ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.763

К.В. СЕМЕНОВ

О ГЕОМЕТРИИ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛОВ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Введение

В данной работе рассматривается геометрия эволюционного уравнения третьего порядка и вопрос о существовании псевдопотенциалов. При рассмотрении вопроса о существовании связности, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения, применяется метод, предложенный в [1] для изучения эволюционных уравнений второго порядка. Полученные результаты обобщают результаты статьи [1] на случай уравнений более высокого порядка.

1. Геометрия эволюционного дифференциального уравнения третьего порядка. Фундаментальный объект

Объектом исследования в данной работе являются дифференциальные уравнения с частными производными третьего порядка

$$u_t = f(t, x^1, \dots, x^n, u, u_j, u_{jk}, u_{jkl}) \quad (j,k,l = 1,\dots,n).$$

Здесь u — неизвестная функция, u_t — ее производная по переменной t, имеющей смысл времени, u_i — частные производные по пространственным переменным; функция f не содержит u_t. Уравнения такого вида носят название эволюционных. Таковым является известное уравнение Кортевега–де Фриза.

Будем полагать, что $(t, x^1, \dots, x^n, u, u_j, u_{jk}, u_{jkl})$ — адаптированные локальные координаты $(n+2)$-мерного расслоения E с (расслоенной) $(n+1)$-мерной базой M; координаты в M — переменные t, $x^1, \dots, x^n$. Допустимые преобразования координат задаются формулами

$$\begin{cases} \widetilde{t} = \varphi^0(t), \\ \widetilde{x}^i = \varphi^i(t, x^1, \dots, x^n), & i = 1,\dots,n, \\ \widetilde{u} = \varphi^{n+1}(t, x^1, \dots, x^n, u). \end{cases} \tag{1а}$$

Выражая t, $x^1, \dots, x^n$, u через $\widetilde{t}$, $\widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n$, $\widetilde{u}$, получим аналогичные формулы

$$\begin{cases} t = \psi^0(\widetilde{t}), \\ x^i = \psi^i(\widetilde{t}, \widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n), & i = 1,\dots,n, \\ u = \psi^{n+1}(\widetilde{t}, \widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n, \widetilde{u}). \end{cases} \tag{1б}$$

Переходя к расслоению J^3E голономных струй третьего порядка расслоения E, наше уравнение запишем в виде

$$\lambda_0 - f(t, x^1, \dots, x^n, u, \lambda_j, \lambda_{jk}, \lambda_{jkl}) = 0. \tag{2}$$

Закон преобразования $\lambda_{\hat{i}}$, $\lambda_{\hat{i}\hat{k}}$, $\lambda_{\hat{i}\hat{k}\hat{l}}$ такой же, как у соответствующих частных производных $u_{\hat{i}}$, $u_{\hat{i}\hat{k}}$, $u_{\hat{i}\hat{k}\hat{l}}$ $(\widehat{i}, \widehat{k}, \widehat{l} = 0,\dots,n)$ сечения расслоенного многообразия, заданного соотношениями

$u=u(t,x^1,\dots,x^n)$. Допустимые преобразования для координаты λ_0 записываются следующим образом:

$$\lambda_0=\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{u}}\frac{d\varphi^0}{dt}\widetilde{\lambda}_0+\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{u}}\frac{d\varphi^j}{dt}\widetilde{\lambda}_j+\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{t}}\frac{d\varphi^0}{dt}+\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{x}^j}\frac{d\varphi^j}{dt}.$$

Нетрудно выписать и допустимые преобразования координат λ_i, λ_{ij}, λ_{ijk}. Анализируя соотношения (1б) и выражения для допустимых преобразований координат λ_i, λ_{ij}, λ_{ijk}, можно заключить, что переменные t, x^i, u, $\lambda_{\hat{j}}$, λ_{ij}, λ_{ijk} могут одновременно рассматриваться и как часть локальных координат многообразия J^3E, и как вся совокупность локальных координат некоторого многообразия $\overline{J}^3E$, которое является фактормногообразием многообразия J^3E.

Ранее [1] уже отмечалось, что уравнение (2), вообще говоря, теряет специальный вид при произвольных преобразованиях координат. Однако возможно указать некоторые дополнительные условия, при которых вид уравнения не меняется. В результате допустимых преобразований уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{u}}\frac{d\varphi^0}{dt}\widetilde{\lambda_0}+\dots-f\Big|_{t=\psi^0(\tilde{t}),\ x^i=\psi^i(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n),\dots}=0.$$

Первоначальный вид уравнения не изменится, если допустимые преобразования удовлетворяют условию

$$\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\widetilde{u}}\frac{d\varphi^0}{dt}=1,$$

что имеет место, например, в случае

$$\begin{cases}t=\widetilde{t}+c,\\ x^i=\varphi^i(t,\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n),\\ u=\widetilde{u}+\psi(t,\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n).\end{cases}\tag{3}$$

Можно утверждать, что задание эволюционного уравнения (2) эквивалентно заданию на многообразии $\overline{J}^3E$ функции вида

$$\lambda_0-f(t,x^i,u,\lambda_j,\lambda_{kl},\lambda_{jkl})$$

при условии дополнительных ограничений (3) на преобразования координат на E.

Пусть $\omega^{\hat{i}}$, ω^{n+1}, ω^{n+1}_{n+1}, ω^0_0, $\omega^i_{\hat{j}}$, $\omega^{n+1}_{j,n+1}$, $\omega^{n+1}_{\hat{j}}$, ω^0_{00}, $\omega^i_{\hat{j}\hat{k}}$, $\omega^{n+1}_{n+1,n+1}$, … и т. д. — симметричные по нижним индексам структурные формы расслоений голономных реперов многообразия E. При этом $\omega^{\hat{i}}$, ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k}$ $(k=1,2,\dots,r)$ — главные формы в расслоении голономных r-струй J^rE. Например,

$$\omega^{\hat{i}}=dx^{\hat{i}}\quad(\omega^0=dt),\quad \omega^{n+1}=du-\lambda_{\hat{i}}dx^{\hat{i}},\quad \omega^{n+1}_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k}=d\lambda_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k}-\lambda_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k\hat{j}}dx^{\hat{j}}$$

— контактные формы.

Структурные уравнения, которым они удовлетворяют, суть

$$\begin{cases}d\omega^0=\omega^0\wedge\omega^0_0,\\ d\omega^i=\omega^0\wedge\omega^i_0+\omega^j\wedge\omega^i_j,\\ d\omega^{n+1}=\omega^0\wedge\omega^{n+1}_0+\omega^j\wedge\omega^{n+1}_j+\omega^{n+1}\wedge\omega^{n+1}_{n+1}\end{cases}\tag{4}$$

и уравнения, получающиеся продолжением (4).

Запишем дифференциал функции

$$\lambda_0-f(t,x^1,\dots,x^n,u,\lambda_j,\lambda_{jk},\lambda_{jkl})$$

(левой части уравнения (2)) в виде

$$d(\lambda_0-f)=\omega^{n+1}_0-F_0\omega^0-F_i\omega^i-F\omega^{n+1}-F^j\omega^{n+1}_j-F^{jk}\omega^{n+1}_{jk}-F^{jkl}\omega^{n+1}_{jkl}.$$

Продолжая это соотношение, получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты F^{jkl}, F^{jk}, F^j, F, F_i, F_0:

$$
\begin{aligned}
dF^{jkl} + F^{mkl}\omega^j_m + F^{jml}\omega^k_m + F^{jkm}\omega^l_m - F^{jkl}\omega^{n+1}_{n+1} &= 0,\\
dF^{jk} + F^{mk}\omega^j_m + F^{jm}\omega^k_m - F^{jk}\omega^{n+1}_{n+1} + \frac{3}{2}F^{uv(j}\omega^{k)}_{uv} - 3F^{jkm}\omega^{n+1}_{m,n+1} &= 0,\\
dF^i + F^m\omega^i_m - F^i\omega^{n+1}_{n+1} - 2F^{im}\omega^{n+1}_{m,n+1} + F^{uv}\omega^i_{uv} + F^{uvw}\omega^i_{uvw} - 3F^{iuv}\omega^{n+1}_{uv,n+1} &= 0,\\
dF - F\omega^{n+1}_{n+1} - F^m\omega^{n+1}_{m,n+1} - F^{uv}\omega^{n+1}_{uv,n+1} - F^{jkl}\omega^{n+1}_{jkl,n+1} &= 0,\\
dF_i + F_l\omega^l_i + F\omega^{n+1}_i + F^l\omega^{n+1}_{il} + F^{lk}\omega^{n+1}_{ilk} + F^{jkl}\omega^{n+1}_{ijkl} &= 0,\\
dF_0 + F_j\omega^j_0 - F\omega^{n+1}_0 + F^j\omega^{n+1}_{0j} + F^{jk}\omega^{n+1}_{0jk} + F^{jkl}\omega^{n+1}_{0jkl} &= 0.
\end{aligned}
$$

Из этих уравнений видно, что указанные коэффициенты являются компонентами поля геометрического объекта, заданного на J^4E . Подобъектами этого объекта служат $\{F^{jkl}, F^{jk}, F^j\}$, $\{F^{jkl}, F^{jk}\}$, $\{F^{jkl}\}$; при этом $\{F^{jkl}\}$ — относительный тензор. Коэффициенты F^i и F^0 входят в фундаментальный объект, поле которого задано на многообразии J^4E. Однако в то же самое время F^i и F^0 являются также компонентами самостоятельного объекта, заданного на многообразии $\overline{J}^4E$, главными формами которого служат $\omega^{\hat{i}}$, ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\hat{j}}$, $\omega^{n+1}_{\hat{j}\hat{k}}$ ... (Это следует из уравнений для F^i и F^0.) $\overline{J}^4E$ является фактормногообразием многообразия J^4E голономных 4-струй сечений расслоенного многообразия E. Следуя [1], *геометрией* дифференциального уравнения (2) будем называть свойства дифференциально-геометрической структуры, определяемой заданием фундаментального объекта.

Из вышеизложенного следует, что геометрия уравнения (2) инвариантна относительно допустимых преобразований локальных координат вида (3). В дальнейшем для каждого сечения $\sigma \subset E$, задаваемого уравнением $u = u(t, x^1, \dots, x^n)$, будем рассматривать его поднятия $\sigma^r \subset J^rE$, задаваемые уравнениями $u = u(t, x^1, \dots, x^n)$, $\lambda_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k} = u_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k}$.

Поднятия $\sigma^{k+1} \subset J^{k+1}E$ сечений $\sigma \subset E$ и только они являются интегральными многообразиями системы уравнений Пфаффа

$$\omega^{n+1} = \omega^{n+1}_{\hat{i}} = \dots = \omega^{n+1}_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k} = 0,$$

где $\omega^{n+1}, \omega^{n+1}_{\hat{i}}, \dots, \omega^{n+1}_{\hat{i}_1\dots\hat{i}_k}$ — контактные формы.

Определение. Будем называть сечение $\sigma \subset E$ обобщенным решением дифференциального уравнения (2), если на поднятии сечения $\sigma^4 \subset J^4E$ дифференциал $d(\lambda_0 - f)$ обращается в нуль.

Решения (2) в собственном смысле содержатся среди обобщенных решений. Имеет место

Лемма 1. *Если в качестве главных форм многообразия выбраны контактные формы, то коэффициенты F_0 и F_i обращаются в нуль на поднятиях $\sigma^4 \subset J^4E$ сечений $\sigma \subset E$ тогда и только тогда, когда сечения $\sigma \subset E$ являются обобщенными решениями.*

Доказательство аналогично случаю уравнений второго порядка, разобранному в [1].

2. Понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны

Вкратце напомним основные идеи, связанные с этим понятием. Ранее достаточно подробные построения приводились в [1].

Над многообразием $\overline{J}^3E$ как над базой можно построить главное расслоение $H(\overline{J}^3E, G)$ с r-параметрической структурной группой Ли G. Структурные формы ω^A $(A = 1, \dots, r)$ этого расслоения удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^A = \frac{1}{2}C^A_{BC}\omega^B \wedge \omega^C + \omega^\delta \wedge \omega^A_\delta,$$

где ω^δ — главные формы многообразия $\overline{J}^3E$. В этом равенстве C^A_{BC} — структурные константы группы G; они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам Якоби

$$C^A_{BC}C^B_{LM}+C^A_{BL}C^B_{MK}+C^A_{BM}C^B_{KL}=0.$$

Рассмотрим связность в главном расслоении $H(\overline{J}^3E,G)$, определенную заданием поля объекта связности с компонентами Γ^A_δ, которые удовлетворяют уравнениям $d\Gamma^A_\delta+C^A_{BC}\Gamma^B_\delta\omega^C-\Gamma^A_\varepsilon\omega^\varepsilon_\delta-\omega^A_\delta=\Gamma^A_{\delta\varepsilon}\omega^\varepsilon$, где формы $\omega^\varepsilon_\delta$ определяются из уравнений $d\omega^\varepsilon=\omega^\delta\wedge\omega^\varepsilon_\delta$. Формы связности имеют вид $\widetilde{\omega}^A=\omega^A+\Gamma^A_\delta\omega^\delta$. Они удовлетворяют структурным уравнениям $d\widetilde{\omega}^A=\frac{1}{2}C^A_{BC}\widetilde{\omega}^B\wedge\widetilde{\omega}^C+\Omega^A$, где $\Omega^A=R^A_{\delta\varepsilon}\omega^\delta\wedge\omega^\varepsilon$ — формы кривизны. Компоненты тензора кривизны имеют вид $R^A_{\delta\varepsilon}=-\frac{1}{2}(\Gamma^A_{[\delta\varepsilon]}+C^A_{BC}\Gamma^B_\delta\Gamma^C_\varepsilon)$.

Можно доказать, что компоненты тензора кривизны вида $R^A_{\hat{k}l}$ являются компонентами тензорного поля, заданного на многообразии $\overline{J}^4E$. Поэтому обращение компонент $R^A_{\hat{k}l}$ в нуль на многообразии $\overline{J}^4E$ либо на каком-то его подмногообразии имеет инвариантный характер.

Будем говорить, что *связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения* (2), если формы кривизны Ω^A обращаются в нуль на поднятиях сечений $\sigma\subset E$ тогда и только тогда, когда сечения $\sigma\subset E$ являются (обобщенными) решениями.

Справедлива

Лемма 2. *Для того чтобы связность, заданная в расслоении $H(\overline{J}^3E,G)$, определяла представление нулевой кривизны, необходимо и достаточно, чтобы компоненты R^A_{kl} и R^A_{0k} обращались в нуль на поднятиях сечений $\sigma\subset E$ тогда и только тогда, когда сечения $\sigma\subset E$ являются (обобщенными) решениями дифференциального уравнения* (2).

Доказательство аналогично случаю уравнения второго порядка, приведенному в [1].

3. Проблема существования связности, определяющей представление нулевой кривизны

Рассмотрим $(N+2)$-мерное $(N>n)$ расслоенное многообразие $\mathcal{E}$ с расслоенной $(N+1)$-мерной базой $\mathcal{M}$ и проекцией π (конструкция аналогична построенной для уравнения (2) в § 1). Пусть $\vartheta^{\hat{I}}$, ϑ^{N+1}, ϑ^0_0, $\vartheta^I_{\hat{J}}$, ϑ^{N+1}_{N+1}, $\vartheta^{N+1}_{\hat{J}}$, $\vartheta^0_{00},\ldots$ — структурные формы расслоения голономных реперов многообразия $\mathcal{E}$ $(I,J=1,\ldots,N;\ \widehat{I},\widehat{J}=0,1,\ldots,N)$. Будем предполагать, что на многообразии $\overline{J}^3E$ задано поле объекта связности с компонентами Γ^I_{JK}, Γ^I_{J0}, Γ^I_{00}, Γ^0_{00}, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} d\Gamma^I_{JK}+\Gamma^M_{JK}\overline{\vartheta}^I_M-\Gamma^I_{MK}\overline{\vartheta}^K_J-\Gamma^I_{JM}\overline{\vartheta}^M_K-\overline{\vartheta}^I_{JK}=0,\\ d\Gamma^I_{J0}+\Gamma^M_{J0}\overline{\vartheta}^I_M-\Gamma^I_{M0}\overline{\vartheta}^M_J-\Gamma^I_{J0}\overline{\vartheta}^0_0-\Gamma^I_{JM}\overline{\vartheta}^M_0-\overline{\vartheta}^I_{J0}=0,\\ d\Gamma^0_{00}-\Gamma^0_{00}\overline{\vartheta}^0_0-\overline{\vartheta}^0_{00}=0,\\ d\Gamma^I_{00}+\Gamma^0_{00}\overline{\vartheta}^I_0+\Gamma^M_{00}\overline{\vartheta}^I_M-2\Gamma^I_{00}\overline{\vartheta}^0_0-2\Gamma^I_{M0}\overline{\vartheta}^M_0-\overline{\vartheta}^I_{00}=0. \end{cases} \tag{5}$$

Формы связности имеют вид

$$\begin{aligned} \theta^I_J&=\vartheta^I_J+\Gamma^I_{J0}\vartheta^0+\Gamma^I_{JK}\vartheta^K,\\ \theta^I_0&=\vartheta^I_0+\Gamma^I_{00}\vartheta^0+\Gamma^I_{J0}\vartheta^J,\\ \theta^0_0&=\vartheta^0_0+\Gamma^0_{00}\vartheta^0. \end{aligned} \tag{6}$$

Построение подобного объекта связности для эволюционных уравнений второго порядка проведено в [2], для уравнений третьего порядка — в [3].

Из уравнений (5) следует, что объект связности содержит подобъект с компонентами Γ^I_{JK}, Γ^I_{J0}. Этому подобъекту сопоставляется связность с формами θ^I_J, которые удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\theta^I_J=\theta^M_J\wedge\theta^J_M+\Omega^I_J,$$

где Ω^I_J — формы кривизны, имеющие вид

$$\Omega^I_J = R^I_{JKL}\vartheta^K \wedge \vartheta^L + 2R^I_{J0K}\vartheta^0 \wedge \vartheta^K + 2R^I_{J\hat{K},N+1}\vartheta^{\hat{K}} \wedge \vartheta^{N+1} + \\ + 2R^{I\hat{L}}_{J\hat{K}}\vartheta^{\hat{K}} \wedge \vartheta^{N+1}_{\hat{L}} + 2R^{ILM}_{J\hat{K}}\vartheta^{\hat{K}} \wedge \vartheta^{N+1}_{LM} + 2R^{ILMN}_{J\hat{K}}\vartheta^{\hat{K}} \wedge \vartheta^{N+1}_{LMN}.$$

В многообразии $\mathcal{E}$ рассмотрим $(n+2)$-мерное подмногообразие Σ, удовлетворяющее условиям

(а) одномерный слой расслоения $\mathcal{E}$, проходящий через текущую точку подмногообразия Σ, содержится в Σ;

(б) проекция $\pi\Sigma$ подмногообразия $\Sigma \subset \mathcal{E}$ является $(n+1)$-мерным подмногообразием базы $\mathcal{M}$.

В этом случае дифференциальные уравнения подмногообразия Σ могут быть записаны в виде

$$\vartheta^\alpha = 0 \quad (\alpha = n+1, \dots, N). \tag{7}$$

Продолжим эти уравнения. В результате будут получены соотношения вида

$$\vartheta^\alpha_{\hat{j}} = \lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}}\vartheta^{\hat{k}}. \tag{8}$$

Коэффициенты $\lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}}$ симметричны по нижним индексам. Зададим систему координат так, чтобы $\Gamma^\alpha_{\hat{j}\hat{k}}$ обращались в нуль на $\Sigma \subset \mathcal{E}$. Рассмотрим суммы $\lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} + \Gamma^\alpha_{\hat{j}\hat{k}}$. Для них составим дифференциальные уравнения вида (5). Из этих уравнений следует, что на подмногообразии $\Sigma \subset \mathcal{E}$ эти суммы являются компонентами тензорного поля, а поэтому можно утверждать, что класс подмногообразий $\Sigma \subset \mathcal{E}$, на которых этот тензор обращается в нуль, выделяется инвариантым образом

$$\lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} + \Gamma^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} = 0. \tag{9}$$

Далее будут рассматриваться только такие Σ, на которых выполнено это условие. На этих подмногообразиях из равенства $\Gamma^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} = 0$ следует, что $\lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} = 0$, поэтому $\theta^\alpha_{\hat{j}} = \vartheta^\alpha_{\hat{j}} = 0$. Уравнения $\vartheta^\alpha_{\hat{j}} = 0$ также можно продолжить, в результате чего придем к соотношениям

$$\vartheta^\alpha_{\hat{j}\hat{k}} = \lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\vartheta^{\hat{l}}.$$

Коэффициенты $\lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$ симметричны по нижним индексам. Процедуру продолжения можно проделать еще раз, в результате будут получены уравнения

$$\vartheta^\alpha_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = \lambda^\alpha_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}\hat{m}}\vartheta^{\hat{m}}.$$

Подмногообразие $\Sigma \subset \mathcal{E}$ можно снабдить оснащением специального типа, задаваемым уравнениями

$$\vartheta^i_\alpha = \vartheta^{N+1}_\alpha = \vartheta^{N+1}_{\hat{j}\alpha} = \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta} = \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta\gamma} = 0(\operatorname{mod}\vartheta^\delta_\Sigma), \tag{10}$$

где ϑ^δ_Σ — главные формы многообразия $\overline{J}^3\Sigma$. Построение оснащения проводится по схеме из [1]. В силу (10) и (7) структурные уравнения для форм связности θ^i_j имеют вид

$$d\theta^i_j = \theta^m_j \wedge \theta^i_m + r^i_{jkl}\vartheta^k \wedge \vartheta^l + 2r^i_{j\hat{k},N+1}\vartheta^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1} + 2r^{i\hat{l}}_{j\hat{k}}\vartheta^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{\hat{l}} + \\ + 2r^{ilm}_{j\hat{k}}\vartheta^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{lm} + 2r^{ilmn}_{j\hat{k}}\vartheta^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{lmn}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 3. *Если подмногообразие $\Sigma \subset \mathcal{E}$ удовлетворяет условиям* (а), (б) *и* (9) *и снабжено оснащением, задаваемым уравнениями* (10), *то задана индуцированная этим оснащением связность в главном расслоенном пространстве $H(\overline{J}^3\Sigma, Gl(n))$ с формами связности θ^i_j.*

Пусть E – расслоение общего типа над базой M (см. § 1). Установим диффеоморфизм между расслоениями струй над многообразиями E и Σ, при котором совпадают соответствующие главные формы многообразий $\overline{J}^4 E$ и $\overline{J}^4 \Sigma$:

$$\omega^{\hat{i}} = \vartheta^{\hat{i}}, \ \ \omega^{n+1} = \vartheta^{N+1}, \ \ \omega^{n+1}_{\hat{j}} = \vartheta^{N+1}_{\hat{j}}, \ \ \omega^{n+1}_{\hat{j}\hat{k}} = \vartheta^{N+1}_{\hat{j}\hat{k}}, \tag{11}$$
$$\omega^{n+1}_{0jk} = \vartheta^{N+1}_{0jk} + \lambda^{\alpha}_{0jk}\vartheta^{N+1}_{\alpha}, \ \ \omega^{n+1}_{jkl} = \vartheta^{N+1}_{jkl} + \lambda^{\alpha}_{jkl}\vartheta^{N+1}_{\alpha}, \ \ \omega^{n+1}_{jklm} = \vartheta^{N+1}_{jklm} + \lambda^{\alpha}_{jklm}\vartheta^{N+1}_{\alpha}.$$

Эти уравнения могут также быть продолжены. В результате будут получены новые уравнения, среди которых, в частности, будут следующие:

$$\omega^0_0 = \vartheta^0_0, \ \ \omega^i_0 = \vartheta^i_0, \ \ \omega^i_j = \vartheta^i_j. \tag{12}$$

В силу (11) и (12) дифференциальные уравнения для коэффициентов F^0 и F^i, которые содержатся среди компонент фундаментального объекта, определяющего геометрию уравнения (2), становятся уравнениями компонент объекта, определенного на многообразии $\overline{J}^4\Sigma$. Поэтому при установлении диффеоморфизма между расслоениями струй над E и Σ происходит перенос объекта с компонентами F^0 и F^i с одного многообразия на другое. Аналогичное замечание справедливо относительно произвольного тензора с компонентами T^i_{jk}, T^I_{j0}, поле которого задано на многообразии $\overline{J^4}\Sigma$, а компоненты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} dT^i_{jk} + T^m_{jk}\overline{\omega}^i_m - T^i_{mk}\overline{\omega}^m_j - T^i_{jm}\overline{\omega}^m_k = 0, \\ dT^i_{j0} + T^m_{j0}\overline{\omega}^i_m - T^i_{m0}\overline{\omega}^m_j - T^i_{j0}\overline{\omega}^0_0 - T^i_{jm}\overline{\omega}^m_0 = 0, \end{cases}$$

а также относительно тензора с компонентами

$$r^i_{jkl} = T^i_{j[k}F_{l]}, \quad r^i_{j0k} = T^i_{j[0}F_{k]}. \tag{13}$$

Возникает задача: задать оснащение подмногообразия $\Sigma \subset \mathcal{E}$ уравнениями

$$\vartheta^i_{\alpha} = \vartheta^{N+1}_{\alpha} = \vartheta^{N+1}_{\hat{j}\alpha} = \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta} = \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta\gamma} = 0 (\operatorname{mod} \vartheta^{\delta}_{\Sigma})$$

так, чтобы разложения для $d\theta^i_j$ имели бы вид (с учетом (13))

$$d\theta^i_j = \theta^m_j \wedge \theta^i_m + r^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + 2r^i_{j0k}\omega^0 \wedge \omega^k + 2y^i_{j\hat{k},n+1}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1} + 2y^{i\hat{l}}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{\hat{l}} +$$
$$+ 2y^{ilm}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{lm} + 2y^{ilmn}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{lmn}.$$

Составим систему дифференциальных уравнений задачи. Для этого с учетом (7), (11) и (12) выпишем структурные уравнения для форм θ^i_j, содержащихся среди форм связности (6), после чего вычтем их из соответствующих уравнений (13). Таким образом, получится система дифференциальных уравнений вида

$$R^{i\alpha}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{\alpha} + R^{il\alpha}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta} + R^{i\alpha\beta\gamma}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \vartheta^{N+1}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\rho^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + \rho^i_{j0k}\omega^0 \wedge \omega^k +$$
$$+ \chi^i_{j\hat{k},n+1}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1} + \chi^{i\hat{l}}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{\hat{l}} + \chi^{ilm}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{lm} + \chi^{ilmn}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}} \wedge \omega^{n+1}_{lmn}, \tag{14}$$

где

$$\rho^i_{jkl} = r^i_{jkl} - R^i_{jkl}, \qquad \rho^i_{j0k} = r^i_{j0k} - R^i_{j0k},$$
$$\chi^i_{j\hat{k},n+1} = y^i_{j\hat{k},n+1} - R^i_{j\hat{k},n+1}, \qquad \chi^{i\hat{l}}_{j\hat{k}} = y^{i\hat{l}}_{j\hat{k}} - R^{i\hat{l}}_{j\hat{k}},$$
$$\chi^{ilm}_{j\hat{k}} = y^{ilm}_{j\hat{k}} - R^{ilm}_{j\hat{k}}, \qquad \chi^{ilmn}_{j\hat{k}} = y^{ilmn}_{j\hat{k}} - R^{ilmn}_{j\hat{k}}.$$

При этом коэффициенты ρ^i_{jkl}, ρ^i_{j0k} заданы заранее, а $\chi^i_{j\hat{k},n+1}$, $\chi^{il}_{j\hat{k}}$, $\chi^{ilm}_{j\hat{k}}$, $\chi^{ilmn}_{j\hat{k}}$ — неизвестные функции. Если будет доказана совместность системы (14), то таким образом будет доказано существование представления нулевой кривизны для уравнения (2). Подвергая уравнения (14) внешнему дифференцированию и присоединяя полученные уравнения к исходным, получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений задачи.

Для исследования совместности системы используется метод Кэлера ([4], с. 207). В случае $n = 1$ выясняется, что совместность имеет место, если компоненты объекта связности Γ^I_{JK}, Γ^I_{J0} выбраны так, что тензор кривизны связности на многообразии $\Sigma \subset \mathcal{E}$ удовлетворяют условиям

a) можно указать наборы чисел: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$, $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4$ такие, что

$$\begin{vmatrix} R^{1\beta_1\alpha_1\gamma_1}_{10} & R^{1\beta_2\alpha_1\gamma_1}_{10} & R^{1\beta_3\alpha_1\gamma_1}_{10} & R^{1\beta_4\alpha_1\gamma_1}_{10} \\ R^{1\beta_1\alpha_2\gamma_2}_{10} & R^{1\beta_2\alpha_2\gamma_2}_{10} & R^{1\beta_3\alpha_2\gamma_2}_{10} & R^{1\beta_4\alpha_2\gamma_2}_{10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R^{1\beta_1\alpha_4\gamma_4}_{10} & R^{1\beta_2\alpha_4\gamma_4}_{10} & R^{1\beta_3\alpha_4\gamma_4}_{10} & R^{1\beta_4\alpha_4\gamma_4}_{10} \end{vmatrix} \neq 0;$$

b) можно указать компоненты $R^{1\lambda_1\mu_1\gamma_1}_{10}$, $R^{1\lambda_2\mu_2\gamma_2}_{10}$, $R^{1\lambda_1\mu_1\gamma_1}_{11}$, $R^{1\lambda_2\mu_2\gamma_2}_{11}$, удовлетворяющие условию

$$\begin{vmatrix} R^{1\lambda_1\mu_1\gamma_1}_{10} & R^{1\lambda_2\mu_2\gamma_2}_{10} \\ R^{1\lambda_1\mu_1\gamma_1}_{11} & R^{1\lambda_2\mu_2\gamma_2}_{11} \end{vmatrix} \neq 0;$$

c) можно указать числа λ_i, μ_i, γ_k, θ_l $(i, j, k, l = 1, \dots, 6)$ такие, что выполняется

$$\begin{vmatrix} R^{\gamma_1\lambda_1\mu_1\theta_1}_{11} & \dots & R^{\gamma_6\lambda_1\mu_1\theta_1}_{11} \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ R^{\gamma_1\lambda_6\mu_6\theta_6}_{11} & \dots & R^{\gamma_6\lambda_6\mu_6\theta_6}_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, имеет место

Теорема. *Пусть*

1) *задано эволюционное дифференциальное уравнение третьего порядка* (2);
2) *на многообразии* $\overline{J}^3\varepsilon$, *где* ε — $(N+2)$*-мерное* $(N > n)$ *расслоенное многообразие с* $(N+1)$*-мерной расслоенной базой, задано поле объекта связности с компонентами* Γ^I_{JK}, Γ^I_{J0}, Γ^I_{00}, Γ^0_{00}, *удовлетворяющими дифференциальным уравнениям* (6);
3) *в многообразии* ε *задано* $(n+2)$*-мерное подмногообразие* $\Sigma \subset \varepsilon$, *удовлетворяющее условиям* (а), (б) *и* (8);
4) *между расслоениями струй над многообразиями* Σ *и* ε *установлен диффеоморфизм, при котором совпадают главные формы в* $\overline{J}^4\varepsilon$ *и* $\overline{J}^4\Sigma$.

Тогда в случае $n = 1$ *при выполнении условий* a), b), c) *можно найти такое оснащение подмногообразия* Σ, *что индуцируемая им связность будет определять представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения* (2).

Замечание. Связность с компонентами Γ^I_{JK}, Γ^I_{J0}, Γ^I_{00}, Γ^0_{00} выбирается произвольно, поэтому ее всегда можно выбрать так, чтобы выполнялись условия a), b), c). Следовательно, представление нулевой кривизны существует для любого эволюционного уравнения третьего порядка с одной пространственной переменной.

Данное утверждение может быть использовано при решении вопроса о существовании законов сохранения для дифференциального уравнения третьего порядка.

4. Псевдопотенциалы и законы сохранения

Впервые понятие псевдопотенциала появилось в работах Ф. Эстабрука и Х. Уолквиста [5] и [6]. Подробный анализ связи псевдопотенциалов и законов сохранения со связностями, определяющими представление нулевой кривизны, содержится в [1]. Напомним основные идеи. Пусть задано эволюционное дифференциальное уравнение третьего порядка. Законы сохранения, ассоциированные с уравнением, задаются системой 1-форм θ^I вида

$$\theta^I = dX^I + F^I dt + G^I dx, \quad I, J = 1, \ldots, N,$$

где X^I — некоторые переменные, а x — единственная пространственная переменная. Функции F^I и G^I зависят от переменных $X^1, \ldots, X^N$, t, x, неизвестной функции u и частных производных функции u по x. В работе [4] из соображений простоты построений рассматривались функции F^I и G^I, которые не зависят от t и x; при этом

$$\theta^I = dX^I + F(u, \lambda_1, \lambda_{11}, X^I)dt + G^I(u, \lambda_1, \lambda_{11}, X^I)dx.$$

Если система дифференциальных форм θ^I вполне интегрируема, тогда на каждом решении $X^I = X^I(x,t)$ системы $\theta^I|_\sigma = 0$ функции F^I и G^I удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial G^I}{\partial t} - \frac{\partial F^I}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Если известны N форм θ^I (N законов сохранения в смысле Уолквиста и Эстабрука), то можно найти N уравнений такого вида. В том случае, когда F^I и G^I зависят от переменных X^I линейно, уравнения (15) принимают классический вид законов сохранения. Уолквист и Эстабрук называли переменные X^I *псевдопотенциалами.*

Следуя [1], можно доказать

Предложение. *Если в главном расслоении $H(\overline{J}^3E, G)$ задана связность, определяющая представление нулевой кривизны, ассоциированное с дифференциальным уравнением* (2), *и выбрано сечение, то любому присоединенному расслоению $F(H(\overline{J}^3E, G))$ соответствует серия законов сохранения.*

Замечание. Принимая во внимание утверждение теоремы предыдущего параграфа, можно сделать вывод, что для любого эволюционного уравнения третьего порядка с одной пространственной переменной можно построить бесконечно много законов сохранения.

Есть все основания предполагать, что метод, использованный впервые в [1] при доказательстве теоремы существования связности, определяющей представление нулевой кривизны для эволюционного уравнения второго порядка, примененный в данной статье к эволюционному уравнению третьего порядка, может быть успешно использован при рассмотрении уравнений в частных производных произвольного типа более высоких порядков.

Литература

1. Рыбников А.К. *О геометрии псевдопотенциалов эволюционных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 55–67.
2. Рыбников А.К. *О геометрии эволюционного уравнения второго порядка* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1994. – № 2. – С. 79–85.
3. Семенов К.В. *О геометрии эволюционного уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 67–74.
4. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
5. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. *Prolongation structures of nonlinear evolution equations* // J. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – № 1. – P. 1–7.
6. Estabrook F.B., Wahlquist H.D. *Prolongation structures of nonlinear evolution equations* // J. Math. Phys. – 1976. – V. 17. – № 7. – P. 1293–1297.

Московский государственный университет

Поступила
10.09.1999