ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.956

Ю.Т. СИЛЬЧЕНКО

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

1. Рассмотрим в прямоугольнике $[0,1]\times[0,1]$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(-1)^m a(x)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m}\partial t}+(-1)^{m+k}b(x)\frac{\partial^{2m+2k}u}{\partial x^{2m+2k}}=f(t,x) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(t,0)=u(t,1)=\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=\dots=\frac{\partial^{m-1}u(t,0)}{\partial x^{m-1}}=\frac{\partial^{m-1}u(t,1)}{\partial x^{m-1}}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{m+r}u(t,0)}{\partial x^{m+r}}=\frac{\partial^{m+r}u(t,1)}{\partial x^{m+r}}=\dots=\frac{\partial^{m+r+k-1}u(t,0)}{\partial x^{m+r+k-1}}=\frac{\partial^{m+r+k-1}u(t,1)}{\partial x^{m+r+k-1}}=0 \tag{3}$$

и начальными условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=u_1(x) \tag{4}$$

при некоторых k, m и $0\le r\le m+k$. При $k=0$, $m=1$ уравнение (1) является уравнением распространения звука в вязком газе.

Введем в пространстве $L_p(0<x<1)=L_p$ операторы $A=(-1)^m a(x)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и $B=(-1)^{m+k}b(x)\frac{d^{2m+2k}}{dx^{2m+2k}}$ с областями определения

$$\mathcal{D}(A)=\{u(x)\in W_p^{2m},\ u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=\dots=u^{(m-1)}(0)=u^{(m-1)}(1)=0\},$$
$$\mathcal{D}(B)=\{u(x)\in W_p^{2m+2k},\ u(0)=u(1)=\dots=u^{(m-1)}(0)=u^{(m-1)}(1)=0,$$
$$u^{(m+r)}(0)=u^{(m+r)}(1)=\dots=u^{(m+r+k-1)}(0)=u^{(m+r+k-1)}(1)=0\}$$

соответственно. Тогда задача (1)–(4) сведется к абстрактной задаче Коши

$$u''+Au'+Bu=f(t)\quad (0<t\le 1),\quad u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1 \tag{5}$$

в банаховом пространстве L_p. Будем рассматривать случай, когда $0\le k\le m$. При этом уравнение (1) становится корректным по Петровскому и ведет себя как параболическое в том смысле, что задача (1)–(4) сводится к задаче Коши (5) для дифференциально-операторного уравнения параболического типа. Подобная задача изучалась в ([1], гл. 5, § 3). Однако в [1] рассматривались граничные условия при $r=m$, когда оператор B представляет из себя произведение $B=CA$, где C — оператор дифференцирования порядка $2k$ с граничными условиями Дирихле. В этом случае этот оператор C является производящим оператором аналитической полугруппы.

Уравнение (1) рассматривалось в [2] в случае, когда $a(x)\equiv 1$, $b(x)\equiv 1$, первое слагаемое имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}\big(h(x)\frac{\partial u}{\partial t}\big)$, где функция $h(x)\in C^{2m}[0,1]$, $h(x)\ge 0$ и удовлетворяет условиям $h'(0)=$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00408.

$h'(1) = h'''(0) = h'''(1) = \cdots = h^{(2m-1)}(0) = h^{(2m-1)}(1) = 0$, а граничные условия для $u(t,x)$ задаются специальным образом:

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial^{2m+2k-2} u(t,0)}{\partial x^{2m+2k-2}} = \frac{\partial^{2m+2k-2} u(t,1)}{\partial x^{2m+2k-2}} = 0. \qquad (5^*)$$

В этом случае $A = D^m$, $B = D^{m+k}$, где $D = -\frac{d^2}{dx^2}$ и функции из области определения оператора D удовлетворяют условиям $u(0) = u(1) = 0$. Отметим также, что здесь $C = BA^{-1} = D^k$, этот оператор является самосопряженным и порождает аналитическую полугруппу.

Абстрактная задача (5) подробно исследована в ([3], § 2–4; [4]), где проводится классификация подобных задач и приводятся теоремы о разрешимости задачи (5), когда оператор A или B соответственно является главным по задаче Коши или когда существует резольвента $(B + \lambda A + \lambda^2 I)^{-1}$ этих операторов, ведущая себя определенным образом.

В данной работе используется теорема из [7], отвечающая случаю, когда в уравнении нет главного по задаче Коши оператора, но, как сказано выше, это уравнение ведет себя как параболическое. Это позволило исследовать задачу (1)–(4), отличную от приведенной в ([3], § 4; [4]), где уравнение (1) рассматривается при четном m и нечетном k и специальных граничных условиях (5^*), но взятых только до порядка $m + k - 1$ включительно.

Отметим также, что в данной работе рассматриваются граничные условия (2)–(3) при $r \neq m$ и описывается область определения $\mathcal{D}(C)$ оператора C. Оказывается, что она имеет более сложную структуру, $\mathcal{D}(C)$ не является плотным в L_p множеством, оператор C не является самосопряженным. Тем не менее, устанавливается, что оператор C порождает некоторую бесконечно дифференцируемую полугруппу линейных ограниченных операторов, с помощью которой доказывается разрешимость задачи (5). Основной результат составляет

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1°. *функция* $a(x) \in C^{2k}[0,1]$, $a(x), a^{(2k)}(x) \geq a_0 > 0$, *функция* $b(x) \in C^{2k}[0,1]$, $b(x) \geq b_0 > 0$;

2°. $k \leq m$, $\frac{k^2 + (m-k)^2}{m} < \frac{1}{p} + r$;

3°. $\|f(t + \Delta t, x) - f(t,x)\|_{L_p} \leq c|\Delta t|^{\varepsilon} t^{-\mu}$ *при некоторых* $\varepsilon \in (\frac{m-r-p^{-1}}{2k}, 1]$, $\mu \in [0, 1-\varepsilon)$;

4°. $u_0(x) \in \mathcal{D}(B)$, $u_1(x) \in \mathcal{D}(A)$.

Тогда задача (1)–(4) *имеет единственное решение* $u = u(t,x)$ *такое, что функции* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}$ *непрерывны по* $t \in [0,1]$ *в норме пространства* L_p *(по* x*), а функции* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^{2m+1} u}{\partial t \partial x^{2m}}$, $\frac{\partial^{2m+2k} u}{\partial x^{2m+2k}}$ *непрерывны по* $t \in (0,1]$ *в норме пространства* L_p.

2. Построим сначала оператор A^{-1}. Этот оператор может быть задан с помощью функции Грина, однако удобнее следующее представление

$$A^{-1} f(x) = u(x) = c_1 \frac{(1-x)^m}{m!} + \cdots + c_m \frac{(1-x)^{2m+1}}{(2m-1)!} + \int_x^1 \frac{(s-x)^{2m-1}}{(2m-1)!} g(s) ds. \qquad (6)$$

Здесь $u(x)$ — решение дифференциального уравнения $u^{(2m)} = (-1)^m \frac{f(x)}{a(x)} \equiv g(x)$, удовлетворяющее условиям $u(1) = u'(1) = \cdots = u^{(m-1)}(1) = 0$. Из условий $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{c_1}{(m-i)!} + \frac{c_2}{(m-i+1)!} + \cdots + \frac{c_m}{(2m-i-1)!} + \frac{B_{2m-1-i}}{(2m-i-1)!} = 0$$

$(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ для чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Здесь и ниже обозначено $B_j = \int\limits_0^1 s^j g(s) ds$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Определитель этой системы $\Delta = \frac{0!1! \cdots (m-1)!}{m!(m+1)! \cdots (2m-1)!} \neq 0$. Поэтому числа c_j линейно выражаются через интегралы B_j:

$$c_j = a_{j1} \frac{B_m}{m!} + a_{j2} \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + a_{jm} \frac{B_{2m-1}}{(2m-1!)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \qquad (7)$$

при этом матрица коэффициентов (a_{ji}) невырожденная.

Покажем, что $a_{j1} \neq 0$. Для этого рассмотрим присоединенный определитель Δ_j определителя Δ

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \frac{1}{m!} \cdots \frac{1}{(m+j-2)!} & -\int\limits_0^1 \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} g(s)ds & \frac{1}{(m+j)!} \cdots \frac{1}{(2m-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{1!} \cdots \frac{1}{(j-1)!} & -\int\limits_0^1 \frac{s^m}{m!} g(s)ds & \frac{1}{(j+1)!} \cdots \frac{1}{m!} \end{vmatrix}.$$

При этом $c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, а число a_{j1} является отношением алгебраического дополнения Δ_j^1 элемента $-\int\limits_0^1 \frac{s^m}{m!} g(s)ds$ определителя Δ_j к определителю Δ. Вычислим Δ_j^1. Для этого введем вспомогательный функциональный определитель

$$\Delta_j^1(x) = (-1)^{m+j} \begin{vmatrix} \frac{x^m}{m!} & \cdots & \frac{x^{m+j-2}}{(m+j-2)!} & \frac{x^{m+j}}{(m+j)!} & \cdots & \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^j}{j!} & \frac{x^{j+2}}{(j+2)!} & \cdots & \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \end{vmatrix},$$

для которого $\Delta_j^1(1) = \Delta_j^1$. Применим к этому определителю известную формулу ([5], с. 126, № 57), в которой положим

$$\varphi(x) = x^m, \quad f_1(x) = \frac{1}{m!},\ f_2(x) = \frac{x}{(m+1)!}, \ldots, f_{m-1}(x) = \frac{x^{m-1}}{(2m-1)!}.$$

Тогда

$$\Delta_j^1(x) = (-1)^{m+j} x^{m(m-1)} \begin{vmatrix} \frac{1}{m!} & \cdots & \frac{x^{j-2}}{(m+j-2)!} & \frac{x^j}{(m+j)!} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(2m-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \frac{(j-2)!}{(m+j-2)!} & \frac{j(j-1)\cdots 3\cdot x^2}{(m+j)!} & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-j+2)x^{m-j+1}}{(2m-1)!} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{j(j-1)\cdots 2\cdot x}{(m+j)!} & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-j+1)x^{m-j}}{(2m-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot x}{(2m-1)!} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель распадается на произведение двух определителей, первый из которых равен $\frac{0!\cdot 1!\cdots(j-2)!}{m!(m+1)!\cdots(m+j-2)!}$. Ко второму определителю опять применяем ту же формулу из [5], после чего он становится треугольным (ниже главной диагонали стоят нули) и равен $\frac{j!(j+1)!\cdots(m-1)!}{(m-j)!(m+j)!(m+j+1)!\cdots(2m-1)!}$. Поэтому $a_{j1} = \frac{\Delta_j^1}{\Delta} = (-1)^{m+j} \frac{(m+j-1)!}{(j-1)!(m-j)!}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Таким образом, оператор A^{-1} задается формулой (6), коэффициенты c_j определяются формулами (7), $a_{j1} \neq 0$.

3. Выясним, какова область определения оператора

$$C = BA^{-1} = (-1)^k b(x) \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \frac{1}{a(x)}.$$

Для этого потребуем, чтобы $u = A^{-1}g \in \mathcal{D}(B)$. Это означает, что функция $u(x)$ из (6) должна удовлетворять условиям

$$u^{(m+r)}(0) = u^{(m+r+1)}(0) = \cdots = u^{(m+r+k-1)}(0) = 0,$$
$$u^{(m+r)}(1) = u^{(m+r+1)}(1) = \cdots = u^{(m+r+k-1)}(1) = 0.$$

Пусть сначала $r + k \leq m$. Тогда из этих условий в точке $x = 1$ и формулы (6) следует

$$c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_{r+k} = 0. \tag{7*}$$

Следовательно, и в (7) выполняется (7^*). Отметим, что в равенствах (7) строки коэффициентов $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$ линейно независимы, т.к. матрица этих коэффициентов (a_{ji}) невырождена. Поэтому ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{r+1\,1} & \dots & a_{r+1\,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+k\,1} & \dots & a_{r+k\,m} \end{pmatrix}$$

равен k, и равенства (7^*) методом исключения с учетом того, что $a_{r+j\,1} \neq 0$, могут быть преобразованы к следующим:

$$\begin{aligned} &B_m + b_{11}B_{m+1} + b_{12}B_{m+2} + \dots + b_{1m}B_{2m-1} = 0, \\ &B_{m_1} + b_{21}B_{m_1+1} + b_{22}B_{m_1+2} + \dots + b_{2,2m-1-m_1}B_{2m-1} = 0, \\ &B_{m_{k-1}} + b_{k1}B_{m_{k-1}-1} + b_{k2}B_{m_{k-1}+2} + \dots + b_{k,2m-1-m_{k-1}}B_{2m-1} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $m < m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} \leq 2m-1$, b_{ij} — некоторые числа.

Чтобы удовлетворить оставшимся условиям $u^{(m+r)}(0)=u^{(m+r+1)}(0) = \dots = u^{(m+r+k-1)}(0)=0$, в формуле (6) после дифференцирования ее соответствующее количество раз положим $x = 0$. В результате получим равенства

$$\frac{c_{r+k+1}}{n!} + \frac{c_{r+k+2}}{(n+1)!} + \dots + \frac{c_m}{(m-r-k+n-1)!} + \frac{B_{m-r-k+n-1}}{(m-r-k+n-1)!} = 0, \tag{9}$$

в которых коэффициенты c_j содержат интегралы со степенями s выше, чем $m-1$.

Таким образом, область определения оператора BA^{-1} состоит из функций класса W_p^{2k}, удовлетворяющих условиям (8) и (9). Объединяя эти условия, запишем их в виде

$$\int_0^1 s^\nu g(s)ds + \int_0^1 P_\nu(s)g(s)ds = 0, \tag{10}$$

где $\nu = m-r-k, m-r-k+1, \dots, m-r-1, m, m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ ($m < m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} \leq 2m-1$), а $P_\nu(s)$ — многочлены степени большей, чем ν. Для краткости левые части в равенствах (10) обозначим $L_1(g), L_2(g), \dots, L_{2k}(g)$ соответственно.

Обратимся к случаю $1 \leq m < r+k$. Чтобы удовлетворить условиям $u^{(m+r)}(1) = u^{(m+r+1)}(1) = \dots = u^{(m+r+k-1)}(1) = 0$, положим в формуле (6) $x = 1$. Тогда

$$c_{r+1} = 0,\ c_{r+2} = 0, \dots, c_m = 0. \tag{11}$$

Поскольку $m < r+k$, то возникают еще и условия

$$g(1) = 0,\ g'(1) = 0, \dots, g^{(r+k-m-1)}(1) = 0. \tag{12}$$

При $x = 0$ имеем

$$\begin{gathered} g(0) = 0,\ g'(0) = 0, \dots, g^{(r+k-m-1)}(0) = 0, \\ B_0 = 0,\ B_1 = 0, \dots, B_{m-r-1} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Отметим, что условия (11) можно также записать в виде (10) при $\nu = m, m_1, m_2, \dots, m_{m-r-1}$, где $m < m_1 < m_2 < \dots < m_{m-r-1} \leq 2m-1$.

Таким образом, в случае $1 \leq m < r+k$ функции из области определения оператора BA^{-1} должны удовлетворять условиям (10) при $\nu = m, m_1, m_2, \dots, m_{m-r-1}$ и условиям (12)–(13).

4. Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R_\varepsilon > 0$, что в области $|\arg\lambda| < \pi - \varepsilon$, $|\lambda| \geq R_\varepsilon$ комплексной плоскости у оператора BA^{-1} существует резольвента, для которой*

$$\|(BA^{-1} + \lambda I)^{-1}\| = [c + R(\lambda)]|\lambda|^{-\varkappa} + c|\lambda|^{-1}, \tag{14}$$

где $\varkappa = 1 + \frac{1}{2kp} + \frac{r}{2k} - \frac{m}{2k}$, $|R(\lambda)| \leq c|\lambda|^{-1}$, $c \neq 0$.

Доказательство. Пусть сначала $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 1$. Обозначим через $\omega_1 = 1, \omega_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{k}\right), \ldots, \omega_{2k} = \exp\left(i\pi\frac{2k-1}{k}\right)$ все корни степени $2k$ из 1, занумерованные в порядке возрастания аргумента. Пусть ρ — комплексное число. Для $\delta > 0$ положим $S_\delta = \left\{\rho : \frac{\pi}{2}+\delta < \arg\rho < \frac{\pi}{k}+\frac{\pi}{2}-\delta\right\}$. При этом, если $\rho \in S_\delta$ и $|\rho| \geq R_\delta > 0$ (R_δ — некоторая константа, зависящая от δ), то ([1], с. 22) $\operatorname{Re}\rho\omega_j \leq -|\rho|\sin\delta$ при $j = 1, 2, \ldots, k$ и $\operatorname{Re}\rho\omega_j \geq |\rho|\sin\delta$ при $j = k+1, k+2, \ldots, 2k$. Введем обозначение

$$e_j(x,\rho) = \begin{cases} \exp(\rho\omega_j x), & j = 1, 2, \ldots, k; \\ \exp[\rho\omega_j(x-1)], & j = k+1, k+2, \ldots, 2k. \end{cases}$$

Обратимся теперь к резольвентному уравнению $(-1)^k u^{(2k)} + \lambda u = f(x)$. Положим $\lambda = (-1)^{k+1}\rho^{2k}$, где $\rho \in S_\delta$. Тогда $u^{(2k)} - \rho^{2k}u = f_1(x)$, $f_1(x) = (-1)^k f(x)$. Рассмотрим соответствующую краевую задачу. Ее решение ищем в виде $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1(x) = \frac{1}{2k\rho^{2k-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\int_0^x \omega_j f_1(s)\exp[\rho\omega_j(x-s)]ds - \sum_{j=k+1}^{2k}\int_x^1 \omega_j f_1(s)\exp[\rho\omega_j(x-s)]ds\right),$$

$$u_2(x) = \sum_{j=1}^{2k} A_j e_j(x,\rho).$$

Константы A_j подберем так, чтобы удовлетворить граничным условиям. В случае $r+k \leq m$, подставив $u_2(x)$ в условия (10), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно A_j. Определитель этой системы обозначим $B(\rho)$. Имеют место формулы

$$\int_0^1 x^n \exp(\rho\omega_j x)dx = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(\rho\omega_j)^{n+1}} + \frac{R(\rho)}{\rho^{n+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

(здесь и дальше $R(\rho)$ — непрерывная функция, для которой $|R(\rho)| \leq c|\rho|^{-1}$),

$$\int_0^1 x^n \exp[\rho\omega_j(x-1)]dx = \frac{1}{\rho\omega_j} - \frac{n}{(\rho\omega_j)^2} + \frac{n(n-1)}{(\rho\omega_j)^3} - \cdots +$$
$$+ (-1)^n n!/(\rho\omega_j)^{n+1} \equiv Q_j(n,\rho), \quad j = k+1, k+2, \ldots, 2k.$$

В силу этих формул и условий (10) главная часть определителя $B(\rho)$ при $\rho \to \infty$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{(-1)^{m-r-k+1}(m-r-k)!}{(\rho\omega_1)^{m-r-k+1}} & \cdots & \frac{(-1)^{m-r-k+1}(m-r-k)!}{(\rho\omega_k)^{m-r-k+1}} & Q_{k+1}(m-r-k,\rho) & \cdots & Q_{2k}(m-r-k,\rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-1)^{m-r}(m-r-1)!}{(\rho\omega_1)^{m-r}} & \cdots & \frac{(-1)^{m-r}(m-r-1)!}{(\rho\omega_k)^{m-r}} & Q_{k+1}(m-r-1,\rho) & \cdots & Q_{2k}(m-r-1,\rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_{k+1}(m,\rho) & \cdots & Q_{2k}(m,\rho) \\ 0 & \cdots & 0 & Q_{k+1}(m_1,\rho) & \cdots & Q_{2k}(m_1,\rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_{k+1}(m_{k-1},\rho) & \cdots & Q_{2k}(m_{k-1},\rho) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Этот определитель распадается на произведение двух определителей, первый из которых равен $c\rho^{-\frac{(2m-2r-k+1)k}{2}}$. Главная часть при $\rho \to \infty$ второго определителя имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho\omega_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{\rho\omega_{2k}} \\ \frac{1}{\rho\omega_{k+1}} - \frac{m_1}{(\rho\omega_{k+1})^2} & \cdots & \frac{1}{\rho\omega_{2k}} - \frac{m_1}{(\rho\omega_{2k})^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix}\frac{1}{\rho\omega_{k+1}} - \frac{m_{k-1}}{(\rho\omega_{k+1})^2} + \cdots + \\ +(-1)^{k-1}\frac{m_{k-1}(m_{k-1}-1)\cdots(m_{k-1}-k+2)}{(\rho\omega_{k+1})^k}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}\frac{1}{\rho\omega_{2k}} - \frac{m_{k-1}}{(\rho\omega_{2k})^2} + \cdots + \\ +(-1)^k\frac{m_{k-1}(m_{k-1}-1)\cdots(m_{k-1}-k+2)}{(\rho\omega_{2k})^k}\end{matrix} \end{vmatrix}.$$

После элементарных преобразований, получим, что этот определитель равен $c\rho^{-\frac{k(k+1)}{2}}$. Поэтому $B(\rho) = [\theta + R(\rho)]\rho^{-(m-r+1)k}$ ($\theta \neq 0$). Рассмотрим присоединенный определитель $B_j(\rho)$. Он имеет такую же структуру, как и $B(\rho)$, только j-й столбец состоит из элементов $-L_1u_1, -L_2u_1, \dots, -L_{2k}u_1$. Раскладывая этот определитель по элементам j-го столбца, получим

$$B_j(\rho) = \sum_{i=1}^{k} L_iu_1(\theta_{ij} + R_{ij}(\rho))\rho^{-(m-r+1)k+m-r-k+i} + \sum_{i=k+1}^{2k} L_iu_1(\theta_{ij} + R_{ij}(\rho))\rho^{-(m-r+1)k+i-k}.$$

Здесь θ_{ij} — некоторые числа, $|R_{ij}(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$. Среди слагаемых, составляющих определитель $B_j(\rho)$, главную часть при $\rho \to \infty$ представляет слагаемое $L_ku_1(\theta_{kj} + R_{kj}(\rho))\rho^{-(m-r+1)k+m-r}$, поскольку $k \le m - r$. При этом среди чисел θ_{kj} есть отличные от нуля, например θ_{k1}. Действительно, θ_{k1} есть алгебраическое дополнение к k-му элементу первого столбца определителя (15). Это алгебраическое дополнение имеет ту же структуру, что и сам определитель (15), только левый верхний минор имеет размеры $(k-1) \times (k-1)$, поэтому $\theta_{k1} \ne 0$. Теперь можно получить выражение для коэффициентов A_j при $\rho \to \infty$

$$A_j = \frac{B_j(\rho)}{B(\rho)} = L_ku_1(\theta_{kj} + R_j(\rho))\rho^{m-r},$$

где $|R_j(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$. Следовательно,

$$u_2(x) = \rho^{m-r}L_ku_1\Big(\sum_{j=1}^{2k}\theta_{kj}e_j(x,\rho) + R(\rho)\Big)$$

и среди чисел θ_{kj} есть отличные от нуля.

Рассмотрим $L_ku_1 = \int\limits_0^1 [x^k + P_k(x)]u_1(x)dx$. Подставим в интеграл выражение для $u_1(x)$, поменяем порядок интегрирования и вычислим внутренние интегралы. В результате получим

$$L_ku_1 = \frac{1}{2k\rho^{2k-1}}\Big[\int_0^1 \sum_{j=1}^{k}\Big\{-\frac{s^k}{\rho\omega_j} + \frac{R(s,\rho)}{\rho\omega_j}\Big\}\omega_j f_1(s)ds -$$
$$- \int_0^1 \sum_{j=1+k}^{2k}\Big\{\frac{s^k}{\rho\omega_j} + \frac{R(s,\rho)}{\rho\omega_j}\Big\}\omega_j f_1(s)ds\Big] = -\rho^{-2k}\Big[\int_0^1 s^k f_1(s)ds + R(\rho)\Big],$$

где $|R(s,\rho)| \le c|\rho|^{-1}$, $|R(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$.

Учитывая, что $\|e_j\| = c|\rho|^{-1/p}(1 + R(\rho))$, вычислим норму

$$\|u_2\| = c|\rho|^{m-r-2k-1/p}\Big(\Big|\int_0^1 s^k f_1(s)ds\Big| + R(\rho)\Big).$$

Поскольку $\|u_1\| \le c|\rho|^{-2k}\|f\|$ и $|\lambda| = |\rho|^{2k}$, отсюда вытекает (14). Случай $m < r + k$ рассматривается аналогично.

Обратимся теперь к уравнению (1) с переменными коэффициентами и рассмотрим соответствующее резольвентное уравнение $b(x)\big[\frac{w}{a(x)}\big]^{(2k)} + (-1)^k\lambda w = f(x)$. Положим $v = \frac{w}{a(x)}$, $c(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, $g(x) = \frac{f(x)}{b(x)}$, тогда получим уравнение $v^{(2k)} + (-1)^k\lambda c(x)v = g(x)$. Введем новую переменную $t = \frac{1}{h}\int\limits_0^x \sqrt[2k]{c(s)}ds$ ([6], с. 87), где $h = \int\limits_0^1 \sqrt[2k]{c(s)}ds$. В результате замены получим уравнение

$$v^{(2k)} + p_1(t)v^{(2k-1)} + \dots + p_{2k}(t)v + (-1)^k\lambda v = \frac{g(x(t))}{c(x(t))},$$

в котором $p_1(t) \ne 0$, поэтому ([6], § 4) оно имеет фундаментальную систему решений $y_j = e_j(t,\rho) + R_j(t,\rho)$, где $|R_j(t,\rho)| \le c|\rho|^{-1}$. Следовательно, для этого уравнения остаются справедливыми предыдущие выкладки (с точностью до слагаемых более высокого порядка малости при $\rho \to \infty$), что и завершает доказательство теоремы 2.

5. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Разрешимость задачи (5) дает

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

1°. *существуют бесконечно дифференцируемые полугруппы* $\exp(-tA)$ *и* $\exp(-tBA^{-1})$, *порожденные операторами* A *и* BA^{-1} *соответственно, для которых справедливы оценки*

$$\|A^n \exp(-tA)\| \le Mt^{-\varkappa(n)}, \tag{16}$$

где $n = 0, 1, 2$, $\varkappa(0) = \alpha$, $\varkappa(1) = \beta$, $\varkappa(2) = \gamma$,

$$\|(BA^{-1})^n \exp(-tBA^{-1})\| \le Mt^{-\varkappa_1(n)}, \tag{17}$$

где $n = 0, 1, 2$, $\varkappa_1(0) = \alpha_1$, $\varkappa_1(1) = \beta_1$, $\varkappa_1(2) = \gamma_1$ *и* $\alpha + 1 \le \beta \le \gamma - 1$, $\alpha_1 + 1 \le \beta_1 \le \gamma_1 - 1$, $\alpha + \beta_1 < 2$, $\alpha_1 + \beta < 2$;

2°. *оператор* $BA^{-(1+q)}$ *ограничен при некотором* q,

$$0 \le q < \min\left\{\frac{2 - \beta_1 - \alpha}{\beta - \alpha},\ \frac{2 - \beta - \alpha_1}{\gamma - \beta}\right\};$$

3°. $\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \le c|\Delta t|^\varepsilon t^{-\mu}$ *при* $\max\left\{\frac{b-1}{b-a}, \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 - \alpha_1}\right\} < \varepsilon \le 1$, $0 \le \mu < \min\{1 - \varepsilon, 1 - a\}$, *где* $a = \max\{\alpha + \beta_1 - 1, \alpha_1 + \beta - 1\}$, $b = \max\{\alpha + \gamma_1 - 1, \alpha_1 + \gamma - 1\}$;

4°. $u_0 \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in \mathcal{D}(A)$.

Тогда задача (5) *имеет единственное решение* $u = u(t)$ *такое, что функции* $u'(t)$, $Au(t)$ *непрерывны при* $t \ge 0$, *а функции* $u''(t)$, $Au'(t)$, $Bu(t)$ *непрерывны при* $t > 0$.

Проверим, что для операторов A и B, введенных в п. 1, выполнены условия этой теоремы.

Оператор A порождает аналитическую полугруппу и для нее $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Для резольвенты оператора BA^{-1} выполнено условие (14), поэтому ([1], теорема 3.1) оценки (17) справедливы при $\alpha_1 = 1 - \varkappa$, $\beta_1 = 2 - \varkappa$, $\gamma_1 = 3 - \varkappa$, и, следовательно, выполняется условие 1° теоремы 3.

Рассмотрим оператор $BA^{-(1+q)} = BA^{-1}A^{-q} = \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}A^{-q}$. Для оператора A заданы граничные условия Дирихле, поэтому [8] оператор $\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}A^{-q}$ ограничен при $q \ge \frac{2k}{2m} = \frac{k}{m}$. Из условия $\frac{k^2+(m-k)^2}{m} < \frac{1}{p} + r$ следует неравенство

$$\frac{k}{m} < 1 + \frac{1}{2kp} + \frac{r}{2k} - \frac{m}{2k} = \varkappa.$$

Оно означает, что выполнено условие 2 теоремы 3, т. к.

$$\min\left\{\frac{2 - \beta_1 - \alpha}{\beta - \alpha},\ \frac{2 - \beta - \alpha_1}{\gamma - \beta}\right\} = \varkappa.$$

Наконец, условия 3 и 4 теоремы 1 обеспечивают выполнение условий 3 и 4 теоремы 3 соответственно. Теорема 1 доказана.

Литература

1. Якубов С.Я. *Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения.* – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
2. Favini A., Yagi A. *Abstract second order differential equations with applications* // Funkcialaj Ekvacioj. – 1995. – № 38. – P. 81–99.
3. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи.* – М.: Физматлит, 1995. – 166 с.
4. Мельникова И.В., Филинков А.И. *Корректность дифференциально-операторных задач.* II: *Задача Коши для полного уравнения второго порядка* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Функц. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1996. – Т. 39.
5. Полиа Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Часть вторая. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

6. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.
7. Сильченко Ю.Т. *Разрешимость задачи Коши для линейного уравнения второго порядка с неплотно заданными операторными коэффициентами, порождающими полугруппы с особенностями* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 40–49.
8. Евзеров И.Д., Соболевский П.Е. *Дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 2. – С. 228–240.

Воронежский государственный университет

Поступила
22.01.1999