ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.753

Л.А. МАСАЛЬЦЕВ

ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКИМИ ЛИНИЯМИ КРИВИЗНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В евклидовом пространстве R^3 известно несколько классов поверхностей с плоскими линиями кривизны: поверхности вращения, резные поверхности, поверхности Иоахимсталя и другие. В данной статье предлагается конструкция поверхностей в пространстве Лобачевского H^3, аналогичных по своим свойствам поверхностям Иоахимсталя, т. е. дано описание класса поверхностей, одно семейство линий кривизны которых лежит во вполне-геодезических плоскостях, содержащих общую геодезическую пространства H^3. Затем рассмотрены поверхности постоянной средней кривизны без омбилических точек с одним семейством плоских линий кривизны. Если минимальная поверхность в R^3 имеет одно семейство плоских линий кривизны, то и другое семейство также является плоским. В евклидовом пространстве такими поверхностями являются катеноид, минимальная поверхность Эннепера и однопараметрическое семейство поверхностей Бонне ([1], с. 544). Г. Венте ([2], теорема 5.5, с. 54) доказал, что в пространстве Лобачевского в классе минимальных поверхностей подобным свойством "планарности" одного семейства плоских линий кривизны обладают только поверхности вращения. В данной статье показано, что в классе поверхностей постоянной средней кривизны в H^3 без омбилических точек только поверхности вращения (гиперболические поверхности Делоне) имеют одно семейство плоских линий кривизны.

1. Рассмотрим модель геометрии Лобачевского в интерпретации Пуанкаре в верхнем полупространстве R^3_+ с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$. Определим поверхность Иоахимсталя в H^3 как поверхность, у которой каждая линия кривизны из одного семейства лежит в некоторой вполне-геодезической плоскости, причем все данные плоскости проходят через фиксированную прямую в H^3. Возьмем в качестве такой оси прямую $l(0,0,z)$. Как известно ([1], с. 512; [3], с .378), в евклидовом пространстве поверхности Иоахимсталя состоят из множества ортогональных траекторий семейства сфер переменного радиуса с центрами на фиксированной оси l. По аналогии с евклидовым случаем решим сначала задачу о нахождении двупараметрического множества ортогональных траекторий к семейству сфер с центрами на фиксированной оси, а затем выделим из него класс поверхностей Иоахимсталя. Как известно ([4], с. 37), сфера в пространстве Лобачевского с центром в точке $(0,0,s)$ гиперболического радиуса $R(s)$ имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + (z - s\operatorname{ch} R(s))^2 = s^2 \operatorname{sh}^2 R(s).$$

Лемма 1. *Двупараметрическое семейство ортогональных траекторий к множеству сфер переменного радиуса $R(s)$ с центрами $(0,0,s)$ на оси l имеет вид*

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{ch}\tau(s)\sqrt{1+c_1^2}}, \quad y(s) = \frac{c_1}{\operatorname{ch}\tau(s)\sqrt{1+c_1^2}},$$
$$z(s) = -\operatorname{th}\tau(s), \quad \textit{где} \;\; \tau(s) = \int \frac{(s\operatorname{ch} R(s))'}{s\operatorname{sh} R(s)} ds + c_2 \quad (c_1,\ c_2 \text{ — const}).$$

Доказательство. Обозначим через $(x(s), y(s), z(s))$ координаты единичного вектора, направленного из точки $(0, 0, s \operatorname{ch} R(s))$ в точку пересечения ортогональной траектории со сферой радиуса $R(s)$. Уравнение ортогональной траектории можно записать в виде

$$\overline{r}(s) = (s \operatorname{sh} R(s) x(s), s \operatorname{sh} R(s) y(s), s \operatorname{sh} R(s) z(s) + s \operatorname{ch} R(s)),$$

где $x^2(s) + y^2(s) + z^2(s) = 1$. Поскольку данная модель H^3 конформно-евклидова, то отыскание ортогональной траектории приводит к уравнению $\frac{d\overline{r}}{ds} = \lambda(s)(x, y, z)$, где $\lambda(s)$ — некоторый ненулевой множитель. Отсюда получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$

$$\frac{(s \operatorname{sh} R(s) x)'}{x} = \frac{(s \operatorname{sh} R(s) y)'}{y} = \frac{(s \operatorname{sh} R(s) z + s \operatorname{ch} R(s))'}{z}.$$

Из первого уравнения следует, что $y = c_1 x$, где c_1 — некоторая постоянная. Геометрически это означает, что искомая траектория лежит во вполне-геодезической плоскости, содержащей ось l. Поскольку $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то отсюда определяем

$$x^2 = \frac{1 - z^2}{1 + c_1^2}. \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{(s \operatorname{sh} R x)'}{x} = \frac{(s \operatorname{sh} R z + s \operatorname{ch} R)'}{z}. \tag{2}$$

После упрощения получим

$$\frac{x' s \operatorname{sh} R}{x} = \frac{s \operatorname{sh} R z' + (s \operatorname{ch} R)'}{z}.$$

Продифференцируем уравнение (1) и разделим результат на $2x^2$. Получим

$$\frac{x'}{x} = -\frac{z z'}{1 - z^2}.$$

Подставим в уравнение (2) и придем к уравнению на функцию $z(s)$

$$\frac{z'}{z^2 - 1} = \frac{(s \operatorname{ch} R)'}{s \operatorname{sh} R}.$$

Интегрируя его (с учетом того, что $|z| < 1$), получим

$$z(s) = -\operatorname{th} \tau(s), \quad \text{где} \quad \tau(s) = \int \frac{(s \operatorname{ch} R(s))'}{s \operatorname{sh} R(s)} ds + c_2.$$

Затем находим

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{ch} \tau \sqrt{1 + c_1^2}}, \quad y(s) = \frac{c_1}{\operatorname{ch} \tau \sqrt{1 + c_1^2}}. \quad \square$$

Найденное множество ортогональных траекторий зависит от двух произвольных постоянных c_1, c_2. Если связать их между собой, положив $c_1 = \operatorname{tg} t$, $c_2 = T(t)$, где $T(t)$ — произвольная функция от t, то получим следующие уравнения поверхности Иоахимсталя в пространстве Лобачевского H^3:

$$\begin{aligned} X(s,t) &= \frac{s \operatorname{sh} R(s) \cos t}{\operatorname{ch} \tau(s,t)}, \\ Y(s,t) &= \frac{s \operatorname{sh} R(s) \sin t}{\operatorname{ch} \tau(s,t)}, \\ Z(s,t) &= s \operatorname{ch} R(s) - s \operatorname{sh} R(s) \operatorname{th} \tau(s,t), \\ \text{где} \ \ \tau(s,t) &= \int \frac{(s \operatorname{ch} R(s))'}{s \operatorname{sh} R(s)} ds + T(t), \end{aligned} \tag{3}$$

причем $R(s) > 0$, $T(t)$ — произвольные функции переменных s и t.

Действительно, вычисляя коэффициенты фундаментальных форм данной поверхности, убедимся в том, что координатные линии s и t являются линиями кривизны.

Лемма 2. a) *Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности* (3) *в* H^3 *имеют вид*

$$g_{11} = \frac{X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2}{Z^2} = \left(\frac{(s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - (s\,\mathrm{ch}\,R)'_s\,\mathrm{th}\,\tau}{s\,\mathrm{ch}\,R - s\,\mathrm{sh}\,R\,\mathrm{th}\,\tau}\right)^2,$$
$$g_{12} = \frac{X_sX_t + Y_sY_t + Z_sZ_t}{Z^2} = 0,$$
$$g_{22} = \frac{X_t^2 + Y_t^2 + Z_t^2}{Z^2} = (1 + T'^2_t)\left(\frac{s\,\mathrm{sh}\,R}{\mathrm{ch}\,\tau(s\,\mathrm{ch}\,R - s\,\mathrm{sh}\,R\,\mathrm{th}\,\tau)}\right)^2;$$

b) *коэффициент* b_{12} *второй квадратичной формы равен нулю.*

Доказательство. Для частных производных вектор-функции $\overline{r}(s,t) = (X, Y, Z)$ получаем

$$X_s = \frac{\cos t}{\mathrm{ch}\,\tau}((s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - \mathrm{th}\,\tau(s\,\mathrm{ch}\,R)'_s), \quad X_t = -\frac{s\,\mathrm{sh}\,R}{\mathrm{ch}\,\tau}(\sin t + \mathrm{th}\,\tau T'_t),$$
$$Y_s = \frac{\sin t}{\mathrm{ch}\,\tau}((s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - \mathrm{th}\,\tau(s\,\mathrm{ch}\,R)'_s), \quad Y_t = \frac{s\,\mathrm{sh}\,R}{\mathrm{ch}\,\tau}(\cos t - \mathrm{th}\,\tau T'_t),$$
$$Z_s = -\,\mathrm{th}\,\tau((s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - \mathrm{th}\,\tau(s\,\mathrm{ch}\,R)'_s), \quad Z_t = -\frac{s\,\mathrm{sh}\,RT'_t}{\mathrm{ch}^2\,\tau}.$$

Отсюда находятся выражения для коэффициентов первой квадратичной формы. Проверим, что средний коэффициент b_{12} второй квадратичной формы равен нулю. Для этого воспользуемся формулой (43.4) из ([5], с. 180):

$$Z_{,ts} = -\Gamma^3_{11}X_sX_t - \Gamma^3_{22}Y_sY_t - \Gamma^3_{33}Z_sZ_t + b_{12}n^3 = -\frac{1}{Z}X_sX_t - \frac{1}{Z}Y_sY_t + \frac{1}{Z}Z_sZ_t + b_{12}n^3,$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрики H^3. Поскольку $g_{12} = 0$, то условие $b_{12} = 0$ равносильно следующему: $Z_{,ts} = \frac{2Z_sZ_t}{Z}$. Смешанная ковариантная производная функции $Z(s,t)$ на поверхности

$$Z_{,ts} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t\partial s} - \overline{\Gamma}^1_{12}Z_s - \overline{\Gamma}^2_{12}Z_t,$$

где $\overline{\Gamma}^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial t}$, $\overline{\Gamma}^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial s}$ — символы Кристоффеля внутренней метрики поверхности ([5], с. 60). Вычисляем их и смешанную производную от Z:

$$\overline{\Gamma}^1_{12} = -\frac{sT'_t}{\mathrm{ch}^2\,\tau((s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - \mathrm{th}\,\tau(s\,\mathrm{ch}\,R)'_s)(s\,\mathrm{ch}\,R - \mathrm{th}\,\tau s\,\mathrm{sh}\,R)},$$
$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \frac{\mathrm{ch}\,R((s\,\mathrm{sh}\,R)'_s - (s\,\mathrm{ch}\,R)'_s\,\mathrm{th}\,\tau)}{\mathrm{sh}\,R(s\,\mathrm{ch}\,R - s\,\mathrm{sh}\,R\,\mathrm{th}\,\tau)},$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t\partial s} = -\frac{T'_t((s\,\mathrm{sh}\,R)' - 2(s\,\mathrm{ch}\,R)'_s\,\mathrm{th}\,\tau)}{\mathrm{ch}^2\,\tau}.$$

Далее прямым вычислением проверяем, что $Z_{,ts} = \frac{2Z_sZ_t}{Z}$. □

Теорема 1. *Поверхность в* H^3*, заданная уравнениями* (3) *с произвольными функциями* $R = R(s) > 0$, $T = T(t)$*, есть поверхность Иоахимсталя.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем $g_{12} = b_{12} = 0$, следовательно, координатные линии являются линиями кривизны. Линия $t = t_0$ лежит во вполне геодезической плоскости $X \sin t_0 - Y \cos t_0 = 0$, которая содержит геодезическую $x = y = 0$. Линия $s = s_0$ лежит в некоторой малой 2-сфере в H^3, т. к.

$$X^2(s_0,t) + Y^2(s_0,t) + (Z(s_0,t) - s_0 \operatorname{ch} R(s_0))^2 = (s_0 \operatorname{sh} R(s_0))^2. \quad \square$$

2. В [2] доказано, что всякая минимальная поверхность в H^3 с одним семейством плоских линий кривизны является поверхностью вращения. Покажем, что в классе поверхностей постоянной средней кривизны без омбилических точек одним семейством плоских линий кривизны обладают только поверхности вращения (гиперболические поверхности Делоне). Для этой цели удобно использовать модель геометрии Лобачевского на гиперболоиде в лоренцевом пространстве $R^{3,1}$, где

$$H^3 = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in R^{3,1} : |x|^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1,\ x_0 > 0\}.$$

Пусть $X(u,v) = \{X^i(u,v),\ i = 0,1,2,3\}$ — поверхность постоянной средней кривизны H без омбилических точек, вложенная в H^3 конформно и параметризованная своими линиями кривизны. Тогда, как показано в ([2], теорема 2.1), ее фундаментальными формами являются

$$ds^2 = e^{2\omega(u,v)}(du^2 + dv^2), \quad \mathrm{II} = (e^{2\omega}H + 1)du^2 + (e^{2\omega}H - 1)dv^2.$$

Уравнение Гаусса имеет вид ([2], теорема 2.1, с. 6)

$$\Delta\omega + (H^2 - 1)e^{2\omega} - e^{-2\omega} = 0. \tag{4}$$

Дифференциал Хопфа $\phi(w)dw^2 = (\frac{L-N}{2} - iM)dw^2$, где $w = u + iv$, в данном случае равен dw^2 и является голоморфным, что, как известно, равносильно выполнению условий Петерсона–Кодацци. Поэтому всякому решению $\omega(u,v)$ уравнения Гаусса в односвязной области плоскости комплексного переменного w соответствует единственная поверхность постоянной средней кривизны без омбилических точек. Деривационные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \omega_u X_u - \omega_v X_v + (e^{2\omega}H + 1)n + e^{2\omega}X,\\
X_{uv} &= \omega_v X_u + \omega_u X_v,\\
X_{vv} &= -\omega_u X_u + \omega_v X_v + (e^{2\omega}H - 1)n + e^{2\omega}X,\\
n_u &= -(H + e^{-2\omega})X_u, \quad n_v = (-H + e^{-2\omega})X_v,
\end{aligned}$$

где $n(u,v)$ — вектор единичной нормали к поверхности. В данном репере векторы X_u, X_v, n пространственноподобны, а вектор X времениподобен.

Времениподобность вектора $X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ следует прямо из определения H^3, вложенного в $R^{3,1}$ с метрикой $\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Касательное пространство в точке $x \in H^3$ состоит из векторов $y \in R^{3,1}$, для которых $\langle x, y\rangle = 0$. Покажем, что для всякого ненулевого вектора $y \in T_xH^3$ выполнено условие $\langle y, y\rangle > 0$, откуда и будет следовать пространственноподобность векторов X_u, X_v, n. Поскольку $x_0 > 0$ и $\langle y, x\rangle = 0$, то $y_0 = \frac{1}{x_0}\sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i$. Так как $x \in H^3$, то $x_0^2 = 1 + \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2$. Следовательно,

$$\langle y, y\rangle = -y_0^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2 = \frac{1}{x_0^2}\biggl(-\Bigl(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\Bigr)^2 + \Bigl(1 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2\Bigr)\sum_{i=1}^{3} y_i^2\biggr) \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} y_i^2}{x_0^2} \geq 0. \tag{$*$}$$

В действительности $\langle y, y\rangle > 0$ для всякого ненулевого $y \in T_xH^3$ и всякого $x \in H^3$. Для того чтобы в первом неравенстве в $(*)$ имело место равенство, необходимо, чтобы $x_i = \lambda y_i$ $(i = 1,2,3)$, а второе неравенство в $(*)$ обращается в равенство только в точке $x = (1, 0, 0, 0)$. Но тогда из условия $\langle y, x\rangle = 0$ следует, что $y_0 = 0$, т. е. $y = 0$.

Теорема 2. *Поверхностями постоянной средней кривизны в H^3 без омбилических точек, имеющими одно семейство линий кривизны, расположенных на вполне геодезических плоскостях, являются поверхности вращения (гиперболические поверхности Делоне).*

Доказательство. Условие принадлежности линии кривизны поверхности $X(u, v_0)$ некоторой вполне геодезической плоскости имеет вид

$$\langle X(u, v_0), a(v_0)\rangle = -X^0 a_0 + X^1 a_1 + X^2 a_2 + X^3 a_3 = 0, \tag{5}$$

где $a(v)$ — некоторый единичный пространственноподобный вектор: $\langle a, a\rangle = 1$. Дифференцируя (5) по u, получим $\langle X_u, a(v)\rangle = 0$. Следовательно, разложение вектора $a(v)$ по подвижному реперу (X, X_u, X_v, n) в $R^{3,1}$ должно иметь вид $a = c_1 X_v + c_2 n$. Дифференцирование (5) еще раз по u приводит к соотношению $\langle X_{uu}, a\rangle = 0$. Применяя деривационные формулы, получим

$$\langle \omega_u X_u - \omega_v X_v + (e^{2\omega} H + 1)n + e^{2\omega} X, c_1 X_v + c_2 n\rangle = -\omega_v |X_v|^2 c_1 + (e^{2\omega} + 1)c_2 = 0.$$

Отсюда следует $\frac{c_1}{c_2} = \frac{e^{2\omega} H+1}{e^{2\omega}\omega_v}$. Так как вектор a единичный, то $|a|^2 = c_1^2 e^{2\omega} + c_2^2 = 1$. Находим разложение вектора a по подвижному реперу X, X_u, X_v, n:

$$a(v) = \frac{(e^{2\omega} H + 1)X_v + e^{2\omega}\omega_v n}{e^{\omega}((e^{2\omega} H + 1)^2 + e^{2\omega}\omega_v^2)^{1/2}}.$$

Продифференцируем это выражение по u и еще раз используем деривационные формулы. Получим

$$\left(L_u X_v + L(\omega_v X_u + \omega_u X_v) + (e^{2\omega}\omega_v)_u n + e^{2\omega}\omega_v\left(-\frac{L}{e^{2\omega}} X_u\right)\right)(L^2 + e^{2\omega}\omega_v^2) -$$
$$- (L X_v + e^{2\omega}\omega_v n)(\omega_u(L^2 + e^{2\omega}\omega_v^2) + L L_u + e^{2\omega}\omega_v(\omega_u\omega_v + \omega_{uv})) = 0,$$

где $L = He^{2\omega} + 1$. Приравнивая нулю коэффициенты при базисных векторах X_v и n, получим систему из двух дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять функция $\omega(u, v)$,

$$(L_u + L\omega_u)(L^2 + e^{2\omega}\omega_v^2) - L(\omega_u L^2 + 2e^{2\omega}\omega_u\omega_v^2 + L L_u + e^{2\omega}\omega_v\omega_{uv}) = 0,$$
$$(e^{2\omega}\omega_v)_u(L^2 + e^{2\omega}\omega_v^2) - e^{2\omega}\omega_v(\omega_u L^2 + 2e^{2\omega}\omega_u\omega_v^2 + L L_u + e^{2\omega}\omega_v\omega_{uv}) = 0.$$

Эта система приводится к одному уравнению

$$\omega_{uv}(He^{2\omega} + 1) - \omega_u\omega_v(He^{2\omega} - 1) = 0.$$

Если $\omega_u \neq 0$, то уравнение интегрируется, т. к.

$$(\log\omega_u)_v = \frac{\omega_{uv}}{\omega_u} = \frac{He^{\omega} - e^{-\omega}}{He^{\omega} + e^{-\omega}}\omega_v = (\log(He^{\omega} + e^{-\omega}))_v.$$

Следовательно,

$$\omega_u = C(u)(He^{\omega} + e^{-\omega}). \tag{6}$$

Теперь воспользуемся теоремой, доказанной Г.Венте.

Теорема ([2], теорема 2.3). *Пусть $\omega(u, v)$ есть решение системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} &\Delta\omega + Ae^{2\omega} - Be^{-2\omega} = 0, \\ &2\omega_u = \alpha(u)e^{\omega} + \beta(u)e^{-\omega}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $\omega_v \neq 0$, то функции $\alpha(u)$, $\beta(u)$ суть решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha'' &= a\alpha - 2\alpha^2\beta - 2A\beta, \\ \beta'' &= a\beta - 2\alpha\beta^2 - 2B\alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

где a есть некоторая постоянная.

В условиях доказываемой теоремы первое из уравнений системы (7) совпадает с уравнением Гаусса (4), причем $A = H^2 - 1$, $B = 1$. Второе из уравнений системы (7) есть уравнение (6), причем $\alpha(u) = 2HC(u)$, $\beta(u) = 2C(u)$. По теореме Венте функция $C(u)$ должна удовлетворять системе уравнений (8), которая имеет вид

$$\begin{aligned} 2HC'' &= 2aHC - 16H^2C^3 - 4(H^2-1)C, \\ 2C'' &= 2aC - 16HC^3 - 4HC. \end{aligned} \tag{9}$$

1) Если $H \neq 0$, то, умножая на H второе уравнение системы (9) и сравнивая его с первым уравнением, находим $4H^2C = 4(H^2-1)C$. Следовательно, $C \equiv 0$.

2) Если $H = 0$, то $\alpha = 0$, и из первого уравнения следует, что $C \equiv 0$.

Следовательно, $\omega_u \equiv 0$ и функция ω зависит только от переменной v. Как следует из доказанной ниже леммы, поверхность $X(u,v)$ будет поверхностью вращения в пространстве Лобачевского. □

Как уже отмечалось, для минимальных поверхностей в H^3 с плоским семейством линий кривизны теорема была доказана Г. Венте ([2], теорема 5.5). Следующая лемма справедлива для поверхностей, у которых первая и вторая фундаментальные формы зависят от одной переменной, а средняя кривизна H не обязательно постоянна.

Лемма 3. *Пусть первая и вторая фундаментальные формы поверхности $X(u,v)$ в пространстве Лобачевского зависят от одной переменной u и имеют вид*

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= e^{2\omega(u)}(du^2 + dv^2), \\ \mathrm{II} &= (e^{2\omega(u)}H + 1)du^2 + (e^{2\omega(u)}H - 1)dv^2. \end{aligned}$$

Тогда поверхность $X(u,v)$ является поверхностью вращения в H^3.

Доказательство. Покажем, что линия $X(u_0,v)$ имеет постоянную кривизну и нулевое кручение в H^3, т.е. лежит в некоторой вполне геодезической плоскости. Единичный касательный вектор к линии $X(u_0,v)$ есть $\tau = e^{-\omega(u_0)}X_v(u_0,v)$. Вычислим его ковариантную производную в H^3, которая по формуле Френе будет равна $k_1\nu$, где k_1 — кривизна линии, а ν — вектор главной нормали. Используя выписанные выше деривационные формулы, с учетом того, что $\omega_v = 0$, получим

$$\frac{D\tau}{ds} = \mathrm{Pr}_{T_X H^3}\,\frac{d\tau}{ds} = \mathrm{Pr}_{T_X H^3}\,e^{-\omega(u_0)}\frac{d\tau}{dv} = \mathrm{Pr}_{T_X H^3}\,e^{-2\omega(u_0)}X_{vv} = \\ = e^{-2\omega}(-\omega' X_u + (e^{2\omega}H - 1)n) = k_1\nu.$$

Отсюда видно, что $k_1^2 = |\frac{D\tau}{ds}|^2 = e^{-4\omega(u_0)}(\omega'^2 e^{2\omega} + (e^{2\omega}H-1)^2)$ не зависит от переменной v вдоль линии $X(u_0,v)$. Следовательно, кривизна этой линии постоянна. Вектор β бинормали кривой $X(u_0,v)$ перпендикулярен в $R^{3,1}$ к τ, ν, X. Поскольку $\nu = \lambda(u_0)(-\omega' X_u + (e^{2\omega}H-1)n)$ и $|X_u| = e^{\omega(u_0)}$, то ясно, что $\beta = \lambda(u_0)e^{-\omega(u_0)}((e^{2\omega}H-1)X_u + \omega' e^{2\omega}n)$. Вычислим ковариантную производную

$\dfrac{D\beta}{ds}$ вектора бинормали вдоль кривой $X(u_0,v)$, которая по формулам Френе равна $-k_2\nu$,

$$\frac{D\beta}{ds}=\mathrm{Pr}_{T_X H^3}\frac{d\beta}{ds}=\mathrm{Pr}_{T_X H^3}\, e^{-\omega}\frac{d\beta}{dv}=\mathrm{Pr}_{T_X H^3}\,\lambda e^{-2\omega}((e^{2\omega}H-1)X_{uv}+\omega' e^{2\omega}n'_v)=$$
$$=\mathrm{Pr}_{T_X H^3}\Big((e^{2\omega}H-1)\omega' X_v+\omega' e^{2\omega}\Big(-\frac{e^{2\omega}H-1}{e^{2\omega}}\Big)X_v\Big)=0.$$

Следовательно, кручение k_2 линии $X(u_0,v)$ равно нулю, и эта линия плоская.

Одна из деривационных формул $X_{uv}=\omega' X_v$ легко интегрируется:

$$X(u,v)=e^{\omega(u)}\Phi(v)+\Psi(u),$$

где $\Phi(v)=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, $\Psi(u)=(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ — некоторые вектор-функции из $R^{3,1}$. Так как $|X'_v|=e^{\omega}$, то $|\Phi'(v)|=1$. Поскольку линия $X(u_0,v)$ плоская, то можно выбрать базис в $R^{3,1}$ таким образом, чтобы $X^3(u_0,v)\equiv 0$. Тогда $X(u_0,v)\subset H_0^2=\{x_0,x_1,x_2,0)\mid x_0^2+x_1^2+x_2^2=-1\}$. Так как кривизна линии $X(u_0,v)$ постоянна, то это либо 1) окружность, либо 2) геодезическая, либо 3) орицикл, либо 4) "псевдоокружность" (т.е. линия, которая в модели Пуанкаре для H^2 в верхней полуплоскости представляется дугой окружности, расположенной над осью Ox). Действительно, в этой модели для кривой, параметризованной длиной дуги, имеем $x'^2+y'^2=y^2$, орт касательной $\tau=(x',y')$, орт главной нормали равен $\nu=(-y',x')$. В случае постоянной кривизны k кривой формула Френе $\frac{D\tau}{dt}=k\nu$ принимает вид

$$x''-\frac{2}{y}x'y'=-ky',$$
$$y''+\frac{x'^2-y'^2}{y}=kx'.$$

Система интегрируется так же, как в ([6], с. 80). В результате получаем $(x-c_1)^2+(\frac{k}{c}+y)^2=c^{-2}$. В зависимости от величины k и возникают перечисленные возможности. Последовательно разберем их на модели $H_0^2\subset R^{2,1}$. 1) Если кривая $X(u_0,v)$ представляет собой окружность, то после поворота системы координат в $R^{3,1}$ ее уравнения примут вид $X(u_0,v)=(a,\sqrt{a^2-1}\cos v$, $\sqrt{a^2-1}\sin v,\ 0)$. Тогда $\Phi'=(0,-\sin v,\cos v,0)$. За счет сдвига начала координат можно считать, что $\Phi=(0,\cos v,\sin v,0)$, и условие $\langle X_u,X_v\rangle=0$ приводит к тому, что $\langle\Phi',\Psi'\rangle=0$ и, значит, для всех v должно выполняться уравнение $-\sin v\psi_1'+\cos v\psi_2'=0$, откуда $\Psi=(\psi_0,0,0,\psi_3)$. Следовательно, уравнения поверхности имеют вид $X(u,v)=(\psi_0(u),\ e^{\omega(u)}\cos v,\ e^{\omega(u)}\sin v,\ \psi_3(u))$, т.е. поверхность инвариантна относительно группы вращений, изоморфной $SO(2)$. 2) Если $X(u_0,v)$ — "псевдоокружность" или геодезическая, то за счет поворота системы координат в $R^{3,1}$ можно считать, что она имеет уравнения $X(u_0,v)=(a\,\mathrm{ch}\,v,\ a\,\mathrm{sh}\,v,\ \sqrt{a^2-1},\ 0)$, где $a>1$ в случае "псевдоокружности" и $a=1$ в случае геодезической. Так как $|\Phi'|=1$, то $\Phi'=(\mathrm{sh}\,v,\mathrm{ch}\,v,0,0)$, и за счет выбора начала координат можно считать, что $\Phi=(\mathrm{ch}\,v,\mathrm{sh}\,v,0,0)$. Затем условие $\langle X_u,X_v\rangle=0$ дает $\Psi=(0,0,\psi_2,\psi_3)$, и уравнения поверхности принимают вид $X(u,v)=(e^{\omega(u)}\,\mathrm{sh}\,v,\ e^{\omega(u)}\,\mathrm{ch}\,v,\ \psi_2(u),\ \psi_3(u))$. Эта поверхность инвариантна относительно подгруппы собственных вращений плоскости Лоренца. 3) Остается последняя возможность, когда при любом u_0 кривая $X(u_0,v)$ есть орицикл. Зафиксируем значение u_0 и рассмотрим данную кривую. За счет вращения системы координат в $R^{3,1}$ можно добиться, чтобы ее уравнение приняло вид $X(u_0,v)=e^{\omega(u_0)}\Phi(v)+\Psi(u_0)=(\dfrac{v^2}{2}+1,v,\dfrac{v^2}{2},0)$. Следовательно, $X'_v(u_0,v)=e^{\omega(u_0)}\Phi'(v)=(v,1,v,0)$. Так как $|\Phi'|=1$, то $e^{\omega(u_0)}=1$, и $\Phi'=(v,1,v,0)$. Интегрируя это уравнение и подходящим образом выбирая начало координат, получим $\Phi(v)=(\frac{v^2}{2}+1,v,\frac{v^2}{2},0)$. Далее, условие $\langle X_u,X_v\rangle=0$ сводится к $-\psi_0'v+\psi_1'+\psi_2'v=0$. Отсюда находим $\psi_1=c_1$, $\psi_2-\psi_0=c_2$. Значит,

$\Psi = (\psi_0(u), c_1, \psi_0 + c_2, \psi_3(u))$, и поверхность имеет вид

$$X(u,v) = e^{\omega(u)}\left(\frac{v^2}{2}+1, v, \frac{v^2}{2}, 0\right) + (\psi_0(u), c_1, \psi_0(u)+c_2, \psi_3(u)).$$

Поскольку при всяком фиксированном u_0 линия $X(u_0, v)$ есть орицикл, то $e^{\omega(u)} \equiv 1$ (т. к. кривизна всякого орицикла равна единице). Теперь надо воспользоваться тем, что поверхность $X(u,v) = (\frac{v^2}{2}+1+\psi_0, v+c_1, \frac{v^2}{2}+\psi_0+c_2, \psi_3)$ удовлетворяет условию $|X(u,v)|^2 = -1$. Записав это условие, получим $2\psi_0(c_2-1)+c_2v^2+2vc_1+c_1^2+c_2^2+\psi_3^2 \equiv 0$. Отсюда следует, что 1) $c_1 = c_2 = 0$, 2) $\psi_3^2 = 2\psi_0$. Следовательно, если ввести новую переменную $u_1 = \psi_3(u)$, то уравнения поверхности примут вид $X(u,v) = (\frac{v^2}{2}+1+\frac{u_1^2}{2}, v, \frac{v^2}{2}+\frac{u_1^2}{2}, u_1)$. Поэтому в третьем случае поверхность представляет собой область на орисфере. $\square$

Литература

1. Bianchi L. *Lezioni di geometria differenziale.* – Bologna: Edit. Nic. Zanicheli, 1927. – V. 1. – 801 p.
2. Wente H.C. *Constant mean curvature immersions of Enneper type* // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1992. – № 478. – P. 1–77.
3. Шуликовский В.И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении.* – М.: Физматлит, 1963. – 540 с.
4. Бердон А. *Геометрия дискретных групп.* – М.: Наука, 1986. – 300 с.
5. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 316 с.
6. Трофимов В.В. *Введение в геометрию многообразий с симметриями.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 353 с.

Харьковский государственный университет

Поступила
08.06.1999