая ([1], с. 374). Гиперповерхность M является $(n-2)$-каналовой, если она есть огибающая 1-параметрического семейства гиперсфер.

Теорема. *Если резная гиперповерхность в E^n $(n-2)$-каналовая, то она локально*
1) *либо гиперповерхность вращения,*
2) *либо трубчатая.*

1. *Основные формулы.* Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^n. Пусть $F(M)$ — R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ — $F(M)$-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), $\chi(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M, ∂ — оператор дифференцирования в E_n и $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса–Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид ([2], с. 36)

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y)n, \quad \partial_X n = -AX,$$

где $A \in T^1_1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\beta \in T^0_2(M)$, $\beta(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма, A — оператор Вейнгартена, ∇ — связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$.

Выполняются уравнения Гаусса–Кодацци

$$\begin{gathered} R(X,Y)Z = \beta(Y,Z)AX - \beta(X,Z)AY, \\ dA(X,Y) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ — тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ — внешний дифференциал поля A в связности ∇.

2. *Доказательство теоремы.* Обозначим через X_i, $i = 1,\dots,n-2, U$ — орты главных направлений оператора A; k_i, $\overline{k}$ — соответствующие главные кривизны гиперповерхности, причем линия кривизны, соответствующая значению $\overline{k}$, — геодезическая. Имеем $\nabla_U U = 0$. Дифференцируя равенства $\langle U, U\rangle = 1$, $\langle X_i, U\rangle = 0$, получим

$$\langle \nabla_U X_i, U\rangle = 0, \quad \langle \nabla_{X_i} U, U\rangle = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} dA(X_i,U) &= \nabla_{X_i} AU - \nabla_U AX_i - A[X_i,U] = \\ &= (X_i\overline{k})U + k\nabla_{X_i}U - (Uk_i)X_i - k_i\nabla_U X_i - A(\nabla_{X_i}U - \nabla_U X_i) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя (2) и приравнивая нулю составляющую при U, получим

$$X_i\overline{k} = 0, \quad i = 1,\dots,n-2. \tag{4}$$

Если гиперповерхность M $(n-2)$-каналовая, то оператор A имеет собственное значение кратности $n-2$ [3]. Возможны следующие случаи.

1. $k_1 = \dots = k_{n-2} = k \neq 0$, $k \neq \overline{k}$. Из $dA(X_i, X_j) = 0$ следует $X_i k = 0$, $i = 1, \dots, n-2$. Определены два распределения: $\Delta(p) = \{X_p \in T_pM : AX_p = kX_p\}$, $\Delta^{\perp}(p) = \{U_p \in T_p : AU_p = \overline{k}U_p\}$. Тогда для $Z_p \in T_pM$ имеем $Z_p = Z_p^{\top} + Z_p^{\perp}$, $Z_p^{\top} \in \Delta$, $Z_p^{\perp} \in \Delta^{\perp}$. Гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер радиуса $|\frac{1}{k}|$, центры которых имеют вид

$$C = r + \frac{1}{k} n,$$

где r — радиус-вектор точки $p \in M$. Покажем, что если выполняется (4), то линия центров (C) — прямая, гиперповерхность M — гиперповерхность вращения. Из (3) имеем $\nabla_X U = hX, \quad h = Uk/(\overline{k} - k)$, $X \in \Delta$. Рассмотрим $R(X,U)U = \nabla_X \nabla_U U - \nabla_U \nabla_X U - \nabla_{[X,U]} U$. Имеем

$$[X,U] = \nabla_X U - \nabla_U X = hX - (\nabla_U X)^{\top}, \quad \nabla_{[X,U]} U = h^2 X - h(\nabla_U X)^{\top}.$$

Итак, получим $R(X,U)U = -(Uh + h^2)X$. С другой стороны, в силу (1) $R(X,U)U = k\overline{k}X$. Отсюда

$$Uh = -k\overline{k} - h^2. \tag{5}$$

Рассмотрим линию центров (C). Дифференцируем вдоль U

$$\partial_U C = U + \left(U \frac{1}{k}\right) n - \frac{\overline{k}}{k} U = \frac{k - \overline{k}}{k^2} t,$$

где $t = kU + hn$ — касательный вектор линии центров. Дифференцируем t вдоль U и, используя (5), получим

$$\partial_U t = (Uk)Y + \overline{k}kn + (Uh)n - h\overline{k}U = -ht.$$

Это означает, что линия центров — прямая, а каналовая гиперповерхность — гиперповерхность вращения.

2. $k_1 = k$, $k_2 = \dots = k_{n-2} = \overline{k} \neq 0$. Гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер радиуса $\left|\frac{1}{\overline{k}}\right|$. Имеем $X_j \overline{k} = 0$, $j = 2, \dots, n-2$, $U\overline{k} = 0$. Используя (4), получим $\overline{k} = \mathrm{const}$. Таким образом, гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер постоянного радиуса, т. е. трубчатая.

Литература

1. Шуликовский В.И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
3. Ведерников В.И. *Гиперповерхности пространства Евклида, огибающие m-параметрическое семейство гиперсфер* // Волжск. матем. сб. – 1966. – Вып. 4. – С. 8–13.

Алтайский государственный университет

Поступила 12.05.1998