И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 512.541

Е.Н. КУРМАНОВА, А.М. СЕБЕЛЬДИН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ Hom-ДЕЛИМОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ГРУПП

Для рациональных групп A, B изучается делимость элементов $\varphi(x)$ на x нацело для $x \in A$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Пусть A, B — подгруппы группы $\mathbf{Q}$, $0 \neq x \in A$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Будем говорить, что элемент $0 \neq y \in B$ делит элемент $x \in A$ $(y|x)$, если $\frac{x}{y} \in \mathbf{Z}$. Пару групп A, B назовем Hom-делимой, если $\frac{\varphi(x)}{x} \in \mathbf{Z}$ для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)$ и ненулевого $x \in A$. Пусть далее a — минимальный натуральный элемент в A, b — минимальный натуральный элемент в B, $h_p^A(a) = \alpha$ и $h_p^B(b) = \beta$ — соответственно p-высоты a в A и b в B, $\chi^A(a) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots)$ — характеристика элемента a в группе A, $\chi^B(b) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots)$ — характеристика элемента b в группе B ([1], с. 129), $t(A), t(B)$ — типы групп A, B ([1], с. 131). Положим $P(A) = \{p : pA = A\}$; $\frac{m}{n}A = \{\frac{m}{n}x \in \mathbf{Q} : x \in A\}$, где $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$; $B' = \{\frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbf{Q} : \varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)\}$; $p(s) = \{p : p|s\}$ для $s \in \mathbf{N}$.

Известно, если группы A и B такие, что $t(A) > t(B)$ или $t(A)$ и $t(B)$ несравнимы, то $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ ([1], с. 133). В этом случае пара групп A, B Hom-делима, поэтому рассматриваем случай $t(A) \leq t(B)$ ([1], с. 130).

Лемма 1. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $\frac{r}{s} \in A$, $s = yz$, где $y, z \in \mathbf{Z}$. Тогда $\frac{r}{y}, \frac{r}{z} \in A$.*

Доказательство. Так как $\frac{r}{s} \in A$ и $y, z \in \mathbf{Z}$, то $\frac{r}{s}y$ и $\frac{r}{s}z \in A$. Имеем $\frac{r}{s}z = \frac{rz}{yz} = \frac{r}{y} \in A$ и $\frac{r}{s}y = \frac{ry}{yz} = \frac{r}{z} \in A$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $\frac{r}{s}$ — несократимая рациональная дробь, знаменатель которой имеет каноническое разложение $s = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$. Если $\frac{r}{s} \in A$, то выполняются следующие условия*: 1) $a|r$, 2) $\frac{a}{s} \in A$, 3) $\frac{a}{p_i^{\gamma}} \in A$ *для любого $p_i \in p(s)$ и для любого натурального γ, удовлетворяющего неравенству $0 \leq \gamma \leq \gamma_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Доказательство. 1) Очевидно, $r \in A$. Так как A — группа ранга 1, то существуют такие целые числа m и n, что имеет место равенство $ma = nr$, т. е. $r = \frac{ma}{n}$. Будем считать, что $(m, n) = 1$. Покажем, что $n|m$, т. е. $n = \pm 1$. Предположим, что n не делит m, т. е. $n \neq \pm 1$. Так как r целое и n не делит m, то $n|a$. Пусть $a = nl$, тогда $r = ml$. Ясно, что $|l| < a$. Так как $(m, n) = 1$, то существуют такие целые числа x, y, что $mx + ny = 1$. Домножив последнее равенство на l, получим $rx + ay = l$, отсюда следует, что $l \in A$. Имеем l, $|l| \in A$ и $|l| < a$, что невозможно, т. к. a — минимальный натуральный элемент в A. Следовательно, $n = \pm 1$ и $a|r$.

2) Так как $\frac{r}{s}$ — несократимая дробь, то существуют такие целые числа x, y, что $rx + sy = 1$. Домножив обе части полученного равенства на рациональное число $\frac{a}{s}$, получим $\frac{r}{s}ax + ay = \frac{a}{s}$. Так как $\frac{r}{s}ax \in A$ и $ay \in A$, то $\frac{a}{s} \in A$.

3) Следует из леммы 1. $\square$

Лемма 3. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, p — простое число. Если $p|a$, то $h_p^A(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть $p|a$ и $h_p^A(a) \neq 0$, тогда $h_p^A(a) = \alpha > 0$. Так как $\alpha > 0$, то $\frac{a}{p} \in A$, что противоречит условию минимальности. Следовательно, $h_p^A(a) = 0$. $\square$

Теорема 1. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{Q}$, $t(A) \leq t(B)$. Тогда $\varphi(x) = x\frac{\varphi(a)}{a}$ для любых $x \in A$ и гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $x = \frac{r}{s}$ — несократимая дробь, принадлежащая группе A. В силу леммы 2 $a|r$, т.е. существует такое целое число r_1, что $r = r_1 a$, поэтому $\varphi(\frac{r}{s}) = r_1\varphi(\frac{a}{s})$. Легко видеть, что $\varphi(a) = s\varphi(\frac{a}{s})$, отсюда $\varphi(\frac{a}{s}) = \frac{1}{s}\varphi(a)$, следовательно, $\varphi(\frac{r}{s}) = \frac{r_1}{s}\varphi(a)$. Домножив и поделив полученное равенство на a, получим $\varphi(\frac{r}{s}) = \frac{r}{s}\frac{\varphi(a)}{a}$. Таким образом, $\varphi(x) = x\,\frac{\varphi(a)}{a}$ для любых $x \in A$ и гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $\frac{r}{s}$ — несократимая рациональная дробь, знаменатель которой имеет каноническое разложение $s = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$. Несократимая рациональная дробь $\frac{r}{s}$ принадлежит A тогда и только тогда, когда $a|r$ и $\gamma_i \leq \alpha_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\frac{r}{s} \in A$, то $a|r$ и $\frac{a}{p_i^{\gamma_i}} \in A$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ (лемма 2), поэтому $\gamma_i \leq \alpha_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$.

Достаточность. Пусть $\frac{r}{s}$ — рациональная несократимая дробь такая, что $a|r$ и $\gamma_i \leq \alpha_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$. Из того, что $\gamma_i \leq \alpha_i$, следует $\frac{a}{p_i^{\gamma_i}} \in A$, $i \in \{1, \dots, k\}$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a}{p_i^{\gamma_i}} \in A$. Легко видеть, что эта сумма представляет собой несократимую дробь, знаменатель которой равен s, следовательно, по лемме 2 $\frac{a}{s} \in A$. Так как $a|r$, то $\frac{r}{s} \in A$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{Q}$. Группа A является подгруппой группы B тогда и только тогда, когда $b|a$ и $\chi^A(a) \leq \chi^B(b)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть некоторая несократимая дробь $\frac{r}{s} \in A$, где $s = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$. Так как $\frac{r}{s} \in A$, то $a|r$, но $b|a$, значит, $b|r$. Так как $\frac{r}{s} \in A$ и $\chi^A(a) \leq \chi^B(b)$, то можно записать двойное неравенство $\gamma_i \leq \alpha_i \leq \beta_i$, где $i \in \{1, \dots, k\}$. Имеем $b|r$ и $\gamma_i \leq \beta_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$, причем $(r, s) = 1$, следовательно, согласно теореме 2 $\frac{r}{s} \in B$, значит, $A \subset B$.

Необходимость. Пусть A — подгруппа группы B. Покажем, что $b|a$ и $\chi^A(a) \leq \chi^B(b)$. Так как $a \in B$, то согласно лемме 2 $b|a$. Предположим, что $\chi^A(a) \not\leq \chi^B(b)$, т.е. $\chi^A(a)$ несравнима с $\chi^B(b)$ или $\chi^A(a) > \chi^B(b)$. Тогда найдется такое простое число p_i, что $\alpha_i > \beta_i \geq 0$, $\beta_i \neq \infty$. По лемме 3 $(a, p_i) = 1$ и $(a, p_i^{\alpha_i}) = 1$, т.е. $\frac{a}{p_i^{\alpha_i}}$ — несократимая дробь. Так как $A \subset B$, то $\frac{a}{p_i^{\alpha_i}} \in B$, отсюда в силу леммы 2 $\frac{b}{p_i^{\alpha_i}} \in B$. С другой стороны, $\frac{b}{p_i^{\alpha_i}}$ не может принадлежать группе B, т.к. $\alpha_i > \beta_i$. Получили противоречие. Таким образом, если $A \subset B$, то $b|a$ и $\chi^A(a) \leq \chi^B(b)$. $\square$

Следствие 1. Пусть $A, B \subset \mathbf{Q}$. Равенство $A = B$ имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$ и $\chi^A(a) = \chi^B(b)$.

Теорема 4. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{Q}$, $t(A) \leq t(B)$. Тогда имеет место изоморфизм $\mathrm{Hom}(A, B) \cong B'$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 $\varphi(\frac{r}{s}) = \frac{r}{s}\frac{\varphi(a)}{a}$ для любых $\frac{r}{s} \in A$ и гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Поставим каждому гомоморфизму $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ в соответствие число $F(\varphi) = \frac{\varphi(a)}{a} \in B'$. Это соответствие F будет биективным. Во-первых, каждому гомоморфизму соответствует единственное число $\frac{\varphi(a)}{a}$, т.к. при отображении $\varphi(a)$ определяется единственным образом. Следовательно, F — отображение. Согласно построению множества B' отображение F сюръективно. Покажем, что отображение F инъективно. Пусть $F(\varphi) = F(\psi)$, где $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, тогда $\varphi(a) = \psi(a)$. Отсюда (по теореме 1) $\varphi(x) = \psi(x)$ для любого $x \in A$, а это означает, что $\varphi = \psi$. Отображение F сохраняет сложение: для любых φ, $\psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ имеем

$$F(\varphi + \psi) = \frac{(\varphi + \psi)(a)}{a} = \frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\psi(a)}{a} = F(\varphi) + F(\psi). \quad \square$$

Теорема 5. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$. Элемент a делит $\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$ тогда и только тогда, когда $P(A) = \emptyset$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $a|\varphi(a)$ для любого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$. Если $P(A) \neq \emptyset$, то существует такое простое p, что $pA = A$, тогда отображение ψ, действующее по правилу $\psi(x) = \frac{x}{p}$, будет гомоморфизмом группы A в себя. Но при этом гомоморфизме ψ элемент a не делит $\psi(a)$, что противоречит условию. Следовательно, $P(A) = \emptyset$.

Достаточность. Пусть $P(A) = \emptyset$, тогда любой гомоморфизм $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$ есть умножение на ненулевое целое число, т. е. всякий гомоморфизм $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$ действует на элементы x группы A следующим образом: $\varphi(x) = mx$, где $0 \neq m \in \mathbf{Z}$. Из этого следует, что $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$. □

Под единственностью изоморфизма групп A и B будем понимать единственность изоморфизма с точностью до знака.

Теорема 6. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{Q}$, $\psi : A \cong B$. Для того чтобы ψ был единственным с точностью до знака изоморфизмом группы A на группу B, необходимо и достаточно, чтобы множество $P(A)$ было пустое.*

Доказательство. Необходимость. Пусть ψ — единственный с точностью до знака изоморфизм группы A на группу B. Предположим, что $P(A)$ не пустое. В этом случае существует такое простое число p, что $pA = A$, тогда для $p\frac{\psi(a)}{a} \in B'$ образ $F^{-1}(p\frac{\psi(a)}{a}) = \varphi$ (построение $F : \mathrm{Hom}(A, B) \cong B'$ в теореме 4) является изоморфизмом, отличным от $\pm\psi$, что противоречит единственности изоморфизма ψ.

Достаточность. Пусть $\psi : A \cong B$, причем $P(A) = \emptyset$. Покажем, что ψ — единственный с точностью до знака изоморфизм A на B. Допустим, что существует еще один изоморфизм $\varphi \neq \pm\psi$ группы A на B, тогда $B = \frac{\varphi(a)}{a}A$ и $B = \frac{\psi(a)}{a}A$. Используя эти равенства, представим группу A в виде $A = \frac{r}{s}A$, где $\frac{r}{s} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$. Так как $\frac{r}{s} \neq \pm 1$, то $P(A)$ не пустое, что противоречит условию. □

Теорема 7. *Пусть $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{Q}$, $t(A) \leq t(B)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *пара групп A, B Hom-делима;*
2) *$\frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbf{Z}$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$;*
3) *$P(A) = \emptyset$ и существует $\psi : A \cong B$, причем $\frac{\psi(a)}{a} \in \mathbf{Z}$;*
4) *существует единственный с точностью до знака изоморфизм $\psi : A \cong B$, причем $\frac{\psi(a)}{a} \in \mathbf{Z}$;*
5) *$P(A) = \emptyset$ и B — подгруппа группы A такая, что $B = mA$, $m \in \mathbf{Z}$;*
6) *$\frac{\varphi(x)}{x} \in \mathbf{Z}$ для любого фиксированного $0 \neq x \in A$ и любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$;*
7) *$P(A) = \emptyset$ и $B = mA$, где $|m|$ — минимальный натуральный элемент группы B'.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если пара групп A, B Hom-делима, то $x|\varphi(x)$ для любых $0 \neq x \in A$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Очевидно, при $x = a$ имеем $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть группы A и B такие, что $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Покажем, что $P(A) = \emptyset$, $\psi : A \cong B$ и $a|\psi(a)$. Так как $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $B' \subset \mathbf{Z}$, отсюда $t(B') = t(\mathbf{Z})$, т. е. $P(A) = \emptyset$, $P(B) = \emptyset$ и $t(A) = t(B)$. Так как $t(A) = t(B)$, то существует изоморфизм $\psi : A \to B$, причем этому изоморфизму ψ соответствует рациональное число $F(\psi) = \frac{\psi(a)}{a} \in B'$ (теорема 4). В силу того, что $B' \subset \mathbf{Z}$, делаем вывод $a|\psi(a)$.

3) $\Rightarrow$ 4) легко показать, пользуясь теоремой 6.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть группы A и B такие, что ψ — единственный с точностью до знака изоморфизм из группы A в B, причем $a|\psi(a)$. Согласно теореме 6 из того, что ψ — единственный с точностью до знака изоморфизм группы A на B, следует $P(A) = \emptyset$. Так как ψ — изоморфизм и $a|\psi(a)$, то $B = mA$, где $m = \frac{\psi(a)}{a}$, $m \in \mathbf{Z}$. Очевидно, $B \subset A$.

5) $\Rightarrow$ 7). Покажем, что $|m|$ — минимальный натуральный элемент группы B'. Ясно, что $m \in B'$. Предположим, что n является минимальным натуральным элементом группы B', причем $n \neq |m|$. Так как $m \in B'$, то $n|m$, т. е. существует такое целое число $r \neq \pm 1$, что $m = nr$. Так как $n \in B'$, то $nA \subset B$. Имеем $nrA \subset nA \subset B$. С другой стороны, $mA = nrA = B$. Таким образом, $B = nA$. Из $B = nA = nrA$ следует $A = rA$. Так как $r \neq \pm 1$, то $P(A) \neq \emptyset$, тогда как $P(A) = \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство.

7) $\Rightarrow$ 1). Пусть группы A и B такие, что $P(A) = \emptyset$ и $B = mA$, где $|m|$ — минимальный натуральный элемент группы B'. Так как $P(A) = \emptyset$, то по теореме 5 $a|\varphi'(a)$ для любого $\varphi' \in \mathrm{Hom}(A, A)$, но т. к. $\mathrm{Hom}(A, mA)$ естественным образом вкладывается в $\mathrm{Hom}(A, A)$, то $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Согласно теореме 1 для любых $0 \neq x \in A$ и гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $\varphi(x) = \frac{\varphi(a)}{a} x$. Так как $a|\varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $x|\varphi(x)$ для любых $0 \neq x \in A$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Следовательно, пара групп A, B Hom-делима.

2) $\Rightarrow$ 6). Пусть $\frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbf{Z}$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и x — ненулевой элемент группы A. Согласно теореме 1 для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $\varphi(x) = x\,\frac{\varphi(a)}{a}$. Отсюда $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbf{Z}$.

6) $\Rightarrow$ 2). Очевидно, при $x = a$ получим требуемое. $\square$

Литература

1. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* – М.: Мир, 1977. – 416 с.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 21.09.2004