ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.929

В.Г. АБДРАХМАНОВ, Е.Ф. САПРЫКИН, Ю.Н. СМОЛИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается задача

$$\dot{x}(t) + \int_0^t d_s R(t,s)x(s) = f(t), \quad t \in [0,\infty[; \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha_0, \tag{2}$$

где $f \in L^n[0,b]$ ($\forall b \in]0,\infty[$), $\alpha_0 \in R^n$, а $n \times n$-матрица $R(\cdot,\cdot)$ в области

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,s) : 0 \le s \le t < \infty\}$$

удовлетворяет условиям

1) $R(\cdot,s)$ локально суммируема при всех s;
2) $R(t,\cdot)$ при почти всех (п. в.) t интегрируема по Риману на $[0,t]$;
3) при всех s и п. в. $t \in [s,\infty[$

$$\|R(t,s)\| \le c\exp[\alpha(t-s)],\ ^1 \quad \alpha \ge 0; \tag{3}$$

4) $R(t,t) = 0$;
5) существует такое $w > 0$, что $R(t+w,s+w) = R(t,s)$ при всех s и п. в. $t \in [s,\infty[$.

Под решением задачи (1)–(2) понимается функция $x \in AC^n[0,b]$, удовлетворяющая (1) п. в. на $[0,\infty[$ и (2). Интеграл в (1) ($\forall x \in AC^n[0,b]$) понимается в смысле Римана–Стилтьеса [1].

Изменим $R(\cdot,s)$ на множестве меры нуль, принадлежащем $[s,\infty[$, так, чтобы полученная локально суммируемая функция удовлетворяла (3) всюду на $[s,\infty[$, сохранив за ней прежнее обозначение. Аналогично будем поступать со всеми встречающимися ниже суммируемыми функциями.

Подобно тому, как это сделано в ([2], с. 93), в [3] доказана

Теорема 1. *При выполнении условий* 1)–4) *задача* (1)–(2) *при любых* f *и* α_0 *имеет единственное решение, определяемое формулой*

$$x(t) = \Big(E + \int_0^t \Gamma(\tau,0)d\tau\Big)\alpha_0 + \int_0^t \Big(E + \int_s^t \Gamma(\tau,s)d\tau\Big) f(s)ds, \tag{4}$$

где E *— единичная* $n \times n$*-матрица,* $\Gamma(\cdot,\cdot)$ *— резольвента ядра рассматриваемого в* $L^n[0,b]$ *уравнения*

$$y(t) = \int_0^t R(t,s)y(s)ds + h(t).$$

[1] Под нормой $m \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ понимается $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Отметим, что это утверждение усиливает соответствующий результат работы [1].

Из (4) видно ([4], с. 90), что устойчивость решения задачи (1)–(2) обеспечивается оценкой

$$\|\Gamma(t,s)\| \le c\exp[\alpha(t-s)], \quad (t,s)\in\Delta, \tag{5}$$

при $\alpha<0$, получением которой и займемся. Положим

$$D=\{(t,s): 0\le s\le t<s+w<2w\}, \quad \Gamma(t,s,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(t+kw,s)z^k,$$

где $(t,s)\in D$, z — комплексная переменная. Приведем утверждение, доказанное в [5] для непрерывной в Δ матрицы $\Gamma(\cdot,\cdot)$.

Теорема 2. 1) *Пусть существует такое $\rho>0$, что функция $\Gamma(t,s,\cdot)$ аналитична внутри окружности $|z|=\rho$ и ограничена на ней равномерно по $(t,s)\in D$. Тогда найдется такое $c>0$, что выполняется неравенство (5), причем $\alpha=-\frac{\ln\rho}{w}$.*

2) *Пусть существуют такие α и $c>0$, что выполняется неравенство (5). Тогда функция $\Gamma(t,s,\cdot)$ аналитична в круге $|z|<\exp(-\alpha w)$.*

Положим при $(t,s)\in D$, $\xi\in[s,s+\omega]$ и $k=0,1,\ldots$

$$\Gamma(t+kw,s)=\Gamma^{(k)}(t,s),$$

$$\Phi^{(k)}(t,\xi,s)=R(t+kw,\xi)+\int_s^t\Gamma(t,\eta)R(\eta+kw,\xi)d\eta.$$

Методом математической индукции устанавливается

$$\Gamma^{(k)}(t,s)=\Phi^{(k)}(t,s,s)+\sum_{j=0}^{k-1}\int_s^{s+w}\Phi^{(k-j)}(t,\xi,s)\Gamma^{(j)}(\xi,s)d\xi. \tag{6}$$

Иным способом (для непрерывных матриц) формулы (6) получены в [5].

Теорема 2 открывает путь для нахождения точного значения α в (5). Однако, как видно из (6), непосредственно применять это утверждение в представляющих интерес случаях (когда $\Gamma(\cdot,\cdot)$ неизвестна) невозможно. Тем не менее, в случае, когда ядро $R(\cdot,\cdot)$ вырождено, удается оценить α с заданной точностью, причем предлагаемый ниже способ допускает применение компьютера.

Пусть $R(t,s)=A(t)\cdot B(s)$, где A и B — w-периодические $n\times m$- и $m\times n$-матрицы соответственно; элементы $A(\cdot)$ суммируемы, а элементы $B(\cdot)$ интегрируемы по Риману на $[0,w]$. В этом случае формулы (6) имеют вид

$$\Gamma^{(k)}(t,s)=\Phi(t,s)[E+T(s)]^kB(s), \tag{7}$$

где

$$\Phi(t,s)\stackrel{\text{def}}{=}A(t)+\int_s^t\Gamma(t,\xi)A(\xi)d\xi, \quad T(s)\stackrel{\text{def}}{=}\int_s^{s+w}B(\xi)\Phi(\xi,s)d\xi.$$

Положим $U=E+T(0)$, и пусть $\lambda^{(1)}$ — наибольшее по модулю собственное число матрицы U. С помощью (7) доказывается

Теорема 3. *Для того чтобы имела место оценка (5), условие*

$$|\lambda^{(1)}|<\exp(\alpha w) \tag{8}$$

является достаточным, а условие $|\lambda^{(1)}|\le\exp(\alpha w)$ — необходимым.

Дальнейшая часть работы будет посвящена получению оценки (8).

Выберем монотонные бесконечно малые последовательности положительных рациональных чисел $\{\delta_k{}^{(1)}\}$ и $\{\delta_k{}^{(2)}\}$, и пусть

$$\int_0^w \|A(t) - A_k(t)\| dt \leq \delta_k^{(1)}, \quad \sup_{s\in[0,w]} \|B(s) - B_k(s)\| \leq \delta_k^{(2)}, \tag{9}$$

где A_k и B_k — w-периодические вычислимые ([4], с. 228) $n\times m$- и $m\times n$-матрицы соответственно. Аналогично тому, как это было сделано выше, положим

$$\Phi_k(t,s) = A_k(t) + \int_s^t \Gamma_k(t,\xi) A_k(\xi) d\xi, \tag{10}$$

где $\Gamma_k(\cdot,\cdot)$ — резольвента ядра $R_k(\cdot,\cdot)$,

$$T_k(s) = \int_s^{s+w} B_k(\xi)\Phi_k(\xi,s)d\xi, \tag{11}$$

$$U_k = E + T_k(0).$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \|U - U_k\| = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Определим рациональные числа a, b, c, a_k, b_k, c_k неравенствами

$$a \geq \int_0^w \|A(t)\| dt, \quad a_k \geq \int_0^w \|A_k(t)\| dt; \tag{13}$$

$$b \geq \sup_{s\in[0,w]} \|B(s)\|, \quad b_k \geq \sup_{s\in[0,w]} \|B_k(s)\|; \tag{14}$$

$$c \geq ab\exp(ab), \qquad c_k \geq a_k b_k \exp(a_k b_k), \tag{15}$$

и пусть

$$H_k(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} A(t)B(s) - A_k(t)B_k(s).$$

Тогда из (9), (13) и (14) следует

$$\sup_{s\in[0,w]} \int_s^w \|H_k(t,s)\| dt \leq a\delta_k{}^{(2)} + \delta_k{}^{(1)} b_k \stackrel{\text{def}}{\leq} \delta_k, \tag{16}$$

где δ_k — рациональное число, а из уравнения для $\Gamma_k(\cdot,s)$ с использованием (15) и теоремы об интегральном неравенстве —

$$\sup_{s\in[0,w]} \int_s^w \|\Gamma_k(t,s)\| dt \leq c_k. \tag{17}$$

Пусть

$$Z_k(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} H_k(t,s) + \int_s^t \Gamma_k(t,\tau) H_k(\tau,s) d\tau.$$

Тогда ввиду (16) и (17)

$$\sup_{s\in[0,w]} \int_s^w \|Z_k(t,s)\| dt \leq \delta_k(1+c_k), \tag{18}$$

и существует натуральное k_0 такое, что

$$\delta_k(1+c_k) < 1 \quad (k \geq k_0). \tag{19}$$

Это дает возможность с использованием уравнения для резольвенты $\Gamma_{Z_k}(\cdot,s)$ ядра $Z_k(\cdot,\cdot)$ и (18), (19) получить неравенство

$$\sup_{s\in[0,w]}\int_s^w \|\Gamma_{Z_k}(t,s)\|dt \le \delta_k{}^{(0)} \quad (k\ge k_0), \tag{20}$$

где $\delta_k{}^{(0)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta_k(1+c_k)}{1-\delta_k(1+c_k)}$.

Определим на множестве G матриц, удовлетворяющих условиям 1)–4), композиционное умножение:

$$[R_1(t,s)\times R_2(t,s)] \overset{\text{def}}{=} R_1(t,s)+R_2(t,s)-\int_s^t R_1(t,\tau)R_2(\tau,s)d\tau.$$

Несложно показать, что пара $\langle G,\times\rangle$ является группой, в которой роль единичного элемента играет нулевая матрица, а левым обратным элементом для $R(t,s)$ служит $-\Gamma(t,s)$, и из свойств групп вытекает соотношение

$$\Gamma(t,s)=\Gamma_1(t,s)+\Gamma_2(t,s)+\int_s^t \Gamma_2(t,\tau)\Gamma_1(\tau,s)d\tau, \tag{21}$$

где $\Gamma_1(\cdot,\cdot)$ и $\Gamma_2(\cdot,\cdot)$ — резольвенты ядер $R_1(\cdot,\cdot)$ и $R_2(\cdot,\cdot)$ соответственно (заметим, что для непрерывных матриц формула (21) получена в [6]).

Имеем $A(t)B(s)=[A_k(t)B_k(s)\times Z_k(t,s)]$, и потому в силу (21)

$$\Gamma(t,s)=\Gamma_k(t,s)+\Gamma_{Z_k}(t,s)+\int_s^t \Gamma_{Z_k}(t,\tau)\Gamma_k(\tau,s)d\tau.$$

Отсюда ввиду (18) и (20) следует, что

$$\sup_{s\in[0,w]}\int_s^w \|\Gamma(t,s)-\Gamma_k(t,s)\|dt \le \delta_k{}^{(0)}(1+c_k) \quad (k\ge k_0),$$

и с учетом (17) получаем

$$\|U-U_k\| \le b_k(\delta_k{}^{(1)}+a\delta_k{}^{(0)})(1+c_k)+a\delta_k{}^{(2)}(1+c) \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_k, \tag{22}$$

откуда и вытекает (12). $\square$

Для произвольных k, l и $(t,s)\in\Delta$ положим

$$\Gamma_{kl}(t,s)=\sum_{i=1}^{l} R_{ki}(t,s), \quad \Delta_{kl}(t,s)=\sum_{i=l+1}^{\infty} R_{ki}(t,s),$$

где $R_{ki}(\cdot,\cdot)$ — i-я итерация ядра $R_k(\cdot,\cdot)$. Тогда из (10) и (11) при $s\in[0,w]$ имеем

$$T_k(s)=T_{kl}(s)+\tilde{\Delta}_{kl}(s),$$

где

$$\begin{aligned} T_{kl}(s) &\overset{\text{def}}{=} \int_s^{s+w} B_k(\xi)\Big[A_k(\xi)+\int_s^{\xi}\Gamma_{kl}(\xi,\tau)A_k(\tau)d\tau\Big]d\xi,\\ \widetilde{\Delta}_{kl}(s) &\overset{\text{def}}{=} \int_s^{s+w} B_k(\xi)\int_s^{\xi}\Delta_{kl}(\xi,\tau)A_k(\tau)d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

Положим

$$U_{kl}=E+T_{kl}(0). \tag{24}$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\lim_{l\to\infty}\|U_k-U_{kl}\|=0. \tag{25}$$

Доказательство. Используя оценки, полученные в [3], несложно показать, что

$$\sup_{s\in[0,w]}\int_s^w \|\Delta_{kl}(t,s)\|dt < \sigma_{kl}, \tag{26}$$

где

$$\sigma_{kl} \overset{\text{def}}{=} \exp(a_k b_k) - \sum_{i=0}^{l}\frac{(a_k b_k)^i}{i!}. \tag{27}$$

Ввиду (23) и (26)

$$\|U_k - U_{kl}\| \le a_k b_k w \sigma_{kl}, \tag{28}$$

откуда с учетом (27) получаем (25). $\square$

Пусть ${\lambda_{kl}}^{(1)}$ — наибольшее по модулю собственное число матрицы U_{kl}.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\lim_{k,l\to\infty}|{\lambda_{kl}}^{(1)}| = |\lambda^{(1)}|. \tag{29}$$

Доказательство. В силу лемм 1 и 2

$$\lim_{k,l\to\infty}\|U - U_{kl}\| = 0, \tag{30}$$

и из теоремы 5.14 ([7], с. 151) вытекает (29). $\square$

Всюду ниже $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Положим

$$\lambda_{kl} = \widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon, \tag{31}$$

где $\widetilde{\lambda}_{kl}$ — приближенное значение $|{\lambda_{kl}}^{(1)}|$, для которого

$$\widetilde{\lambda}_{kl} - \frac{\varepsilon}{2} < |{\lambda_{kl}}^{(1)}| < \widetilde{\lambda}_{kl} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{32}$$

Лемма 4. *Существует такое* $\rho\,(0<\rho<1)$, *что*

$$\rho_0 \overset{\text{def}}{=} \sup_{k,l}\frac{|{\lambda_{kl}}^{(1)}|}{\lambda_{kl}} < \rho. \tag{33}$$

Доказательство. Ввиду леммы 3 двойная последовательность $\{|{\lambda_{kl}}^{(1)}|\}$ ограничена. Поэтому существует такое ρ $(0<\rho<1)$, что

$$\sup_{k,l}\frac{|{\lambda_{kl}}^{(1)}|}{|{\lambda_{kl}}^{(1)}| + \frac{\varepsilon}{2}} < \rho,$$

т. к.

$$\frac{|{\lambda_{kl}}^{(1)}|}{|{\lambda_{kl}}^{(1)}| + \frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2|{\lambda_{kl}}^{(1)}| + \varepsilon},$$

и с учетом (31) и (32) приходим к (33). $\square$

Следствие. При достаточно больших k, l

$$\lambda_{kl} > |\lambda^{(1)}|. \tag{34}$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{p\to\infty}\left\|\left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^p\right\| = 0 \quad (p\in N),$$

причем стремление к нулю равномерно относительно k, l.

Доказательство. Пусть $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda : |\lambda| = \rho\}$, где ρ удовлетворяет неравенству (33). Очевидно, числа $\frac{{\lambda_{kl}}^{(i)}}{\lambda_{kl}}$ лежат внутри Γ, а поскольку функция λ^p регулярна во всей комплексной плоскости, то ([8], с. 119)

$$\left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^p = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\lambda E - \frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{-1}\lambda^p d\lambda. \tag{35}$$

Покажем, что двойная последовательность $\{\|(\lambda E - \frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl})^{-1}\|\}$ равномерно ограничена относительно $\lambda \in \Gamma$, для чего воспользуемся очевидным равенством

$$\left(\lambda E - \frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{-1} = \lambda_{kl}(\lambda\lambda_{kl}E - U_{kl})^{-1}. \tag{36}$$

При $\lambda \in \Gamma$ ввиду (33) и (34) существует номер N_1 такой, что при $k, l > N_1$

$$|\lambda\lambda_{kl}| - |{\lambda_{kl}}^{(1)}| = \lambda_{kl}\left(\rho - \frac{|{\lambda_{kl}}^{(1)}|}{\lambda_{kl}}\right) > |\lambda^{(1)}|(\rho - \rho_0) > 0.$$

Отсюда, полагая $\varepsilon_1 = |\lambda^{(1)}|(\rho - \rho_0)$, получаем

$$|\lambda\lambda_{kl}| > |{\lambda_{kl}}^{(1)}| + \varepsilon_1 \quad (k,\, l > N_1). \tag{37}$$

Подберем m_0 так, чтобы $\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon}{m_0} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_2 > 0$. Поскольку, начиная с некоторого номера N_2, $|{\lambda_{kl}}^{(1)}| > |\lambda^{(1)}| - \frac{\varepsilon}{m_0}$, то ввиду (37) при $k, l > N_3 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{N_1, N_2\}$

$$|\lambda\lambda_{kl}| > |\lambda^{(1)}| + \varepsilon_2 \quad (\lambda \in \Gamma).$$

Следовательно, при указанных k, l, λ обратимы матрицы $\lambda\lambda_{kl}E - U$ и ([9], с. 625)

$$\sup_{\lambda\in\Gamma}\|(\lambda\lambda_{kl}E - U)^{-1}\| < \infty.$$

Из этого неравенства и (30) вытекает существование номера N_4 ($N_4 \geq N_3$) такого, что

$$\sup_{\lambda\in\Gamma}\|[(\lambda\lambda_{kl}E - U_{kl}) - (\lambda\lambda_{kl}E - U)](\lambda\lambda_{kl}E - U)^{-1}\| < 1,$$

откуда следует ([10], с. 141), что при $k, l > N_4$ и $\lambda \in \Gamma$ обратимы матрицы $\lambda\lambda_{kl}E - U_{kl}$ и справедлива оценка

$$\sup_{\lambda\in\Gamma}\|(\lambda\lambda_{kl}E - U_{kl})^{-1}\| \leq \sup_{\lambda\in\Gamma}\frac{\|(\lambda\lambda_{kl}E - U)^{-1}\|}{1 - \|(U - U_{kl})(\lambda\lambda_{kl}E - U)^{-1}\|}.$$

Отсюда видно, что двойная последовательность $\{\|(\lambda\lambda_{kl}E - U_{kl})^{-1}\|\}$ равномерно ограничена относительно $\lambda \in \Gamma$.

Далее, в силу (31) и (32) $\lambda_{kl} < |{\lambda_{kl}}^{(1)}| + 3\varepsilon/2$, а ввиду (29), начиная с некоторого N_5, $|{\lambda_{kl}}^{(1)}| < |\lambda^{(1)}| + \varepsilon/2$. Поэтому при $k, l > N_5$ имеем $\lambda_{kl} < |\lambda^{(1)}| + 2\varepsilon$, и ограничена двойная последовательность $\{\lambda_{kl}\}$. Используя (36), приходим к выводу о равномерной ограниченности двойной последовательности $\{\|(\lambda E - \frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl})^{-1}\|\}$ относительно $\lambda \in \Gamma$, в силу чего

$$\sup_{k,l}\sup_{\lambda\in\Gamma}\left\|\left(\lambda E - \frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{-1}\right\| \leq c$$

с некоторым $c > 0$. Переходя в (35) к неравенству при любых k, l, p, получим

$$\left\|\left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^p\right\| \leq c\rho^{p+1}, \tag{38}$$

откуда и вытекает утверждение леммы. □

Замечание 1. Из (38) видно, что для произвольных k, l и δ $(0<\delta<1)$ существует наименьшее натуральное p_{kl}, для которого

$$q_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \left(\frac{1}{\lambda_{kl}} U_{kl}\right)^{p_{kl}} \right\| < \delta. \tag{39}$$

Для нахождения p_{kl}, выбрав произвольно δ $(0<\delta<1)$, будем возводить матрицу $\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}$ последовательно в натуральные степени до тех пор, пока при некотором p_{kl} не получится (39); одновременно находится q_{kl}.

Приступим к доказательству основного утверждения, позволяющего конструктивно получать оценку вида (8) и, как следствие, (5).

Возьмем произвольно k, l и δ $(0<\delta<1)$, и пусть $|\lambda|\geq\lambda_{kl}$. Тогда в силу (31) и (32)

$$|\lambda| > |\lambda_{kl}{}^{(1)}| + \frac{\varepsilon}{2};$$

поэтому $\lambda E - U_{kl}$ — обратимая матрица, и, как несложно показать,

$$(\lambda E - U_{kl})^{-1} = \left[E - \left(\frac{1}{\lambda}U_{kl}\right)^{p_{kl}}\right]^{-1} \sum_{j=0}^{p_{kl}-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} U_{kl}{}^{j}. \tag{40}$$

Оценим сомножители, стоящие в правой части этого равенства. Поскольку $\left\|\left(\frac{1}{\lambda}U_{kl}\right)^{p_{kl}}\right\|<1$, то ([10], с. 140)

$$\left[E - \left(\frac{1}{\lambda}U_{kl}\right)^{p_{kl}}\right]^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}U_{kl}\right)^{p_{kl}p},$$

и в силу (39)

$$\left\| \left[E - \left(\frac{1}{\lambda}U_{kl}\right)^{p_{kl}}\right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1-q_{kl}}.$$

Кроме того,

$$\left\| \sum_{j=0}^{p_{kl}-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} U_{kl}{}^{j} \right\| \leq \alpha_{kl},$$

где

$$\alpha_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0\leq j\leq p_{kl}-1} \left\| \left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{j} \right\| \frac{p_{kl}}{\lambda_{kl}}. \tag{41}$$

Таким образом, из (40) получаем

$$\sup_{|\lambda|\geq\lambda_{kl}} \|(\lambda E - U_{kl})^{-1}\| \leq \frac{\alpha_{kl}}{1-q_{kl}}.$$

Априори при $k,l\to\infty$ величина $\frac{\alpha_{kl}}{1-q_{kl}}$ может неограниченно возрастать. Покажем, что в действительности это не так. Из (38) и (39) видно, что существует натуральное P такое, что $\sup\limits_{k,\,l} p_{kl}\leq P$. Покажем, что последовательность $\left\{\left\|\left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{p}\right\|\right\}$ $(p=0,\,1,\dots)$ ограничена равномерно относительно k, l.

Для произвольного $\sigma>0$ существует такое p_0, что при всех k, l и $p>p_0$ будет $\left\|\left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{p}\right\|<\sigma$. Рассмотрим теперь $p\leq p_0$. Поскольку $\|U_{kl}\|\leq c=\text{const}$ и в силу (31) $\frac{c}{\lambda_{kl}}\leq\frac{c}{\varepsilon}$, то

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda_{kl}}U_{kl}\right)^{p} \right\| \leq \left(\frac{c}{\lambda_{kl}}\right)^{p} \leq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{p}.$$

Отсюда заключаем, что $(k, l, p \in N)$

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda_{kl}} U_{kl} \right)^p \right\| \le \max \left\{ \sigma, \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^0, \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^1, \ldots, \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{p_0} \right\},$$

и ограниченность последовательности $\{\|(\frac{1}{\lambda_{kl}} U_{kl})^p\|\}$, равномерная относительного k, l, доказана.

Далее, как следует из (31) и (32), $\lambda_{kl} \ge \varepsilon/2$. Тогда

$$\sup_{k,l} \alpha_{kl} \le \frac{2P}{\varepsilon} \max_{0 \le j \le P-1} \left\| \left(\frac{1}{\lambda_{kl}} U_{kl} \right)^j \right\| < \infty,$$

что с учетом (39) дает

$$\sup_{k,\, l} \frac{\alpha_{kl}}{1 - q_{kl}} < \infty. \tag{42}$$

Как следует из (22) и (28), $\|U - U_{kl}\| \le \varepsilon_k + a_k b_k w \sigma_{kl}$, отсюда ввиду (42) вытекает существование k, l таких, что

$$(\varepsilon_k + a_k b_k w \sigma_{kl}) \frac{\alpha_{kl}}{1 - q_{kl}} < 1. \tag{43}$$

Зафиксируем эти k, l. Тогда $\sup\limits_{|\lambda| \ge \lambda_{kl}} \|[(\lambda E - U_{kl}) - (\lambda E - U)](\lambda E - U_{kl})^{-1}\| < 1$, и при $|\lambda| \ge \lambda_{kl}$ матрица $\lambda E - U$ обратима. Поэтому $|\lambda^{(1)}| < \lambda_{kl}$ или согласно (31)

$$|\lambda^{(1)}| < \widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon. \tag{44}$$

Поскольку $\widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon = \exp\left[\frac{1}{w} \ln(\widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon) w\right]$, то в силу теоремы 3 выполняется неравенство (5), где

$$\alpha = \frac{1}{w} \ln(\widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon). \tag{45}$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Пусть ε $(\varepsilon > 0)$ и δ $(0 < \delta < 1)$ — произвольно выбранные числа и при некоторых k, l выполняется неравенство (43), где ε_k, a_k, b_k, σ_{kl}, α_{kl} и q_{kl} определены в (22), (13), (14), (27), (41) и (39) соответственно. Тогда имеет место оценка (5), где α определено в (45).*

Замечание 2. Из (44) ввиду (32) имеем

$$|\lambda^{(1)}| < \widetilde{\lambda}_{kl} + \varepsilon < |\lambda_{kl}{}^{(1)}| + \varepsilon/2. \tag{46}$$

Поскольку в силу леммы 3 $|\lambda_{kl}{}^{(1)}| \to |\lambda^{(1)}|$ при $k, l \to \infty$, то из (46) следует, что с увеличением k, l и уменьшением ε можно получать все более точную оценку вида (44) и, тем самым, — все более точную оценку (5).

Замечание 3. Проделываемая работа значительно облегчается, если удается найти точное значение $|\lambda_{kl}{}^{(1)}|$; в этом случае равенство (45) принимает вид

$$\alpha = \frac{1}{w} \ln(|\lambda_{kl}{}^{(1)}| + \varepsilon).$$

Как следует из изложенного выше, конструктивное исследование устойчивости решения задачи Коши (1)–(2) можно разбить на этапы:

1) построение вычислимых матриц A_k и B_k, удовлетворяющих неравенствам (9);
2) построение матрицы U_{kl}, определяемой равенством (24);
3) определение постоянных, входящих в неравенство (43), и проверка этого неравенства;
4) определение показателя α по формуле (45).

Этапы 2)–4) этой схемы допускают реализацию с помощью компьютера.

Пример. Рассмотрим задачу (1)–(2), где $R(t,s) = A(t)B(s)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8\pi}\sin 2\pi t - \frac{7}{8} \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi}\sin 2\pi s + 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi s + 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая при $t, s \in [0,1]$ 1-периодические матрицы

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{2\pi}a_k(t) & 0 \\ 0 & -\frac{7}{8} + \frac{1}{8\pi}a_k(t) \end{pmatrix},$$

$$B_k(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8\pi}a_k(s) & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2\pi}a_k(s) \end{pmatrix},$$

$a_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}(2\pi t)^{2i-1}}{(2i-1)!}$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\delta = 0{,}095$, с помощью программного комплекса “Maple V Release 4” получаем (при $k = 1$, $l = 13$) оценку (5), где $\alpha = -1{,}101$. Таким образом, решение рассматриваемой задачи устойчиво. Это соответствует действительности, поскольку непосредственно вычисленное значение $\alpha = -1{,}250$.

В заключение отметим, что данная статья написана под влиянием весьма плодотворных идей школы профессора Н.В. Азбелева.

Литература

1. Абдрахманов В.Г., Смолин Ю.Н. *О разрешимости общей краевой задачи для одного класса функционально-дифференциальных уравнений с неограниченным оператором* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 3–11.
2. Максимов В.П. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение.* Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1974. – 120 с.
3. Сапрыкин Е.Ф. *О матрице Коши функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом* // Сб. статей молодых ученых. – Магнитогорск, 1999. – 80 с.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 277 с.
5. Винокуров В.Р. *Некоторые вопросы теории устойчивости интегральных уравнений Вольтерра.* III // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 4. – С. 20–31.
6. Винокуров В.Р. *Об устойчивости решения системы интегральных уравнений Вольтерра 2 рода.* I // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 1. – С. 23–34.
7. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
8. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 575 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* Ч. 1. – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
10. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Уфимский государственный
авиационно-технический университет

Магнитогорский государственный
педагогический институт

Поступила
22.11.1999