И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.983:517.982

А.В. МЕЗЕНЦЕВ

КОРРЕКТНОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ КОШИ С ГЕНЕРАТОРАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

Введение

Исследованию важных для приложений вырожденных задач

$$Bu'(t) = Fu(t), \;\; t \in [0,T), \quad u(0) = x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}Bv(t) = Fv(t), \;\; t \in [0,T), \;\; Bv(0) = x, \;\; \ker B \neq \{0\}, \;\; T \leq \infty, \tag{2}$$

посвящено в последнее время много работ (напр., [1]–[3]). Для изучения разрешимости и построения решения задач (1), (2) используются два подхода. Первый основан на спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов B и F (напр., [2], [4], [5]). Второй подход основан на использовании линейного дифференциального включения с линейным многозначным оператором $\mathcal{A}$ в банаховом пространстве X

$$u'(t) \in \mathcal{A}u(t), \;\; t \geq 0, \;\; u(0) = x, \quad \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X, \tag{3}$$

и обобщающей включения теории линейных отношений (см. [3], [6]–[10]). В этих работах получены различные условия существования и единственности решения вырожденных задач в терминах существования псевдорезольвенты, в терминах порождения оператором $\mathcal{A}$ полугрупп операторов и в терминах преобразования Лапласа от полугрупп, обобщающие условия для задачи Коши с однозначным оператором. При этом получить критерий корректности удается лишь при некоторых дополнительных условиях на исходные данные, обобщающих условие плотности области определения и непустоты множества регулярных точек генератора C_0-полугруппы [3], [8], [9].

В работе [9] для исследования корректности вырожденных задач вида (3) была построена техника вырожденных полугрупп с многозначными генераторами. На ее основе показано, как корректность задачи на различных подмножествах пространства X связана с существованием n раз интегрированной полугруппы и соответствующими оценками на резольвенту оператора $\mathcal{A}$. Кроме того, показано, как корректность задачи (3) на некоторых подмножествах из $D(\mathcal{A})$ связана с корректностью соответствующей задачи в пространстве абстрактных распределений. Основные результаты в этом направлении получены для случая, когда оператор $\mathcal{A}$ порождает локальную n раз интегрированную полугруппу. В свете полученных результатов очень важным является вопрос о роли дополнительных условий, которые наложены на пространство и оператор $\mathcal{A}$ для получения критерия корректности ((n,ω)-корректности).

В данной работе исследованы проблемы корректности задачи (3) для случая, когда оператор $\mathcal{A}$ порождает вырожденную n раз интегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу. При этом в разделе 1 основное внимание уделено влиянию дополнительных условий, накладываемых на оператор $\mathcal{A}$ при исследовании связей между корректностью, существованием

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00310.

некоторой полугруппы и оценками на резольвенту в экспоненциальном случае. Такими условиями для вырожденной задачи (3) являются существование регулярной точки оператора $\mathcal{A}$ и разложение пространства X в прямую сумму при некотором $n \in \mathbb{N}$:

$$(d) \qquad X = \mathcal{A}^{n+1}0 \oplus X_{n+1}, \quad X_{n+1} = \overline{D(\mathcal{A}^{n+1})}.$$

В разделе 2 доказана эквивалентность корректности задачи Коши в пространстве распределений и существования вырожденной экспоненциально ограниченной n раз интегрированной полугруппы. В разделе 3 на основе полученных результатов доказана теорема о связях между корректностью задачи (3) на подмножествах $D(\mathcal{A})$, существованием n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы, оценками на резольвенту оператора $\mathcal{A}$ и корректностью в пространстве распределений. Основная теорема представлена в виде схемы, из которой отчетливо видна роль дополнительных условий при доказательстве каждой импликации.

1. Корректность задачи Коши на подмножествах из $D(\mathcal{A})$ и ее связь с существованием вырожденной интегрированной полугруппы

Будем рассматривать задачу (3), не являющуюся равномерно корректной. Существуют два подхода к определению более слабой корректности таких задач. В первом подходе решение строится на подмножествах из $D(\mathcal{A})$ и его устойчивость рассматривается относительно изменений начальных условий по некоторой граф-норме, более сильной, чем исходная норма. Во втором строится обобщенное решение для начальных условий из пространства X.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Задача (3) называется (n,ω)-корректной на $D \subset D(\mathcal{A}^n)$, если для любого $x \in D$ существует единственное решение $u(t)$, $t \geq 0$, такое, что

$$\|u(t)\| \leq Ce^{\omega t}\|x\|_n, \quad \|x\|_n := \sum_{k=0}^{n} \|\mathcal{A}^k x\|, \quad C > 0,$$

где $\|\mathcal{A}^k x\|$ — фактор-норма элемента $\{\mathcal{A}^k x\}$ в пространстве $X/\mathcal{A}^k 0$.

Для краткости здесь и далее в тексте этой работы для основных утверждений и условий введем специальные обозначения. Так, для (n,ω)-корректности символ

(W_n) означает, что задача (3) (n,ω)-корректна на $D(\mathcal{A}^{n+1})$.

Для исследования корректности задачи (3) на подмножествах из $D(\mathcal{A})$ в [9] была построена техника вырожденных интегрированных полугрупп.

Определение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Однопараметрическое семейство ограниченных линейных операторов $\{V(t),\ t \geq 0\}$ на X называется *вырожденной экспоненциально ограниченной* (*ω-экспоненциально ограниченной*) *n раз интегрированной полугруппой*, если

(V1) $V(t)V(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^s [(s-r)^{n-1}V(t+r) - (t+s-r)^{n-1}V(r)]dr$, $s,t \geq 0$;
(V2) $V(t)$ сильно непрерывна по t;
(V3) $\exists K > 0$, $\omega \in \mathbb{R} : \|V(t)\| \leq Ke^{\omega t}$, $t \geq 0$;
(V4) $\ker V := \{x \in X \mid \forall t \geq 0\ V(t)x = 0\} \neq \{0\}$.

Для генератора вырожденной экспоненциально ограниченной n раз интегрированной полугруппы в [9] вводится следующее

Определение 3. Пусть $\{V(t),\ t \geq 0\}$ — вырожденная экспоненциально ограниченная n раз интегрированная полугруппа. Генератором этой полугруппы называется линейный многозначный замкнутый оператор $\mathcal{A}$, определяемый соотношением

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}V(t)dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega. \tag{4}$$

Здесь оператор $R_{\mathcal{A}}(\lambda) := (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ является псевдорезольвентой оператора $\mathcal{A}$, т. к. для него выполнено резольвентное тождество, но $\ker(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}0 \neq \{0\}$.

Можно показать, что такое определение генератора эквивалентно следующему (см. [9]).

Определение 4. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный замкнутый многозначный оператор на X. Если существует сильно непрерывное семейство экспоненциально ограниченных операторов $\{V(t),\, t \geq 0\}$ таких, что выполняются соотношения

$$V(t)x - \frac{t^n}{n!}x = \int_0^t V(s)\mathcal{A}x\,ds, \quad x \in D(\mathcal{A}); \tag{5}$$

$$V(t)x - \frac{t^n}{n!}x \in \mathcal{A}\int_0^t V(s)x\,ds, \quad x \in X, \tag{6}$$

то $\mathcal{A}$ называют генератором n раз интегрированной вырожденной экспоненциально ограниченной полугруппы $\{V(t),\, t \geq 0\}$.

При исследовании (n,ω)-корректности будут использованы оба определения, а при исследовании обобщенной корректности — определение 4. Для исследования корректности задачи необходимо получить некоторое конструктивное для практической проверки условие. Таким условием для вырожденной задачи Коши является выполнение оценок на псевдорезольвенту оператора $\mathcal{A}$:

$$(R_n) \qquad \exists M > 0,\ \omega \geq 0 : \left\| \frac{d^k}{d\lambda^k}\frac{R_{\mathcal{A}}(\lambda)}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{Mk!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Далее
(G_n) линейный многозначный оператор $\mathcal{A}$ является генератором n раз интегрированной экспоненциально ограниченной вырожденной полугруппы для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Связь между (n,ω)-корректностью и оценками на резольвенту удается получить с помощью техники интегрированных полугрупп. С учетом введенных ранее обозначений сформулируем

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный многозначный оператор, тогда справедливы следующие импликации:*

$$(W_n)^{d,\rho} \Longrightarrow (G_n) \Longrightarrow (R_n).$$

Здесь (ρ) и (d) соответственно означают следующие условия:
(ρ) $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$,
(d) $X = \mathcal{A}^{n+1}0 \oplus X_{n+1}$, $X_{n+1} = \overline{D(\mathcal{A}^{n+1})}$.

Доказательство. Импликации $(G_n) \Longrightarrow (R_n)$ доказываются, как и в невырожденном случае, на основе свойств преобразования Лапласа. Это возможно ввиду того, что определение 3 генератора n раз интегрированной вырожденной экспоненциально ограниченной полугруппы по форме совпадает с определением для невырожденной полугруппы (хотя по сути в невырожденном случае это обычный оператор, а для вырожденной полугруппы генератор оказывается многозначным оператором). Из равенства (4) следует оценка (R_n) для $R_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$.

Доказательство импликации $(W_n) \Longrightarrow (G_n)$ дано в [9] в предположении выполнения условия (d) и условия $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > \omega\} \neq \emptyset$. Проведем его, ослабив второе условие до условия (ρ). В силу корректности задачи (3) определим оператор решения $U(t)x = u(t)$ на множестве $D_{n+1} = D(\mathcal{A}^{n+1})$. Учитывая условие (ρ), имеем ограниченный оператор $R := R_{\mathcal{A}}(\lambda) : X \to D(\mathcal{A})$. Функция $RU(t)x$, $x \in D_{n+1}$, в силу коммутируемости R с $\mathcal{A}$: $R\mathcal{A}x \in \mathcal{A}Rx$, $x \in D(\mathcal{A})$, является решением задачи (3) с начальными данными Rx, $x \in D_{n+1}$. Отсюда в силу единственности решения получим $U(t)Rx = RU(t)x$, $x \in D_{n+1}$, и равенство $\int\limits_0^t U(s)x\,ds = -U(t)Rx + Rx + \lambda\int\limits_0^t U(s)Rx\,ds$,

$x \in D_{n+1}$. Используя это свойство, последовательно определим операторы $U_k(t)$ на множествах $D_n \subset D_{n-1} \subset \cdots \subset D_{n+1-k} \subset \cdots \subset D_0 = X$ по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} &U_k(t)x := -U_{k-1}(t)Rx + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}Rx + \lambda\int_0^t U_{k-1}(s)Rx\,ds, \quad x \in D_{n+1-k}, \quad k = 2, \dots, n+1; \\ &U_1(t)x := -U(t)Rx + Rx + \lambda\int_0^t U(s)Rx\,ds, \quad x \in D_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Операторы $U_k(t)$ на D_{n+1-k} коммутируют с R и удовлетворяют оценке $\|U_k(t)x\| \le Ce^{\omega t}\|x\|_{n-k}$, $k = 1, \dots, n$, поэтому могут быть продолжены на $[D_{n+1-k}]_{n-k}$, где $[\ ]_{n-k}$ означает замыкание по граф-норме $\|\cdot\|_{n-k}$ (при $k = n$ получим $\overline{D(\mathcal{A})}$).

Теперь для того чтобы показать, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы $V(t) := U_n(t)$, в отличие от работы [9] воспользуемся определением 4. По индукции покажем, что $U_k(t)$ удовлетворяет уравнению (5) и включению (6) при $n = k$ соответственно на множествах D_{n+1-k} и $[D_{n+1-k}]_{n-k}$. Рассмотрим оператор $U_1(t)$. В силу корректности задачи (3) $\ker U = \{0\}$. Отсюда по формуле (7) получаем $\ker U_1 = \ker R = \mathcal{A}0$. Коммутируемость $U_1(t)$ и R на D_n следует из формулы (7) и того, что $U(t)$ коммутируют с R на множестве D_{n+1}. Из рекуррентной формулы (7) и соотношений $\ker U_1 = \mathcal{A}0$, $U_1(t)Rx = RU_1(t)x$, $x \in D_n$, получим $\ker U_k \subset \mathcal{A}0$ и $U_k(t)Rx = RU_k(t)x$, $x \in D_{n+1-k}$, $k = 1, \dots, n+1$.

Индукцию проведем по следующей схеме. Пусть для операторов $U_k(t)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} &U_k(t)x = \frac{t^k}{k!}x + \int_0^t U_k(s)\mathcal{A}x\,ds, \quad x \in D_{n+1-k}, \qquad k = 1, \dots, n; \\ &U_k(t)x \in \frac{t^k}{k!} + \mathcal{A}\int_0^t U_k(s)x\,ds, \quad x \in [D_{n+1-k}]_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Покажем, что соответствующие уравнение и включение выполнены для $U_{k+1}(t)$:

$$\begin{aligned} U_{k+1}(t)x &= -U_k(t)Rx + \frac{t^k}{k!}Rx + \lambda\int_0^t U_k(s)Rx\,ds = \\ &= -\int_0^t U_k(s)\mathcal{A}Rx + \lambda\int_0^t \left[\frac{s^k}{k!}Rx + \int_0^s U_k(\tau)\mathcal{A}Rx\,d\tau\right]ds = \\ &= -\int_0^t U_k(s)\mathcal{A}Rx\,ds + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}x + \int_0^t \frac{s^k}{k!}R\mathcal{A}x\,ds + \lambda\int_0^t\int_0^s U_k(\tau)\mathcal{A}Rx\,d\tau\,ds. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $(\lambda - \mathcal{A})Rx = x + \mathcal{A}0$ и $\ker U_k \subset \mathcal{A}0$, получим

$$\begin{aligned} U_k(s)\mathcal{A}Rx &= -U_k(s)(\lambda - \mathcal{A})Rx + \lambda U_k(s)Rx = -U_k(s) + \lambda U_k(s)Rx = \\ &= U_k(s)(\lambda R - R(\lambda - \mathcal{A}))x = U_k(s)R\mathcal{A}x, \quad x \in D_{n-k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} U_{k+1}(t)x &= \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}x - \int_0^t U_k(s)R\mathcal{A}x\,ds + \int_0^t \frac{s^k}{k!}R\mathcal{A}x\,ds + \lambda\int_0^t\int_0^s U_k(\tau)R\mathcal{A}x\,d\tau\,ds = \\ &= \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}x + \int_0^t U_{k+1}(s)\mathcal{A}x\,ds, \quad x \in D_{n-k}. \end{aligned}$$

Включение получается аналогично

$$U_{k+1}(t)x \in -\mathcal{A}\int_0^t U_k(s)Rs + \lambda\int_0^t \left[\frac{s^k}{k!}Rx + \mathcal{A}\int_0^s U_k(\tau)Rx\,d\tau\right]ds, \quad x \in D_{n-k}.$$

Учитывая замкнутость оператора $\mathcal{A}$, продолжая операторы $U_k(t)$ на $[D_{n+1-k}]_{n-k}$, $k = 1, \dots, n$, получим включение для $x \in [D_{n-k}]_{n-k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Так на n-м шаге получим включение на $\overline{D(\mathcal{A})}$. Теперь для того чтобы получить необходимую импликацию $(W_n)\ {}^{\rho,d}\Longrightarrow\ (G_n)$, используем условие (d): $X=\overline{D(\mathcal{A}^{n+1})}\oplus\mathcal{A}^{n+1}0$. Учитывая это разложение пространства, изменим первый шаг в построении операторов $U_k(t)$, вместо операторов $U(t)$ будем использовать $U_0(t)$, доопределенные на $\mathcal{A}0$:

$$U_0(t)x:=\begin{cases}U(t)x, & x\in[D_{n+1}]_n;\\ 0, & x\in\mathcal{A}0.\end{cases}$$

Операторы $U_0(t)$ заданы на $[D_{n+1}]_n\oplus\mathcal{A}0$. Операторы $U_n(t)$ будут определены на $X_{n+1}=\overline{D(\mathcal{A}^{n+1})}$ и на $\mathcal{A}^{n+1}0$ и, следовательно, на $X=X_{n+1}\oplus\mathcal{A}^{n+1}0$. Таким образом, на n-м шаге построим n раз интегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу. $\square$

Для доказательства импликации $(R_n)\Longrightarrow(W_n)$ понадобятся новые обозначения.

(G^{Lip}_{n+1}) Линейный многозначный оператор $\mathcal{A}$ является генератором $(n+1)$ раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы со свойством $\|V(t+h)-V(t)\|\le Ce^{\omega t}h$, $t\ge0$, $h\ge0$.

$(\overline{W}_n)$ Задача Коши (3) (n,ω)-корректна на множестве $R^{n+1}_A(\lambda)\overline{D(A)}$.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный замкнутый многозначный оператор, тогда справедлива следующая схема импликаций*:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & (W_n) & \stackrel{d}{\longleftarrow} & (\overline{W}_n)\\ (G_n) & & & & \uparrow\\ & \searrow & (R_n) & \longleftrightarrow & (G^{\mathrm{Lip}}_{n+1}).\end{array}$$

Доказательство. Импликацию $(G_n)\Longrightarrow(W_n)$ докажем по схеме Танаки–Оказавы [11]. Решение задачи построим в виде производной $V^{(n)}(t)x$ от n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы $\{V(t),\ t\ge0\}$ для $x\in D(\mathcal{A}^{n+1})$. По определению 4 для генератора интегрированной полугруппы выполняются уравнение и включение

$$V(t)x=\frac{t^n}{n!}x+\int_0^t V(s)\mathcal{A}x\,ds,\quad V(s)\mathcal{A}x\in\mathcal{A}V(s)x,\quad x\in D(\mathcal{A}),\quad t\ge0. \tag{8}$$

Отсюда по индукции можно доказать, что

$$V^{(k)}(t)x=\sum_{i=1}^{k}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\mathcal{A}^{k-i}x+V(t)\mathcal{A}^kx,\quad x\in D(\mathcal{A}^k),\quad t\ge0,\quad k=1,\dots,n. \tag{9}$$

Пусть $x\in D(\mathcal{A}^{n+1})$. Используя свойства (8), (9), можно показать, что $V^{(n)}(t)x$ является решением задачи Коши при данном n. Единственность и устойчивость устанавливаются так же, как и в невырожденном случае.

Доказательство эквивалентности $(R_n)\Longleftrightarrow(G^{\mathrm{Lip}}_{n+1})$ получается из интегрированной версии теоремы Арендта–Уиддера [12], которая утверждает следующее. Пусть для линейного многозначного оператора $\mathcal{A}$ выполнено условие (R_n). Тогда $\mathcal{A}$ является генератором $(n+1)$ раз интегрированной ω-экспоненциально ограниченной полугруппы $\{V(t),\ t\ge0\}$ с условием Липшица

$$\|V(t+h)-V(t)\|\le Ce^{\omega t}h,\quad t\ge0,\quad h\ge0.$$

Поскольку условие невырожденности в доказательстве этой теоремы нигде не используется, полугруппа здесь может быть и вырожденной. Применяя теорему, в вырожденном случае получаем, что для фиксированного $n\in\mathbb{N}$ оценки на резольвенту (R_n) эквивалентны условию (G^{Lip}_{n+1}), а это условие в силу предложения 1 в общем случае слабее (G_n). Поэтому естественно ожидать, что получить (n,ω)-корректность из условия (G^{Lip}_{n+1}) можно лишь при некоторых дополнительных условиях. Оказывается таким условием является разложение пространства (d). Без этого условия (n,ω)-корректность удается получить лишь на некотором более узком множестве, чем $D(\mathcal{A}^{n+1})$, а именно, будет справедлива импликация $(G^{\mathrm{Lip}}_{n+1}) \Longrightarrow (\overline{W}_n)$.

Доказательство импликации $(G^{\mathrm{Lip}}_{n+1}) \Longrightarrow (\overline{W}_n)$ приведено в работе [9]. Доказательство строится на последовательном дифференцировании соотношений, определяющих экспоненциально ограниченную $(n+1)$ раз интегрированную полугруппу

$$V(t)x = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}x + \int_0^t V(s)\mathcal{A}x\,ds, \quad V(t)\mathcal{A}x \in \mathcal{A}V(t)x, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

При этом следует отметить, что если предположить разложение пространства $(d) : X = \overline{D(\mathcal{A}^{n+1})} \oplus \mathcal{A}^{n+1}0$, то получим (n,ω)-корректность задачи (3) на множестве $D(\mathcal{A}^{n+1})$, а именно, справедлива импликация $(\overline{W}_n) \overset{d}{\Longrightarrow} (W_n)$.

2. Корректность задачи Коши в пространстве распределений и ее связь с существованием вырожденной интегрированной полугруппы

Другой подход к исследованию корректности задачи (3), не являющейся равномерно корректной, возникает при решении задачи в пространстве распределений. В отличие от первого подхода здесь гарантируется обобщенная корректность задачи для любых начальных данных из пространства X. Для того чтобы определить обобщенное решение задачи (3), сначала возьмем классическое решение задачи $u(t)$, $t \geq 0$, продолжим его нулем при $t < 0$ и будем рассматривать его как элемент U в пространстве распределений $\mathcal{D}'_0(X)$. Тогда получим

$$\int_0^\infty \varphi(t)u'(t)dt = -\langle U, \varphi' \rangle - \varphi(0) \in \mathcal{A}\int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt = \mathcal{A}\langle U, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{10}$$

(Здесь $\mathcal{D}'(X) := \mathcal{L}(\mathcal{D}, X)$, $\mathcal{D}$ — пространство функций Л. Шварца, $\mathcal{D}'_0(X)$ — подпространство распределений $\mathcal{D}'(X)$ с носителями в правой полуплоскости.) Из полученного включения (10) следует определение обобщенного решения.

Определение 5. Пусть $\mathcal{S}'_\omega(X) = \{U \in \mathcal{D}'_0(X) : e^{-\omega t}U \in \mathcal{S}'(X)\}$. Абстрактное распределение $U \in \mathcal{S}'_\omega(X_\mathcal{A})$ называют *решением задачи Коши* (3) *в смысле распределений*, если

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \ \ \langle U, \varphi' \rangle + \mathcal{A}\langle U, \varphi \rangle \ni -\langle \delta, \varphi \rangle x, \quad x \in X, \tag{11}$$

или эквивалентно, в терминах свертки $P * U \ni \delta \otimes x$, где

$$P := \delta' \otimes I - \delta \otimes \mathcal{A} \in \mathcal{S}'_\omega(\mathcal{L}(X_\mathcal{A}, X)), \quad X_\mathcal{A} := \{D(\mathcal{A}), \ \|x\|_1 = \|x\| + \|\mathcal{A}x\|\},$$
$$\langle \delta \otimes x, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle x, \quad \langle \delta' \otimes I, \varphi \rangle := \langle \delta', \varphi \rangle I, \quad \langle \delta \otimes \mathcal{A}, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle \mathcal{A}.$$

Здесь свертка двух распределений определяется на основе структурной теоремы, по которой любое распределение $U \in D'_0(X)$ локально может быть представлено в виде производной некоторой непрерывной функции $g^{(m)}$. Поэтому сверткой $P * U$ будет $(f * g)^{(n+m)}$, производная порядка $(n+m)$ от свертки двух непрерывных функций f и g, существующих по структурной теореме для распределений P и U. (Более подробное определение свертки распределений см. в [3], [13].)

Определение 6. Задача Коши (3) называется *корректной в смысле распределений*, если для любого $x \in X$ существуют единственное решение задачи (11) $U \in \mathcal{S}'_\omega(X_\mathcal{A})$ и для любой последовательности $x_n \to 0$ соответствующая последовательность решений $U_n \to 0$ в пространстве $\mathcal{S}'_\omega(X_\mathcal{A})$.

(W) Задача Коши (3) корректна в смысле распределений.

В работе [3] для невырожденной задачи показано, что корректность в пространстве распределений эквивалентна существованию распределения операторов решения, $S \in \mathcal{S}'_\omega(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$, удовлетворяющего уравнениям

$$P * S = \delta \otimes I_X, \quad S * P = \delta \otimes I_{X_A}.$$

Аналогичный результат верен и для вырожденной задачи. А именно, корректность в пространстве распределений задачи (3) эквивалентна следующему условию:

(S) существует распределение операторов решения, $S \in \mathcal{S}'_\omega(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$ такое, что

$$P * S \ni \delta \otimes I_X, \quad S * P = \delta \otimes I_{X_A}. \tag{12}$$

Доказательство проводится по той же схеме, но в данном случае необходимо показать, что распределение S вместо первого уравнения удовлетворяет включению. Используя эквивалентность условий (W) и (S), покажем связь между корректностью в пространстве распределений и существованием вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы. Доказательство этой связи будем проводить по следующей схеме: $(S) \Longrightarrow (G_n) \Longrightarrow (S)$.

Предложение 3. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ замкнут и существует распределение $S \in \mathcal{S}'_\omega(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$, являющееся единственным решением для включения и уравнения* (12)*. Тогда выполняется условие (G_n), т. е. $\mathcal{A}$ является генератором вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы.*

Доказательство. Так же, как и в невырожденном случае, доказательство основано на применении преобразования Лапласа. По определению преобразованием Лапласа от распределения $U \in \mathcal{S}'_\omega(X)$ называется функция

$$\mathcal{L}U(\lambda) = U(e^{-\lambda t}) = (e^{-\omega t}U)(\chi(t)e^{-(\lambda-\omega)t}) \quad (\operatorname{Re}\lambda > \omega),$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \le c < 0; \\ 1, & s \ge 0, \end{cases} \qquad \chi(s) \in C^\infty(R).$$

Преобразование Лапласа от множества значений многозначного оператора определяется так же, как и интеграл от множества значений. Используя свойство представления множества значений многозначного оператора (см. [7])

$$\mathcal{A}u = f + \mathcal{A}0, \quad u \in D(\mathcal{A}) \text{ для любого } f \in \mathcal{A}u$$

и замкнутость оператора $\mathcal{A}$, можно определить преобразование Лапласа от множества значений оператора $\mathcal{A}$ следующим образом: $\mathcal{L}\mathcal{A}u = \mathcal{L}f + \mathcal{A}0$. Тогда, применяя преобразование Лапласа к соотношениям (12), получим

$$\mathcal{L}S'(\varphi) - \mathcal{L}\mathcal{A}S(\varphi) \ni \mathcal{L}(\delta(\varphi))I_X, \quad \mathcal{L}S'(\varphi) - \mathcal{L}S(\varphi)\mathcal{A} = \mathcal{L}(\delta(\varphi))I_{X_A},$$
$$(\lambda - \mathcal{A})\mathcal{L}S(\lambda) \ni \langle e^{-\omega t}\delta(t), \chi(t)e^{-(\lambda-\omega)t}\rangle I_X =$$
$$= \langle e^{-\omega t}\delta(t), e^{-(\lambda-\omega)t}\rangle I_X = \langle \delta(t), e^{-\lambda t}\rangle I_X = e^{-\lambda 0} I_X = I_X.$$

Аналогично $\mathcal{L}S(\lambda)(\lambda - \mathcal{A}) = I_{X_A}$. Эти уравнения означают, что полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathcal{A}$ и $(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{L}S(\lambda)$. Поскольку $e^{-\omega t}S \in \mathcal{S}'(X)$, по лемме ([13], с. 465) имеем

$$\exists p \ge 0,\ C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \|(e^{-\omega t}S)(\varphi)\| \le C\|\varphi\|_{p,p}, \tag{13}$$

где $\|\varphi\|_{j,k} := \sup\limits_{0\le i\le k} \sup\limits_t (1+|t|)^j |\varphi^{(i)}(t)|$. Используя плотность пространства $\mathcal{S}$ в пространстве $\mathcal{S}^p(\mathbb{R})$ p раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|\cdot\|_{j,k}$ и оценку (13), можно продолжить

S на $\mathcal{S}^p(\mathbb{R})$. Рассмотрим функцию $\psi_{t,p}(s) = \chi(s)\eta_p(t-s) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$, где

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \le -1; \\ 1, & s \ge 0, \end{cases} \qquad \chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \eta_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{p+1}}{(p+1)!}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Положим $V(t) := \langle S, \psi_{t,p} \rangle \in \mathcal{L}(X, X_\mathcal{A})$. Тогда $\{V(t),\ t \ge 0\}$ — сильно непрерывное семейство операторов. Отображение $t \to e^{\omega s}\chi(s)\eta_p(t-s)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{S}^p(\mathbb{R})$ непрерывно, следовательно, $V(\cdot)$ является непрерывной функцией со значениями в $\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A})$. Поскольку носитель S принадлежит $[0, +\infty)$, а $\operatorname{supp}(e^{\omega s}\chi(s)\eta_p(t-s)) \subset [-1, t]$, то $V(t) = 0$ для $t \le 0$. Более того, из (13) следует оценка

$$\|V(t)\| = \|(e^{-\omega t}S)(e^{\omega s}\chi(s)\eta_p(t-s))\| \le C\|e^{\omega s}\chi(s)\eta_p(t-s)\|_{p,p} \le Me^{\omega t}(1+|t|)^{p+1}, \quad t \ge 0.$$

Пусть $\omega' > \omega$, тогда для любого $t \ge 0$ и некоторой константы $M > 0$ имеем $\|V(t)\| \le Me^{\omega' t}$.

Покажем, что S является n-й производной от $V(t)$ для $n = p+2$. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle V^{p+2}, \varphi \rangle = (-1)^{p+2} \int_0^\infty \varphi^{(p+2)}(t)V(t)dt = (-1)^{p+2} \int_0^\infty \varphi^{p+2}(t)\langle S(s), \chi(s)\eta_p(t-s)\rangle dt =$$
$$= \Big\langle S(s), \chi(s)(-1)^{p+2} \int_0^\infty \varphi^{p+2}(t)\eta_p(t-s)dt \Big\rangle = \langle S, \chi(s)\varphi(s)\rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

По свойству преобразования Лапласа

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{L}S(\lambda) = \mathcal{L}V^{(p+2)} = \lambda^{p+2}\mathcal{L}V = \lambda^{p+2}\langle e^{-\omega' t}V(t), \chi(t)e^{-(\lambda-\omega')t}\rangle =$$
$$= \lambda^{p+2}\langle V(t), e^{-\lambda t}\rangle = \lambda^{p+2} \int_0^\infty e^{-\lambda t}V(t)dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega'.$$

Отсюда следует, что в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega'$ оператор $\lambda^{p+2} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}V(t)dt$ является псевдорезольвентой оператора $\mathcal{A}$. Как отмечено в [9], оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет резольвентному тождеству тогда и только тогда, когда семейство сильно непрерывных экспоненциально ограниченных операторов $V(t)$ удовлетворяет полугрупповому свойству (V1). Отсюда следует, что $\{V(t),\ t \ge 0\}$ является вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппой с $n = p+2$, а оператор $\mathcal{A}$ — ее генератором.

Предложение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A}$ — генератор n раз интегрированной полугруппы $\{V(t),$ $t \ge 0\}$. Тогда существует распределение $S \in \mathcal{S}'_\omega(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$ такое, что выполняются соотношения* (12).

Доказательство. Определим распределение $S \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$ следующим образом:

$$S(\varphi) := (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)V(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Покажем, что так определенное распределение S удовлетворяет соотношениям (12). По определению для полугруппы $\{V(t), t \ge 0\}$ справедливы уравнение (5) и включение (6). Дифференцируя уравнение (5), получим

$$V'(t)x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + V(t)\mathcal{A}x, \quad t \ge 0, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

Отсюда для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(-1)^{n+1} \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)V(t)x\,dt = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x\,dt +$$
$$+ (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)V(t)\mathcal{A}x\,dt, \quad x \in D(\mathcal{A}),$$

или

$$S'(\varphi)x - S(\varphi)\mathcal{A}x = \varphi(0)x, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

Покажем включение. Умножая включение, определяющее интегрированную полугруппу на $(-1)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(t)$, $\varphi(t) \in \mathcal{D}$, учитывая замкнутость оператора $\mathcal{A}$, получим

$$(-1)^{n+1}\int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)V(t)x\,dt \in I_1 + I_2,$$

$$I_1 = (-1)^{n+1}\int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\frac{t^n}{n!}x\,dt = \varphi(0)x,$$

$$I_2 = (-1)^{n+1}\int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\mathcal{A}\left(\int_0^t V(s)x\,ds\right)dt =$$

$$= (-1)^{n+1}\mathcal{A}\left(\varphi^{(n)}(t)\int_0^t V(s)x\,ds\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)V(t)x\,dt\right) = (-1)^n\mathcal{A}\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)V(t)x\,ds$$

или

$$S'(\varphi)x - \mathcal{A}S(\varphi)x \ni \varphi(0)x, \quad x \in X. \tag{14}$$

Из (14) получим $\|S(\varphi)y\|_{X_\mathcal{A}} \le \|S(\varphi)y\| + \|S'(\varphi)y\| + |\varphi(0)|\,\|y\|$. Следовательно, $S(\varphi) \in \mathcal{L}(X, X_\mathcal{A})$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ и $S \in \mathcal{S}_0'(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$. Более того, экспоненциальная ограниченность $V(t)$ означает $\exists\omega \in \mathbb{R} : e^{-\omega t}S \in \mathcal{S}'(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$, следовательно, $S \in \mathcal{S}_\omega'(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$.

3. Теорема о связях

На основе доказанных предложений 1–4 можем сформулировать основной результат о связях между корректностью на подмножествах $D(\mathcal{A})$ ((n,ω)-корректностью), существованием вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы, оценками на резольвенту оператора $\mathcal{A}$ и корректностью в пространстве распределений. Учитывая введенные ранее обозначения, сформулируем основную теорему.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный замкнутый многозначный на X оператор. Тогда справедливы следующие импликации*:

$$\begin{array}{ccccccc}
(W) & \nwarrow & & {\scriptstyle d,\rho}\swarrow\!\!\nearrow & (W_n) & \overset{d}{\longleftarrow} & (\overline{W}_n) \\
\updownarrow & & (G_n) & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow \\
(S) & \nearrow & & \searrow & (R_n) & \longleftrightarrow & (G^{\mathrm{Lip}}_{n+1}),
\end{array}$$

где
(ρ) $\rho(\mathcal{A}) \ne \emptyset$;
(d) $X = \mathcal{A}^{n+1}0 \oplus X_{n+1}$, $X_{n+1} = \overline{D(\mathcal{A}^{n+1})}$;
(W) *задача Коши* (3) *корректна в смысле распределений;*
(S) *существует распределение операторов решения задачи* (12) $S \in \mathcal{S}_\omega'(\mathcal{L}(X, X_\mathcal{A}))$:

$$P * S \ni \delta \otimes I_X, \quad S * P = \delta \otimes I_{X_\mathcal{A}};$$

(G_n) *$\mathcal{A}$ является генератором n раз интегрированной экспоненциально ограниченной вырожденной полугруппы для некоторого $n \in \mathbb{N}$;*
(G^{Lip}_{n+1}) *линейный замкнутый многозначный оператор $\mathcal{A}$ является генератором $(n+1)$ раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы со свойством $\|V(t+h) - V(t)\| \le Ce^{\omega t}h$, $t \ge 0$, $h \ge 0$;*
(W_n) *задача Коши* (3) (n,ω)*-корректна на* $D(\mathcal{A}^{n+1})$;

$(\overline{W}_n)$ *задача Коши* (3) (n,ω)*-корректна на множестве* $R_A^{n+1}(\lambda)\overline{D(A)}$;
(R_n) *существуют действительные числа* $M > 0$, $\omega \geq 0$ *такие, что для любых* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} \frac{R_{\mathcal{A}}(\lambda)}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{Mk!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Литература

1. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования.* – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
2. Мельникова И.В., Альшанский М.А. *Корректность задачи Коши в банаховом пространстве: регулярный и вырожденный случаи* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Анализ-9. – М.: ВИНИТИ, 1995. – Т. 27. – С. 5–64.
3. Melnikova I.V., Filinkov A. *Abstract Cauchy problems: three approaches.* – Pure and Appl. Math.: Chapman and Hall/CRC, 2001. – 226 p.
4. Баскаков А.Г., Чернышев К.И. *Упорядоченные пары операторов и полугруппы* // Изв. РАЕН. МММИУ. – 1998. – Т. 2. – № 3. – С. 39–69.
5. Федоров В.Е. *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов* // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – № 3. – С. 173–200.
6. Knuckles C., Neubrander F. *Remarks on Cauchy problem for multi-valued linear operators* // Math. Res. Academie-Verlag: Berlin, 1994. – V. 82. – P. 174–187.
7. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* – Pure and Appl. Math.: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 313 p.
8. Мельникова И.В., Гладченко А.В. *Корректность задачи Коши для включений в банаховых пространствах* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361. – № 6. – С. 736–739.
9. Мельникова И.В. *Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 893–910.
10. Баскаков А.Г., Чернышев К.И. *Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы* // Функц. анализ и его прилож. – 2002. – Т. 36. – Вып. 4. – С. 65-70.
11. Tanaka N., Okazawa N. *Local C-semigroups and local integrated semigroups* // Proc. London Math. Soc. – 1990. – V. 61. – № 3. – P. 63–90.
12. Arendt W. *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems* // Israel J. Math. – 1987. – V. 59. – № 3. – P. 327–352.
13. Fattorini H.O. *The Cauchy problem.* – Addison–Wesley Publ. Co. Encyclop. Math. and Appl. – 1983. – V. 18. – 636 p.

Уральский государственный университет

Поступила 06.05.2002