ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.968

Т.О. КОЛБИНЕВА, З.Б. ЦАЛЮК

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n K_j(t-s)a_j(s)x(s)ds + f(t), \tag{1}$$

где K_j, a_j, f — непрерывные на $[0,\infty)$ комплекснозначные функции.

Если $a_j(t) = \mathrm{const}$ и $K_j \in L_1[0,\infty)$, то асимптотика решений уравнения (1) хорошо изучена (см., напр., [1]–[4]). Для периодических функций $a_j(t)$ асимптотика решений изучалась в [5], [6]. В данной статье рассмотрен случай, когда $a_j(t)$ имеют асимптотическое разложение по степенной шкале в окрестности $+\infty$:

$$a_j(t) \sim a_{j0} + \frac{a_{j1}}{t+1} + \cdots + \frac{a_{jk}}{(t+1)^k} + \cdots, \quad t\to\infty. \tag{2}$$

(Использование степеней $(t+1)^k$ вместо t^k вызвано лишь техническими удобствами.)

Предположим, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ и некотором μ

$$e^{-\delta t}K_j(t) \in L_1[0,\infty), \quad K_j(t) = O(e^{\mu t}), \quad f(t) = O(e^{\mu t}). \tag{3}$$

Обозначим через λ_l расположенные в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ корни уравнения

$$\sum_{j=1}^n a_{j0}\widehat{K}_j(z) = 1, \tag{4}$$

где $\widehat{K}_j(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}K_j(t)dt$ – преобразование Лапласа, и пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ — все корни уравнения (4), для которых $\mathrm{Re}\,\lambda_k = \lambda = \max\limits_l \mathrm{Re}\,\lambda_l$.

Обозначим через $A_k = \Big\{u(t) \in C[0,\infty) : u(t) = \sum\limits_{j=0}^k \frac{u_j}{(t+1)^j} + o(\frac{1}{(t+1)^k})\Big\}$ и $A_\infty = \bigcap\limits_{k=0}^\infty A_k$. Таким образом, условие (2) означает, что $a_j \in A_\infty$.

Основной результат представляет

Теорема. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3) *с* $\mu < \lambda$ *и все корни* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *простые. Тогда решение* $x(t)$ *уравнения* (1) *представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j} b_j(t),$$

где α_j *– некоторые комплексные числа, а* $b_j \in A_\infty$.

Заметим, что при $r>1$ функции $b_j(t)$ определяются неоднозначно. Например, функции b_1 и b_2 можно заменить на $b_1(t)+(t+1)^{-\alpha_1}e^{-(c+\lambda_1)t}$ и $b_2(t)-(t+1)^{-\alpha_2}e^{-(c+\lambda_2)t}$, $c>0$. Однако можно показать, что при каждом j коэффициенты асимптотического разложения различных $b_j(t)$ одинаковы.

Докажем сначала три леммы.

Лемма 1. *Уравнение* (1) *эквивалентно некоторому уравнению вида*

$$x(t)=\int_0^t H(t,s)x(s)ds+\sum_{j=1}^r\int_0^t G_j(t,s)\int_0^s H(s,\tau)x(\tau)d\tau ds+\sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}y_j(t), \tag{5}$$

где $H(t,s)=\sum\limits_{l=1}^n h_l(t-s)\frac{\gamma_l(s)}{s+1}$, $G_j(t,s)=e^{\lambda_j(t-s)}(\frac{t+1}{s+1})^{\alpha_j}u_j(t)\frac{v_j(s)}{s+1}$, α_j *— некоторые комплексные числа,* $\gamma_l,u_j,v_j,y_j\in A_\infty$, $h_l(t)=o(e^{(\lambda-\varepsilon)t})$.

Доказательство. Положим $K_\delta(t)=e^{-\delta t}\sum\limits_{j=1}^n a_{j0}K_j(t)$, где $\delta\ge 0$. Пусть $\delta>0$, достаточно мало и таково, что уравнение (4) не имеет корней на прямой $\operatorname{Re}z=\delta$. Тогда уравнение (4) имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}z\ge\delta$ конечное число корней $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ целой кратности. Очевидно, уравнение $\widehat{K}_\delta(z)=1$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}z\ge 0$ корни $\lambda_1-\delta,\dots,\lambda_m-\delta$ и потому (см., напр., [1]) резольвента $R_\delta(t)$ ядра $K_\delta(t)$ представима в виде

$$R_\delta(t)=R_0(t)+\sum_{j=1}^r c_je^{(\lambda_j-\delta)t}+e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t}\phi(t)+R_0(t)*\left[\sum_{j=1}^r c_je^{(\lambda_j-\delta)t}+e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t}\phi(t)\right],$$

где $h(t)*g(t)=\int\limits_0^t h(t-s)g(s)ds$, $R_0\in L_1[0,\infty)$, $0<\varepsilon_1<\lambda-\max\limits_{j>r}\operatorname{Re}\lambda_j$, а $\phi(t)=o(1)$.

Так как $R_0(t)*e^{(\lambda_j-\delta)t}=ce^{(\lambda_j-\delta)t}+o(1)$, а

$$R_0(t)*e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t}\phi(t)=e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t}\int_0^t e^{-(\lambda-\delta-\varepsilon_1)(t-s)}R_0(t-s)\phi(s)ds=e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t}o(1),$$

то $R_\delta(t)=\sum\limits_{j=1}^r c_je^{(\lambda_j-\delta)t}+o(e^{(\lambda-\delta-\varepsilon_1)t})+R_0(t)$. Резольвента $R(t)$ ядра $K_0(t)=\sum\limits_{j=1}^n a_{j0}K_j(t)$ связана с $R_\delta(t)$ равенством $R(t)=e^{\delta t}R_\delta(t)$. Следовательно,

$$R(t)=\sum_{j=1}^r c_je^{\lambda_j t}+o(e^{(\lambda-\varepsilon_1)t})+e^{\delta t}R_0(t). \tag{6}$$

Записывая уравнение (1) в виде

$$x(t)-K_0(t)*x(t)=\sum_{j=1}^n K_j(t)*[(a_j(t)-a_{j0})x(t)]+f(t)$$

и используя резольвенту $R(t)$ ядра K_0, найдем

$$x(t)=\sum_{j=1}^n[K_j(t)+R(t)*K_j(t)]*[(a_j(t)-a_{j0})x(t)]+f(t)+R(t)*f(t). \tag{7}$$

Заметим, что если $\delta<\mu$, $\mu+\varepsilon_1<\lambda$, $\varepsilon<\frac{\lambda-\mu}{2}$ и $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, то $e^{\delta t}R_0(t)*e^{\mu t}O(1)=O(e^{\mu t})=o(e^{(\lambda-\varepsilon)t})$,

$$\begin{aligned}e^{\lambda_j t}*e^{\mu t}O(1)&=e^{\lambda_j t}\int_0^\infty e^{-(\lambda_j-\mu)s}O(1)ds-e^{\lambda_j t}\int_t^\infty e^{-\frac{\lambda-\mu}{2}s}e^{-\frac{\lambda-\mu}{2}s}O(1)ds=\\&=ce^{\lambda_j t}+e^{(\lambda-\frac{\lambda-\mu}{2})t}o(1)=ce^{\lambda_j t}+o(e^{(\lambda-\varepsilon)t})\end{aligned}$$

и $e^{(\lambda-\varepsilon_1)t}o(1) * e^{\mu t}O(1) = e^{(\lambda-\varepsilon_1)t}O(1) = o(e^{(\lambda-\varepsilon)t})$. Отсюда из (3), (6) и (7) получим

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} * \frac{\beta_j(t)}{t+1}x(t) + \sum_{l=1}^{n} h_l(t) * \frac{\gamma_l(t)}{t+1}x(t) + \sum_{j=1}^{r} k_j e^{\lambda_j t} + h_0(t),$$

где $\beta_j, \gamma_l \in A_\infty$, $h_l(t) = o(e^{(\lambda-\varepsilon)t})$, $l = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$. Положим

$$\psi_j(t) = k_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t} * \frac{\beta_j(t)}{t+1}x(t),$$
$$p(t) = h_0(t) + \sum_{l=1}^{n} h_l(t) * \frac{\gamma_l(t)}{t+1}x(t) = h_0(t) + \int_0^t H(t,s)x(s)ds,$$
$$\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_r(t))^T, \quad k = (k_1, \ldots, k_r)^T, \quad \beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_r(t))^T,$$

(a^T — вектор-столбец, транспонированный a), $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_j)$ и $A(t) = (A_{jl}(t))$ с $A_{jl}(t) = \beta_j(t)$. Тогда

$$\psi(t) = e^{\Lambda t}k + \int_0^t e^{\Lambda(t-s)}\frac{A(s)}{s+1}\psi(s)ds + \int_0^t e^{\Lambda(t-s)}\frac{\beta(s)}{s+1}p(s)ds,$$

откуда

$$\psi'(t) = \left(\Lambda + \frac{A(t)}{t+1}\right)\psi(t) + \frac{\beta(t)}{t+1}p(t). \tag{8}$$

По формуле Коши

$$\psi(t) = Y(t)Y^{-1}(0)\psi(0) + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(s)\frac{\beta(s)}{s+1}p(s)ds,$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (8). В силу известной теоремы (см., напр., [7], гл. V) в качестве $Y(t)$ можно выбрать матрицу вида $Y(t) = D(t)\operatorname{diag}(e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j})$ с невырожденной матрицей $D(t) \in A_\infty$, причем $\det D(\infty) = \det \lim\limits_{t\to\infty} D(t) \neq 0$. Тогда $D^{-1}(t) \in A_\infty$ и $v(t) = D^{-1}(t)\beta(t) \in A_\infty$. Поэтому

$$Y(t)Y^{-1}(s)\beta(s) = D(t)\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_j(t-s)}\left(\frac{t+1}{s+1}\right)^{\alpha_j}\right)v(s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{r} e^{\lambda_j(t-s)}(\frac{t+1}{s+1})^{\alpha_j} d_{1j}(t)v_j(s) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{r} e^{\lambda_j(t-s)}(\frac{t+1}{s+1})^{\alpha_j} d_{rj}(t)v_j(s) \end{pmatrix},$$

где $d_{kj}, v_j \in A_\infty$. Подставляя этот вектор в формулу Коши и используя тот факт, что

$$\int_0^t G_j(t,s)h_0(s)ds = e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)\left[\int_0^\infty e^{-\varepsilon s}o((s+1)^{-\alpha_j-1})ds - \right.$$
$$\left. - \int_t^\infty e^{-\varepsilon s}o((s+1)^{-\alpha_j-1})ds\right] = e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)[c_j + o(e^{-\frac{\varepsilon}{2}t})],$$

найдем (при $u_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} d_{kj}(t)$)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r}\psi_k(t) + p(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}y_j(t) +$$
$$+ \int_0^t H(t,s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{r}\int_0^t G_j(t,s)\int_0^s H(s,\tau)x(\tau)d\tau ds. \quad \Box$$

Лемма 2. *Пусть* $h(t) = O(e^{-\varepsilon t})$, $\varepsilon > 0$, α *– комплексное число. Тогда*

$$h(t) * (t+1)^\alpha = (t+1)^\alpha v(t), \quad v \in A_\infty,$$
$$h(t) * O((t+1)^\alpha) = O((t+1)^\alpha), \quad h(t) * o((t+1)^\alpha) = o((t+1)^\alpha).$$

Доказательство. Так как функция $e^{\frac{-\varepsilon}{2}(t-s)}(\frac{s+1}{t+1})^\alpha$ ограничена при $0 \le s \le t < \infty$, то

$$(t+1)^{-\alpha}[h(t) * o((t+1)^\alpha)] = O(1)\int_0^t e^{\frac{-\varepsilon}{2}(t-s)} o(1) ds = o(1),$$

что доказывает последнее утверждение леммы. Аналогично доказывается и второе утверждение. Наконец, интегрируя достаточное число раз по частям, получим

$$h(t) * (t+1)^\alpha = \int_0^t (t-s+1)^\alpha h(s) ds = \sum_{j=0}^k c_j (t+1)^{\alpha - j} +$$
$$+\sum_{j=0}^k b_j \int_t^\infty (t-\tau)^j h(\tau) d\tau + c\int_0^t (t-s+1)^{\alpha-k-1}\int_s^\infty (\tau - s)^k h(\tau) d\tau ds.$$

Так как $\int\limits_t^\infty (t-\tau)^j h(\tau) d\tau = \int\limits_0^\infty (-\theta)^j h(t+\theta) d\theta = O(e^{-\varepsilon t})$, то второе слагаемое в $h(t) * (t+1)^\alpha$ есть $O(e^{-\varepsilon t})$, а последнее — $O((t+1)^{\alpha-k-1})$. Тем самым доказано и первое утверждение леммы. □

Лемма 3. *Для любого комплексного* α, *действительного* $\gamma \ne 0$ *и натурального* k

$$\int_0^t e^{i\gamma s}(s+1)^\alpha ds = c_k + e^{i\gamma t}(t+1)^\alpha u(t), \quad u \in A_k, \quad c_k = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Пусть $k > \mathrm{Re}\,\alpha$. Интегрируя по частям $k+2$ раза, получим

$$\int_0^t e^{i\gamma s}(s+1)^\alpha ds = e^{i\gamma t}\sum_{j=0}^{k+1} a_j (t+1)^{\alpha-j} + b_0 + b_1\Big[\int_0^\infty e^{i\gamma s}(s+1)^{\alpha-k-2} ds - \int_t^\infty e^{i\gamma s}(s+1)^{\alpha-k-2} ds\Big].$$

Осталось заметить, что

$$\Big|\int_t^\infty e^{i\gamma s}(s+1)^{\alpha-k-2} ds\Big| \le \int_t^\infty (s+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha - k-2} ds = c(t+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha-k-1}. \quad \square$$

Доказательство теоремы. Покажем, что для решения $x(t)$ уравнения (5), эквивалентного (1), справедлива оценка

$$x(t) = O(1)e^{\lambda t}(t+1)^\alpha, \ \alpha = \max_{1\le j\le r} \mathrm{Re}\,\alpha_j. \tag{9}$$

Положим $z(t) = e^{-\lambda t}(t+1)^{-\alpha}x(t)$. Тогда $z(t) = \int\limits_0^t Q(t,s)z(s)ds + g(t)$, где $g(t) = O(1)$, $q_l(t) = e^{-\lambda t}h_l(t) = o(e^{-\varepsilon t})$ и

$$Q(t,s) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{s+1}{t+1}\right)^\alpha q_l(t-s)\frac{\gamma_l(s)}{s+1} +$$
$$+\sum_{j=1}^r\sum_{l=1}^n e^{(\lambda_j - \lambda)t}(t+1)^{\alpha_j-\alpha}(s+1)^\alpha u_j(t)\frac{\gamma_l(s)}{s+1}\int_s^t q_l(\tau - s)e^{(\lambda-\lambda_j)\tau}(\tau+1)^{-\alpha_j}\frac{v_j(\tau)}{\tau+1}d\tau.$$

Используя лемму 2, найдем

$$\int_T^t |Q(t,s)|ds \le c\Big[(t+1)^{-\alpha}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}(s+1)^{\alpha-1}ds+$$
$$+\sum_{j=1}^r (t+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha_j-\alpha}\int_T^t\int_0^\tau (s+1)^{\alpha-1}e^{-\varepsilon(\tau-s)}(\tau+1)^{-Re\alpha_j-1}dsd\tau\Big] \le \frac{c_1}{t+1}+\frac{c_1}{T+1}\le\frac{2c_1}{T+1}<1$$

при достаточно большом T. Следовательно (см., напр., [8]), ядро Q устойчиво, и потому $z(t) = O(1)$, что и доказывает (9).

Покажем теперь, что при любом целом $p \ge 0$

$$x(t)=\sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x_{jk}}{(t+1)^k}+O\Big(\frac{1}{(t+1)^{p-1+\delta}}\Big)\right], \tag{10}$$

где $\delta \in (0,1]$ и таково, что $\mathrm{Re}\,\alpha_j - \mathrm{Re}\,\alpha_l + \delta$ при всех j, l не является целым числом. При $p = 0$ равенство (10) справедливо, т. к. если j_0 таково, что $\mathrm{Re}\,\alpha_{j_0} = \alpha$, то согласно (9)

$$x(t)=e^{\lambda_{j_0}t}(t+1)^{\alpha_{j_0}}O(1)+\sum_{j\ne j_0}e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}\cdot 0.$$

Пусть (10) справедливо при некотором $p \ge 0$. Очевидно, $h_l(t) = e^{\lambda_j t}e^{-\varepsilon t}o(1)$. Поэтому в силу леммы 2

$$\int_0^t H(t,s)x(s)ds=\sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{y_{jk}}{(t+1)^k}+O\Big(\frac{1}{(t+1)^{p+\delta}}\Big)\right]. \tag{11}$$

Далее

$$g_{jml}(t)=\int_0^t G_j(t,s)e^{\lambda_m s}(s+1)^{\alpha_m-l}ds=$$
$$=e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)\int_0^t e^{(\lambda_m-\lambda_j)s}(s+1)^{\alpha_m-\alpha_j-l-1}v_j(s)ds.$$

Пусть k — достаточно большое натуральное число. Тогда при $m \ne j$ по лемме 3

$$g_{jml}(t)=c_{jml}e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)+e^{\lambda_m t}(t+1)^{\alpha_m-l-1}v_{jml}(t),\quad v_{jml}\in A_k, \tag{12}$$

а

$$g_{jjl}(t)=e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}v_{jjl}(t),\quad v_{jjl}\in A_k. \tag{13}$$

Наконец,

$$\int_0^t G_j(t,s)e^{\lambda_m s}(s+1)^{\alpha_m-p-\delta}O(1)ds=$$
$$=e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)\int_0^t (s+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta-1}O(1)ds=$$
$$=c_{jm}e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}u_j(t)+e^{\lambda_m t}(t+1)^{\alpha_m-p-\delta}O(1), \tag{14}$$

т. к. если $\mathrm{Re}\,\alpha_m - \mathrm{Re}\,\alpha_j - p - \delta < 0$, то

$$\int_0^t (s+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta-1}O(1)ds=c_{jm}+\int_t^\infty (s+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta-1}O(1)ds=c_{jm}+(t+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta}O(1),$$

а если $\mathrm{Re}\,\alpha_m - \mathrm{Re}\,\alpha_j - p - \delta > 0$, то

$$\int_0^t (s+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta-1}O(1)ds=(t+1)^{\alpha_m-\alpha_j-p-\delta}O(1).$$

Из (5), (10)–(14) следует

$$x(t)=\sum_{j=1}^{r}e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}\Big[\sum_{k=0}^{p}\frac{c_{jk}}{(t+1)^k}+O\Big(\frac{1}{(t+1)^{p+\delta}}\Big)\Big]. \tag{15}$$

По индукции заключаем, что (10) справедливо при всех p.

При переходе от (10) к (15) слагаемое $\frac{x_{jk}}{(t+1)^{k-\alpha_j}}$ дает вклад в различные слагаемые разложения (15), поэтому не ясно, совпадают ли c_{jk} с соответствующими x_{jk}. Покажем, что с ростом p коэффиценты разложения все же стабилизируются, т. е. каждый коэффициент $c_{jk}=x_{jk}$ при достаточно больших p. Допустим противное. Вычитая из (15) равенство (10), найдем (при достаточно большом p)

$$\sum_{j=1}^{r}e^{\lambda_j t}(t+1)^{\alpha_j}z_j(t)\equiv 0, \tag{16}$$

где $z_j\in A_p$ и присутствуют z_j с ненулевыми коэффициентами разложения. Пусть l_j — номер первого ненулевого коэффициента разложения $z_j(t)$, если такой есть, и $l_j=\infty$ в противном случае. Меняя, если необходимо, нумерацию, можем считать, что $\mathrm{Re}(\alpha_1-l_1)\geq\mathrm{Re}(\alpha_2-l_2)\geq\cdots\geq\mathrm{Re}(\alpha_r-l_r)$. Разделив (16) на $e^{\lambda t}(t+1)^{\mathrm{Re}(\alpha_1-l_1)}$, получим

$$\sum_{j=1}^{k}e^{i\gamma_j t}(t+1)^{i\beta_j}(c_j+o(1))=o(1),$$

где все $c_j\neq 0$ и $\gamma_j=\mathrm{Im}\,\lambda_j$ попарно различны. Отсюда следует

$$\sum_{j=1}^{k}e^{i\gamma_j t}(t+1)^{i\beta_j}c_j=o(1).$$

Покажем по индукции, что это возможно лишь при $c_j=0$. Действительно, если $k=1$, то это очевидно. Пусть это верно при всех $k\leq m$. Заменяя в равенстве

$$\sum_{j=1}^{m+1}e^{i\gamma_j t}(t+1)^{i\beta_j}c_j=o(1) \tag{17}$$

t на $t+\varepsilon$ и пользуясь тем, что $(t+\varepsilon+1)^{i\beta_j}\sim(t+1)^{i\beta_j}$ при $t\to\infty$, получим

$$\sum_{j=1}^{m+1}e^{i\gamma_j t}(t+1)^{i\beta_j}e^{i\gamma_j\varepsilon}c_j=o(1).$$

Разделим это равенство на $e^{i\gamma_{m+1}\varepsilon}$ и вычтем результат из (17). Тогда

$$\sum_{j=1}^{m}e^{i\gamma_j t}(t+1)^{i\beta_j}c_j(1-e^{i\varepsilon(\gamma_j-\gamma_{m+1})})=o(1).$$

Отсюда по предположению индукции $c_j=0$, $j=1,\ldots,m$, т.к. существует ε, при котором $e^{i\varepsilon(\gamma_j-\gamma_{m+1})}\neq 1$, $j=1,\ldots,m$. Но тогда из (17) следует, что и $c_{m+1}=0$. Таким образом, равенство (17) возможно лишь при $c_j=0$, что и доказывает стабилизируемость коэффициентов разложения в (10) с ростом p. □

Литература

1. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 88–94.
2. Цалюк З.Б. *Асимптотическая структура резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 50–55.
3. Цалюк З.Б. *Структура резольвенты системы уравнений с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 71–80.
4. Цалюк З.Б. *Структура резольвенты уравнения восстановления* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2001. – С. 150–151.
5. Дербенев В.А., Пуляев В.Ф. *Структура резольвенты и устойчивость линейных интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Сев.–Кавк. научн. центр высшей школы. Естеств. науки. – 1992. – № 1–2. – С. 7–14.
6. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. *Об асимптотическом поведении решений интегральных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 12. – С. 47–55.
7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М: Ин. лит., 1958. – 474 с.
8. Цалюк З.Б. *Интегральные уравнения Вольтерра* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1977. – Т. 15. – С. 131–198.

Кубанский государственный университет (*г. Краснодар*)

Поступила 24.01.2002