ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.54

*В.Н. ДУБИНИН, В.Ю. КИМ*

# УСРЕДНЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Усредняющее преобразование областей, введенное Маркусом в [1], получило значительное применение в геометрической теории функций комплексного переменного (напр., [2]–[4]). Отметим работы [2], [3], в которых, в частности, даны обобщения этого преобразования и многочисленные приложения к различным классам аналитических функций. В данной статье преобразование Маркуса [1] развивается в ином направлении. Усредняются множества, лежащие на римановых поверхностях над комплексной плоскостью с учетом их листности накрытия. Аналогичные преобразования для круговой симметризации осуществлялись в [5]–[8] и других работах. В идейном плане в данной работе происходит соединение усреднения [1] и кусочно-разделяющей симметризации [4]. Однако построенные здесь преобразования не сводятся к ним. В качестве приложений даются новые теоремы о покрытии отрезков, о совместно $p$-листных областях и неравенствах для рациональных функций.

## 1. Линейно-усредняющее преобразование

Пусть $\mathcal{R}$ — риманова поверхность, лежащая над комплексной плоскостью $z = x + iy$, $\mathcal{R}(\Pi)$ — множество точек поверхности $\mathcal{R}$, проекция которых принадлежит полосе $\Pi = \{z : 0 \le x \le 1\}$. Говоря об открытых и замкнутых множествах на $\mathcal{R}(\Pi)$, будем иметь в виду относительную топологию, являющуюся следом на $\mathcal{R}(\Pi)$ топологии, заданной в $\mathcal{R}$. Совокупность открытых множеств $\{\mathcal{D}\}$ назовем допустимым семейством множеств, если выполняются следующие условия: каждое множество $\mathcal{D}$ принадлежит множеству $\mathcal{R}(\Pi)$ некоторой римановой поверхности $\mathcal{R}$; множества $\{\mathcal{D}\}$ совместно $p$-листные, т. е. каждая точка $z \in \Pi$ покрывается не более чем $p$ различными точками, принадлежащими множествам из совокупности $\{\mathcal{D}\}$ (с учетом кратности); существует число $c > 0$ такое, что множества $\{\mathcal{D}\}$ $p$-кратно покрывают множество $\Pi_c = \{z : 0 \le x \le 1,\ |y| \ge c\}$, т. е. над каждой точкой $z \in \Pi_c$ лежит ровно $p$ точек с учетом кратности из множеств $\{\mathcal{D}\}$; наконец, ни одно из множеств совокупности $\{\mathcal{D}\}$ не содержит жордановой дуги, целиком покрывающей прямую $\operatorname{Re} z = x$ при каком-либо $x$, $0 < x < 1$. Далее, семейство замкнутых множеств $\{\mathcal{E}\}$ назовем допустимым семейством, соответствующим семейству $\{\mathcal{D}\}$, если каждое множество $\mathcal{E}$ из $\{\mathcal{E}\}$ принадлежит некоторому множеству $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$ и если множества совокупности $\{\mathcal{E}\}$ также $p$-кратно покрывают полуполосы $\Pi_c$ при некотором $c > 0$. Для простоты изложения удобно считать, что каждое множество $\mathcal{D}$ семейства $\{\mathcal{D}\}$ содержит некоторое замкнутое множество $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\mathcal{D})$ семейства $\{\mathcal{E}\}$, возможно, пустое. Обозначим через $l_c(x, A)$ линейную меру Лебега множества точек из $A$, лежащих над отрезком $[x - ic,\ x + ic]$. Результатом линейно-усредняющего преобразования $\mathcal{L}^p$ допустимого семейства открытых множеств $\{\mathcal{D}\}$ назовем множество $\mathcal{L}^p\{\mathcal{D}\} = \{z = x + iy \in \Pi : y > c - \frac{1}{2p} \sum_{\{\mathcal{D}\}} l_c(x, \mathcal{D})\}$, где $c$ из

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00443) и программы “Университеты России” (грант 991282).

определения семейства $\{\mathcal{D}\}$. Легко видеть, что $\mathcal{L}^p\{\mathcal{D}\}$ не зависит от выбора числа $c > 0$. Аналогично определяется линейно-усредняющее преобразование допустимого семейства замкнутых множеств $\mathcal{L}^p\{\mathcal{E}\} = \{z = x + iy \in \Pi : y \geq c - \frac{1}{2p} \sum\limits_{\{\mathcal{E}\}} l_c(x, \mathcal{E})\}$.

Предположим, что вещественная функция $\omega(Z)$ задана на множествах $\mathcal{D}$ допустимого семейства открытых множеств $\{\mathcal{D}\}$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $0 \leq \omega(Z) \leq 1$ на множествах $\mathcal{D}$ и $\omega(Z) = 1$ только на множествах $\mathcal{E}$ некоторого допустимого семейства замкнутых множеств $\{\mathcal{E}\}$, соответствующего семейству $\{\mathcal{D}\}$;
2) $\omega(Z)$ непрерывная на $\mathcal{D}$ и гармоническая в $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$, $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E}\}$;
3) при любом фиксированном $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, множества $\mathcal{D}(\alpha) = \{Z \in \mathcal{D} : \omega(Z) > \alpha\}$, $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$, образуют совокупность из конечного числа непересекающихся областей, имеющих разве лишь конечное число точек ветвления;
4) $\lim\limits_{Z \to \partial\mathcal{D}} \omega(Z) = 0$, $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$.

Определим линейно-усредняющее преобразование функции $\omega(Z)$ как переход от этой функции к функции $\mathcal{L}^p\omega(z)$, заданной в полуполосе $\Pi^+ = \{z \in \Pi : y \geq 0\}$ формулой

$$\mathcal{L}^p\omega(x + iy) = \begin{cases} 1, & y \geq c - \frac{1}{2p} \sum\limits_{\{\mathcal{E}\}} l_c(x, \mathcal{E}); \\ \alpha, & y = c - \frac{1}{2p} \sum\limits_{\{\mathcal{D}\}} l_c(x, \mathcal{D}(\alpha)); \\ 0, & y \leq c - \frac{1}{2p} \sum\limits_{\{\mathcal{D}\}} l_c(x, \mathcal{D}), \end{cases}$$

где $c$ — некоторое число из определения семейств $\{\mathcal{D}\}$ и $\{\mathcal{E}\}$. Для произвольной функции $v$, заданной на некоторой римановой поверхности $\mathcal{R}$, обозначим через $I(v, \Omega) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2$ интеграл Дирихле от функции $v$ по множеству $\Omega \subset \mathcal{R}$ (напр., [9], с. 256).

**Теорема 1.** *Пусть $\{\mathcal{D}\}$ — допустимое семейство открытых множеств, а $\{\mathcal{E}\}$ — соответствующее ему семейство замкнутых множеств. Предположим, что функция $\omega(Z)$ задана на множествах $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$ и удовлетворяет условиям 1)–4). Тогда функция $\mathcal{L}^p\omega(z)$ равна единице на множестве $\mathcal{L}^p\{\mathcal{E}\}$, нулю на $\Pi^+ \setminus \mathcal{L}^p\{\mathcal{D}\}$, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки множества $P = \mathcal{L}^p\{\mathcal{D}\} \setminus \mathcal{L}^p\{\mathcal{E}\}$ и справедливо неравенство*

$$\sum_{\{\mathcal{D}\}} I(\omega, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}) \geq 2pI(\mathcal{L}^p\omega, P). \tag{1}$$

**Доказательство.** Данное утверждение можно установить с помощью известной техники симметризации функций [10], несколько измененной применительно к нашему случаю. Проще, однако, воспользоваться результатами работы [1]. Для этого запишем интегралы из неравенства (1) в виде

$$I(\omega, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}) = \lim_{\alpha \to 0} I(\omega, \mathcal{D}(\alpha, \beta)) + I(\omega, \mathcal{D}(\beta, 1)),$$
$$I(\mathcal{L}^p\omega, P) = \lim_{\alpha \to 0} I(\mathcal{L}^p\omega, P(\alpha, \beta)) + I(\mathcal{L}^p\omega, P(\beta, 1)),$$

где $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \{Z \in \mathcal{D} : \alpha < \omega(Z) < \beta\}$, $P(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \mathcal{L}^p\omega(z) < \beta\} = \mathcal{L}^p\{\mathcal{D}(\alpha)\} \setminus \mathcal{L}^p\{\overline{\mathcal{D}(\beta)}\}$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Отсюда видно, теорему 1 достаточно доказать в предположении, что все множества $\mathcal{D}$ семейства $\{\mathcal{D}\}$ содержат лишь конечное число точек ветвления и ограничены в совокупности конечным числом кусочно-аналитических кривых. Проведем в полосе $\Pi$ всевозможные прямые вида $\operatorname{Re} z = x_k$, $k = 1, \ldots, m$, проходящие через проекции точек ветвления множеств $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$, через точки $z = 0$, $z = 1$, а также прямые, являющиеся касательными к проекциям границ множеств $\mathcal{D}$, $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1$. Присоединим к каждой связной компоненте множества $\mathcal{D}$ семейства $\{\mathcal{D}\}$, лежащей над полосой $\{z : x_k < x < x_{k+1}\}$, точки множества $\mathcal{D}$, граничные для этой компоненты. Проекции полученных таким образом множеств (по всем $\mathcal{D}$ из $\{\mathcal{D}\}$) обозначим через $D_j^k$, $j=1,\dots,j_k$, $k=1,\dots,m-1$. Среди множеств $D_j^k$ имеется ровно $p$ множеств, пусть это $D_{2l-1}^k$, $l=1,\dots,p$, которые содержат полуполосу $\{z: x_k\le x\le x_{k+1},\ y\le -c\}$, и $p$ множеств $D_{2l}^k$, $l=1,\dots,p$, которые содержат полуполосу $\{z: x_k\le x\le x_{k+1},\ y\ge c\}$, при некотором $c>0$, едином для всех $k$. Пусть $\widetilde{D}_{2p+t}^k=\{z: z+c_{2p+t}\in D_{2p+t}^k\}$, $t=0,1,\dots,j_k-2p$, где константы $c_{2p+t}=i|c_{2p+t}|$, $c_{2p}=0$, подобраны так, что множества $\widetilde{D}_{2p+t}^k$, $t=0,1,\dots,j_k-2p$, попарно не пересекаются. Введем отображения $z=\Phi_j^k(\zeta)=(x_{k+1}-x_k)(\xi+i(-1)^{j+1}\eta)+(x_k-i(-1)^{j+1}c)$, $\zeta=\xi+i\eta\in\Pi_\zeta^+=\{\zeta=\xi+i\eta: 0\le\xi\le 1,\ \eta\ge 0\}$, и пусть $\Psi_j^k$ — отображения, обратные $\Phi_j^k$, $j=1,\dots,2p$. Рассмотрим функции $\omega_j^k(\zeta)$, $j=1,\dots,2p$, заданные в полуполосе $\Pi_\zeta^+$ следующим образом:

$$\omega_j^k(\zeta)=\begin{cases}1-\omega(\Phi_j^k(\zeta)), & \zeta\in\Psi_j^k(D_j^k);\\ 1, & \zeta\in\Pi_\zeta^+\setminus\Psi_j^k(D_j^k),\end{cases}$$

$j=1,\dots,2p-1$,

$$\omega_{2p}^k(\zeta)=\begin{cases}1-\omega(\Phi_{2p}^k(\zeta)+c_{2p+t}), & \zeta\in\Psi_{2p}^k(\widetilde{D}_{2p+t}^k), t=0,\ \dots,j_k-2p;\\ 1, & \zeta\in\Pi_\zeta^+\setminus\bigcup\limits_{t=0}^{j_k-2p}\widetilde{D}_{2p+t}^k.\end{cases}$$

Непосредственно из определения усредняющих преобразований видно, что в полуполосе $\Pi_\zeta^+$ выполняется

$$\mathcal{L}^p\omega(\Phi_{2p}^k(\zeta))=1-\mathcal{L}_A(\{\omega_j^k(\zeta)\}_{j=1}^{2p}),$$

где $\mathcal{L}_A$ — линейно-усредняющее преобразование Маркуса [1] с параметрами $A=\{\alpha_j\}_{j=1}^{2p}$, $\alpha_j=1/(2p)$, $j=1,\dots,2p$. Из леммы 1.1 и теоремы 1.1 работы [1] следует, что функция $\mathcal{L}^p\omega(z)$ равна единице на множестве $\mathcal{L}^p\{\mathcal{E}\}\bigcap\{z: x_k\le x\le x_{k+1}\}$, нулю на $(\Pi^+\setminus\mathcal{L}^p\{\mathcal{D}\})\bigcap\{z: x_k\le x\le x_{k+1}\}$, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки множества $P\bigcap\{z: x_k\le x\le x_{k+1}\}$ и справедливо неравенство

$$\sum_{\{\mathcal{D}\}} I(\omega,\{Z\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{E}: x_k<\operatorname{Re}\operatorname{pr}Z<x_{k+1}\})=\sum_{j=1}^{2p} I(\omega_j^k,\{\zeta: 0<\omega_j^k(\zeta)<1\})\ge$$
$$\ge 2pI(\mathcal{L}_A\{\omega_j^k\}_{j=1}^{2p},\{\zeta: 0<\mathcal{L}_A\{\omega_j^k\}_{j=1}^{2p}<1\})=2pI(\mathcal{L}^p\omega,P\bigcap\{z: x_k<x<x_{k+1}\}),$$

$k=1,\dots,m-1$. Отсюда вытекает утверждение теоремы 1. □

**Замечание 1.** В условиях теоремы 1 пусть, дополнительно, множество $\Pi^+\setminus\mathcal{L}^p\{\mathcal{E}\}$ содержится в прямоугольнике $\{z\in\Pi: 0\le y\le y_0\}$ при некотором $y_0>0$. Тогда из принципа Дирихле со свободной границей имеем

$$I(\mathcal{L}^p\omega,P)\ge I(y/y_0,\{z\in\Pi: 0<y<y_0\})=1/y_0. \qquad (2)$$

Это соотношение часто бывает полезным в сочетании с теоремой 1.

**Замечание 2.** Условие $p$-листности областей совокупности $\{\mathcal{D}\}$ является существенным только в контексте данного приема усреднения. Один из способов усреднения без этого условия изучен в [11].

Далее рассмотрим приложения линейно-усредняющего преобразования в исследовании свойств аналитических функций разных классов.

## 2. Теоремы покрытия отрезков

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, и пусть $\mathcal{R}_f$ — риманова поверхность обратного отображения, лежащая над $w$-плоскостью [9]. Кривую $\gamma$ на поверхности $\mathcal{R}_f$ назовем отрезком, если отображение проектирования осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\gamma$ и некоторым отрезком $w$-плоскости. Под длиной $\gamma$ понимается длина соответствующего отрезка. Обозначим через $\Lambda_f(\varphi)$ верхнюю грань длин отрезков на поверхности $\mathcal{R}_f$, исходящих из точки $W_0 = f(0)$ и лежащих над лучом $\arg w = \varphi$.

**Теорема 2.** *Если функция $w = f(z) = z^p + \cdots$ регулярна и $p$-листна в круге $U$, то для любого действительного числа $\theta$ и натурального $n$ справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \Lambda_f(\theta + 2\pi k/n) \geq 1/4.$$

*Равенство достигается для функций $f(z) = z^p[1 + (e^{-i\theta} z^p)^n]^{-2/n}$, $p$-кратно покрывающих $w$-плоскость с разрезами вдоль лучей $\{w : \arg w^n = \theta n,\ |w^n| \geq 1/4\}$.*

**Доказательство.** Можно считать $\theta = 0$. Введем обозначения: $\lambda_k = \Lambda_f(2\pi k/n)$, $G_k = \{w :|\arg w - 2\pi k/n| < \pi/n\} \setminus \{w = t\exp(2\pi i k/n) : 0 \leq t \leq \lambda_k\}$, $\widetilde{G}_k$ — область $G_k$ с присоединенными к ней достижимыми граничными точками этой области, $z = F_k(w)$ — функция, заданная соотношениями

$$z = (-i/\pi)\log[(\zeta - \lambda_k^{n/2})/(\zeta + \lambda_k^{n/2})], \quad \zeta = i(w^n - \lambda_k^n)^{1/2}, \quad w \in G_k,$$

где ветви многозначных функций подобраны так, что $F_k(w)$ отображает область $G_k$ конформно и однолистно на внутренность полосы $\Pi$, причем достижимые граничные точки с носителем в начале переходят в $\pm i\infty$, $k = 1, \ldots, n$.

При подходящем $\rho$, $0 < \rho < 1$, функция $w = f_\rho(z) \equiv f(\rho z)$ отображает круг $U$ на $p$-листную риманову поверхность $\mathcal{R}_f(\rho)$, ограниченную аналитической кривой и имеющую лишь конечное число точек ветвления. Сужение этой поверхности, лежащее над множеством $\widetilde{G}_k$, образует некоторое семейство открытых множеств $\{\widetilde{\mathcal{D}}\}_k$ (в относительной топологии). Функция $F_k(w)$ индуцирует соответствующее ему допустимое семейство открытых множеств $\{\mathcal{D}\}_k$, лежащих над полосой $\Pi$. Отображение множеств $\widetilde{\mathcal{D}}$ семейства $\{\widetilde{\mathcal{D}}\}_k$ на $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}_k$ будем обозначать той же буквой $Z = F_k(W)$. Из всех условий допустимости семейства $\{\mathcal{D}\}_k$ требует пояснений лишь последнее. Если некоторое множество $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}_k$ содержит дугу, целиком покрывающую прямую вида $\operatorname{Re} z = x$, $0 < x < 1$, то поверхность $\mathcal{R}_f(\rho)$ содержит замкнутую кривую $\gamma$, лежащую над $\{w : \operatorname{Re} F_k(w) = x\}$. Пусть $W_k$ — точка кривой $\gamma$, для которой $\arg \operatorname{pr} W_k = 2\pi k/n$. Двигаясь от точки $W_k$ по поверхности $\mathcal{R}_f(\rho)$ над лучом $\arg w = 2\pi k/n$ в направлении к $W_0$, обязательно попадем в граничную точку $\mathcal{R}_f(\rho)$ (по определению $\Lambda_f(2\pi k/n)$). Двигаясь теперь из точки $W_k$ в противоположном направлении, вновь попадем на границу, т.к. точка $w = \infty$ не покрывается поверхностью $\mathcal{R}_f(\rho)$. Таким образом, по разные стороны от $\gamma$ имеются точки границы поверхности $\mathcal{R}_f(\rho)$, что противоречит односвязности этой поверхности. Итак, семейство $\{\mathcal{D}\}_k$ допустимо. Аналогично определяется соответствующее семейство замкнутых множеств $\{\mathcal{E}(r)\}_k$, порожденное образом круга $|z| \leq r$, $r < 1$ (вместо $U$ в случае $\{\mathcal{D}\}_k$), при отображении $w = f_\rho(z)$. Заметим, что множество $\Pi^+ \setminus \mathcal{L}^p\{\mathcal{E}(r)\}_k$ содержится в прямоугольнике $\{z \in \Pi : 0 \leq y \leq (-np/\pi)\log(r\rho) + (1/\pi)\log(4\lambda_k^n) + o(1)\}$ при $r \to 0$. На множествах семейства $\{\mathcal{D}\}_k$ определим функцию $\omega_k(Z)$, равную единице на $\mathcal{E}(r) \in \{\mathcal{E}(r)\}_k$, и

$$\omega_k(Z) = (\log|f_\rho^{-1}(F_k^{-1}(Z))|)/\log r,\ Z \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r),\ \mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}_k.$$

Легко видеть, что функция $\omega_k(Z)$ удовлетворяет условиям 1)–4). Из конформной инвариантности интеграла Дирихле следует

$$-\frac{2\pi}{\log r} = I((\log|z|)/\log r,\ \{z : r < |z| < 1\}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{\mathcal{D}\}_k} I(\omega_k, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r)).$$

С другой стороны, по теореме 1 с учетом (2) имеем

$$\sum_{\{\mathcal{D}\}_k} I(\omega_k, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r)) \geq 2p/[(-np/\pi)\log(r\rho) + (1/\pi)\log(4\lambda_k^n) + o(1)] =$$

$$= -\frac{2\pi}{\log r}\left[\frac{1}{n} - \frac{\log\rho}{n\log r} + \frac{1}{np}\frac{\log(4^{1/n}\lambda_k)}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

В итоге получаем

$$0 \leq -\log\rho + \frac{1}{np}\log\left(4\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right) + o(1).$$

Переходя здесь к пределу при $r \to 0$, а затем $\rho \to 1$, завершаем доказательство неравенства теоремы 2. Точность данной оценки проверяется непосредственно. $\square$

Полученный результат включает в себя пп. 1–3 известной теоремы Г.М. Голузина ([12], теорема 8) (без утверждения о знаке равенства). Одновременно он содержит многие известные теоремы для однолистных в круге функций ([4], с. 56–57). Заметим, что наш подход позволяет установить единственность экстремальных отображений, а также распространить полученный результат на случай функций, заданных в кольце. Приведем в качестве примера одну из теорем такого рода.

**Теорема 3.** *Пусть функция $w = f(z)$ регулярна и $p$-листна в кольце $1 \leq |z| < R$, причем $\int_{|z|=1} d\arg f(z) = 2p\pi$; $|f(z)| \geq 1$ при $1 \leq |z| < R$ и $|f(z)| = 1$, когда $|z| = 1$. Обозначим через $L_f(\varphi)$ верхнюю грань длин отрезков на римановой поверхности обратной функции, лежащих над лучом $\arg w = \varphi$ и содержащих на конце точку над окружностью $|w| = 1$.*

*Пусть функция $w = E(\zeta; n, p, R)$ конформно и однолистно отображает кольцо $1 < |\zeta| < R^p$ на внешность круга $|w| > 1$ с разрезами вдоль лучей $\{w : \arg w^n = 0,\ |w^n| \geq \gamma(n, p, R)\}$, $E(1; n, p, R) = 1$. Тогда для любого действительного числа $\theta$ выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}(L_f(\theta + 2\pi k/n) + 1) \geq \gamma(n, p, R).$$

*Равенство достигается для функций $f(z) = e^{i\theta}E(\alpha z^p; n, p, R)$, $|\alpha| = 1$.*

Доказательство этого утверждения здесь не приводится, т. к. оно аналогично доказательству теоремы 2 и, кроме того, в несколько измененном варианте дано в [11].

## 3. Задача об экстремальном разбиении

Задачи с указанным названием имеют богатую историю [13]. Рассмотрим одну из них в обобщенной постановке. Функции $w = f_k(z)$, $k = 1, \ldots, n$, назовем совместно $p$-листными в круге $U$, если любое значение $w$ принимается этими функциями в совокупности не более, чем в $p$ точках с учетом кратности.

**Задача.** Определить верхнюю грань произведения

$$\prod_{k=1}^{n}|c_k| \tag{3}$$

по всем функциям $w = f_k(z) = a_k + c_k z^p + \cdots$, совместно $p$-листным регулярным в круге $U$ и таким, что $|a_k| = 1$, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geq 2)$.

При $p = 1$ эта задача совпадает с задачей ([13], с. 26) (см. также [4], с. 53).

**Теорема 4.** *Максимум произведения* (3) *равен* $(4/n)^n$ *и достигается для* $n$ *ветвей функции* $w = [(1+z^p)/(1-z^p)]^{2/n}$, *каждая из которых осуществляет* $p$*-кратное накрытие кругом* $U$ *одного из углов* $\{w : |\arg w - 2\pi k/n| < \pi/n\}$, $k = 1, \dots, n$.

**Доказательство.** Введем обозначения $\theta_k = \arg a_k$, $k = 1, \dots, n$, $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$, $\varphi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Можно считать, что $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$. Положим $G_k = \{w = te^{i\theta} : 0 < t < \infty, \ \theta_k < \theta < \theta_{k+1}\}$, и пусть функция $z = F_k(w)$ задана соотношениями $z = (-i/\pi)\log[(\zeta - 1)/(\zeta + 1)]$, $\zeta = (we^{-i\theta_k})^{\pi/\varphi_k}$, $w \in G_k$, где ветви многозначных функций подобраны так, что $F_k(w)$ конформно и однолистно отображает область $G_k$ на внутренность полосы $\Pi$, при этом граничные точки $a_k$, $a_{k+1}$ переходят соответственно в $+i\infty$ и $-i\infty$. При подходящем $\rho$, $0 < \rho < 1$, функции $w = f_{k\rho}(z) \equiv f_k(\rho z)$ отображают круг $U$ на совместно $p$-листные римановы поверхности $\mathcal{R}_{f_k}(\rho)$, лежащие над $w$-плоскостью, ограниченные аналитическими кривыми и имеющие лишь конечное число точек ветвления. Точку поверхности $\mathcal{R}_{f_k}(\rho)$, соответствующую $z = 0$, обозначим через $W_k$, $\operatorname{pr} W_k = a_k$, $k = 1, \dots, n$. Сужение этих поверхностей, лежащее над $\overline{G}_k$, образует семейство открытых множеств $\{\widetilde{\mathcal{D}}\}_k$ (в относительной топологии). Функция $F_k(w)$ индуцирует допустимое семейство открытых множеств $\{\mathcal{D}\}_k$, лежащих над полосой $\Pi$ (соответствующее отображение множеств $\widetilde{\mathcal{D}}$ семейства $\{\widetilde{\mathcal{D}}\}_k$ на $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}_k$ обозначаем той же буквой $Z = F_k(W)$). Заметим, что точки $W_k$ имеют окрестности, $p$-кратно покрывающие окрестности точек $a_k$ так, что условия допустимости областей $\{\mathcal{D}\}_k$ легко проверяются. Аналогично определяется соответствующее семейство замкнутых множеств $\{\mathcal{E}(r)\}_k$, порожденное образом круга $|z| \le r$, $r < 1$, при отображениях $w = f_{k\rho}(z)$, $k = 1, \dots, n$. Простые вычисления показывают, что множество $\Pi^+ \setminus \mathcal{L}^p\{\mathcal{E}(r)\}_k$ содержится в прямоугольнике $\{z \in \Pi : 0 \le y \le (-1/\pi)\log[(r\rho)^p|c_k|\pi/(2\varphi_k)] + o(1)\}$, $r \to 0$. На множествах семейства $\{\mathcal{D}\}_k$ определим функцию $\omega_k(Z)$, равную единице на $\mathcal{E}(r) \in \{\mathcal{E}(r)\}_k$, и

$$\omega_k(Z) = (\log|f_{j\rho}^{-1}(F_k^{-1}(Z))|)/\log r, \quad Z \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r), \ \ \mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}_k,$$

где индекс $j$ зависит от точки $Z$ и равен номеру той поверхности $\mathcal{R}_{f_j}(\rho)$, которой принадлежит точка $F_k^{-1}(Z)$. Как и при доказательстве теоремы 2, конформная инвариантность интеграла Дирихле дает

$$-\frac{2\pi n}{\log r} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{\mathcal{D}\}_k} I(\omega_k, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r)).$$

С другой стороны, по теореме 1 с учетом (2) имеем

$$\sum_{\{\mathcal{D}\}_k} I(\omega_k, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}(r)) \ge 2p\{(-1/\pi)\log[(r\rho)^p|c_k|\pi/(2\varphi_k)] + o(1)\}^{-1} =$$

$$= -\frac{2\pi}{\log r}\left[1 - \frac{\log\rho}{\log r} - \frac{\log|c_k\pi/(2\varphi_k)|}{p\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right], \quad k = 1, \dots, n.$$

Суммируя выписанные соотношения, получаем

$$0 \le -n\log\rho - (1/p)\log\prod_{k=1}^{n}|c_k\pi/(2\varphi_k)| + o(1), \quad r \to 0.$$

Отсюда после предельных переходов $r \to 0$, $\rho \to 1$ следует

$$\prod_{k=1}^{n}|c_k\pi/(2\varphi_k)| \le 1.$$

Осталось воспользоваться неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\prod_{k=1}^{n}\varphi_k \le \left(\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k/n)\right)^n = (2\pi/n)^n.$$

Экстремальность указанных в формулировке теоремы функций проверяется непосредственно. $\square$

Теорема 4 обобщает известные теоремы М.А. Лаврентьева ($n = 2$) и Г.М. Голузина ($n = 3$) о неналегающих областях на случай $p$-листных отображений.

## 4. Неравенство для рациональных функций

Ниже предлагается новый способ получения неравенств для полиномов и рациональных функций (ср., напр., [14]). Пусть $R(z)$ — рациональная функция степени $p \geq 1$, $a$ и $b$ — комплексные числа. Предположим, что прямая или окружность $\gamma$ отделяет корни уравнения $R(z) = a$ от корней $R(z) = b$. Поставим задачу изучения свойств рациональной функции $R(z)$, которые вытекают из данного ограничения. Достаточно рассмотреть случай, когда $\gamma$ — действительная ось, $a = 0$ и $b = 1$.

**Теорема 5.** *Пусть $w = R(z)$ — рациональная функция степени $p \geq 1$; пусть $\xi_s$, $s = 1, \dots, n$, — корни уравнения $R(z) = 0$ кратности соответственно $k_s$; $\eta_s$, $s = 1, \dots, m$, — корни уравнения $R(z) = 1$ кратности $l_s$, $\sum\limits_{s=1}^{n} k_s = \sum\limits_{s=1}^{m} l_s = p$. Предположим, что точки $\xi_s$ лежат в верхней полуплоскости, а точки $\eta_s$ — в нижней, и пусть*

$$c_s = \lim_{z \to \xi_s} |R(z)|\, |z - \xi_s|^{-k_s}, \qquad s = 1, \dots, n,$$
$$d_s = \lim_{z \to \eta_s} |R(z) - 1|\, |z - \eta_s|^{-l_s}, \quad s = 1, \dots, m.$$

*Тогда имеет место точная оценка*

$$\prod_{s=1}^{n} c_s^{k_s} \prod_{s=1}^{m} d_s^{l_s} \leq \frac{\prod\limits_{s \neq t}^{n} |\xi_s - \xi_t|^{k_s k_t} \prod\limits_{s \neq t}^{m} |\eta_s - \eta_t|^{l_s l_t}}{\prod\limits_{s,t}^{n} |\xi_s - \overline{\xi}_t|^{k_s k_t} \prod\limits_{s,t}^{m} |\eta_s - \overline{\eta}_t|^{l_s l_t}}. \tag{4}$$

*Равенство достигается для функции $w = (z - ih)^p[(z - ih)^p + (z + ih)^p]^{-1}$, $h > 0$.*

**Доказательство.** Обозначим через $G$ плоскость $w$, разрезанную вдоль отрезка $[0, 1]$, и пусть $\widetilde{G}$ — область $G$ с присоединенными к ней достижимыми граничными точками. Пусть $z = F(w)$ — та ветвь функции $(-i/(2\pi)) \log[w/(1 - w)]$, которая конформно и однолистно отображает область $G$ на внутренность полосы $\Pi$ так, что $F(0) = i\infty$, $F(1) = -i\infty$. Функция $w = R(z)$ отображает верхнюю и нижнюю полуплоскости на две непересекающиеся совместно $p$-листные римановы поверхности, лежащие над $w$-плоскостью, ограниченные кусочно-аналитической кривой и имеющие лишь конечное число точек ветвления. Сужение этих поверхностей, лежащее над $\widetilde{G}$, образует семейство открытых множеств, которое переходит с помощью отображения $F(w)$ в допустимое семейство открытых множеств $\{\mathcal{D}\}$, лежащих над полосой $\Pi$. Как и при доказательстве предыдущих теорем, отображение римановых областей обозначаем той же буквой. Аналогично определяется соответствующее семейство замкнутых множеств $\{\mathcal{E}(r)\}$, порожденное образами кругов $|z - \xi_s| \leq r^{1/k_s}$, $s = 1, \dots, n$, $|z - \eta_s| \leq r^{1/l_s}$, $s = 1, \dots, m$. Легко видеть, что множество $\Pi^+ \setminus \mathcal{L}^p\{\mathcal{E}(r)\}$ содержится в прямоугольнике $\{z \in \Pi : 0 \leq y \leq (-1/(2\pi)) \log r + (-1(4\pi p)) \log A + o(1)\}$, $r \to 0$, где $A = \prod\limits_{s=1}^{n} c_s^{k_s} \prod\limits_{s=1}^{m} d_s^{l_s}$. Обозначим теперь через $u(z)$ функцию, непрерывную в плоскости $z$, равную нулю на действительной оси, единице на указанных выше кругах с центрами в $\xi_s$ и $\eta_s$, и гармоническую в остальной части плоскости $z$

(здесь $r > 0$ достаточно мало). Из теоремы 1 работы [15] следует, что

$$I(u,\{z: y>0\}) = \left[-\frac{1}{2\pi p}\log r + M^+ + o(1)\right]^{-1} = -\frac{2\pi p}{\log r}\left[1 + \frac{2\pi p M^+}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right], \quad r \to 0,$$

$$I(u,\{z: y<0\}) = \left[-\frac{1}{2\pi p}\log r + M^- + o(1)\right]^{-1} = -\frac{2\pi p}{\log r}\left[1 + \frac{2\pi p M^-}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right], \quad r \to 0,$$

где

$$M^+ = \frac{1}{2\pi p^2}\left\{\sum_{s,t}^{n}\log|\xi_s - \overline{\xi}_t|^{k_s k_t} - \sum_{s\neq t}^{n}\log|\xi_s - \xi_t|^{k_s k_t}\right\},$$

$$M^- = \frac{1}{2\pi p^2}\left\{\sum_{s,t}^{m}\log|\eta_s - \overline{\eta}_t|^{l_s l_t} - \sum_{s\neq t}^{m}\log|\eta_s - \eta_t|^{l_s l_t}\right\}.$$

На множествах семейства $\{\mathcal{D}\}$ определим функцию $\omega(Z)$ по формуле $\omega(Z) = u(R^{-1}(F^{-1}(Z)))$, $Z \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}$. Из конформной инвариантности интеграла Дирихле, теоремы 1 и неравенства (2) имеем последовательно

$$I(u,\{z: y>0\}) + I(u,\{z: y<0\}) = \sum_{\{\mathcal{D}\}} I(\omega, \mathcal{D}\setminus\mathcal{E}(r)) \geq$$

$$\geq 2p[(-1/(2\pi))\log r + (-1/(4\pi p))\log A + o(1)]^{-1} = -\frac{4\pi p}{\log r}\left[1 - \frac{1}{2p}\frac{\log A}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right].$$

Суммируя полученные соотношения и переходя к пределу при $r \to 0$, приходим к неравенству

$$\pi p(M^+ + M^-) \leq -\frac{1}{2p}\log A,$$

которое равносильно (4). Точность оценки проверяется непосредственно. □

Отметим частный случай неравенства (4), когда все нули функций $R(z)$ и $R(z)-1$ первого порядка,

$$\prod_{s=1}^{p}|R'(\xi_s)R'(\eta_s)| \leq \frac{\prod\limits_{s\neq t}^{p}|\xi_s - \xi_t|\prod\limits_{s\neq t}^{p}|\eta_s - \eta_t|}{\prod\limits_{s,t}^{p}|\xi_s - \overline{\xi}_t|\prod\limits_{s,t}^{p}|\eta_s - \overline{\eta}_t|} < 2^{-2p}\prod_{s=1}^{p}|\operatorname{Im}\xi_s \operatorname{Im}\eta_s|^{-1}.$$

Знак равенства в первом неравенстве достигается, например, для функции $R(z) = \frac{9}{80}\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$ $(p=2)$. Описание всех случаев равенства здесь не приводится, т. к. требует привлечения техники обобщенных приведенных модулей [15] и теорем единственности для усредняющих преобразований [2], что существенно увеличит объем статьи. Полагая $R(z) = P(z) \equiv \prod\limits_{s=1}^{p}(z - \xi_s)$, получим оценку для многочленов $\prod\limits_{s,t}^{p}|\xi_s - \overline{\xi}_t|\prod\limits_{s,t}^{p}|\eta_s - \overline{\eta}_t| \leq 1$. Данная оценка является, по-видимому, неточной в классе всех многочленов $P(z) = z^p + c_{p-1}z^{p-1} + \dots + c_0$, удовлетворяющих указанным выше условиям.

## Литература


1. Marcus M. *Radial averaging of domains, estimates for Dirichlet integrals and applications* // J. Anal. Math. – 1974. – V.27. – P.47–78.
2. Митюк И.П. *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* – Краснодар: Изд-во Кубанск. гос. ун-та, 1980. – 91 с.

3. Митюк И.П. *Применение симметризационных методов в геометрической теории функций.* – Краснодар: Изд-во Кубанск. гос. ун-та, 1985. – 94 с.
4. Дубинин В.Н. *Симметризация в теории функций комплексного переменного* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 3–76.
5. Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М.: Ин. лит., 1962. – 265 с.
6. Garabedian P.R., Royden H.L. *The one-quarter theorem for mean univalent functins* // Ann. Math. – 1954. – V. 59. – № 2. – P. 316–324.
7. Krzyz J. *Distortion theorems for bounded p-valent functions* // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. – 1958. – V. 12. – P. 29–38.
8. Шлык В.А. *Некоторые оценки в кольце для слабо однолистных функций, выпускающих значения на окружности* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 8. – С. 85–86.
9. Стойлов С. *Теория функций комплексного переменного.* Т. 2. – М.: Ин. лит., 1962. – 416 с.
10. Хейман В.К. *Многолистные функции.* – М.: Ин. лит., 1960. – 180 с.
11. Дубинин В.Н. *Некоторые применения линейно-усредняющего преобразования в теоремах покрытия.* – Кубанск. гос. ун-т. – Краснодар, 1977. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.02.77, № 770–77.
12. Голузин Г.М. *Некоторые теоремы покрытия в теории аналитических функций* // Матем. сб. – 1948. – Т. 22. – № 3. – С. 353–372.
13. Кузьмина Г.В. *Методы геометрической теории функций.* II // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9. – Вып. 5. – С. 1–50.
14. Borwein P., Erdelyi T. *Polynomials and polynomial inequalities.* – New York: Springer-Verlag, 1995. – 480 p.
15. Дубинин В.Н. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1997. – Т. 237. – С. 56–73.

*Институт прикладной математики*
*Дальневосточного отделения*
*Российской Академии наук*

*Поступила*
18.01.1999