Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №1, с. 90–94 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

М.В. ТРЯМКИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕСОВЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ (p, q)-ИСКАЖЕНИЕМ

Аннотация. Показываем, что отображение с весовым ограниченным (p, q)-искажением может быть продолжено по непрерывности на множество, для которого модуль семейства асимптотических кривых равен нулю. Также устанавливаем аналог теоремы Иверсена для отображений с весовым ограниченным (n, n)-искажением.

Ключевые слова: отображение с весовым ограниченным (p, q)-искажением, емкость, модуль, асимптотическая кривая, асимптотическое значение.

УДК: 517.547 : 517.518

1. Введение. В 1960–1970-е гг. Ю.Г. Решетняк [1] заложил основы теории отображений с ограниченным искажением. Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется отображением с ограниченным искажением, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leqslant KJ(x, f)$, где $K \geqslant 1$ — постоянная, $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ — ее операторная норма и определитель соответственно.

Одна из классических задач квазиконформного анализа — это задача об устранении особенностей. Пусть $F \subset \Omega$ — замкнутое множество и $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Известно ([2], теорема 4.1), что если $\mathrm{cap}(F; W^1_n(\mathbb{R}^n)) = 0$ и $\mathrm{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F); W^1_n(\mathbb{R}^n)) > 0$, то f продолжается до непрерывного отображения $\widetilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Этот результат можно усилить. Напомним, что кривая $\beta : [0, 1) \to \mathbb{R}^n$ называется асимптотической для точки $x \in F$, если существует кривая $\alpha : [0, 1) \to \Omega \setminus F$ такая, что $f \circ \alpha = \beta$ и $\lim\limits_{t \to 1-0} \alpha(t) = x$. Е.А. Полецкий установил ([3], теорема 3)

Предложение 1 ([3], теорема 3). *Пусть* $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ *— отображение с ограниченным искажением,* $F \subset \Omega$ *— замкнутое множество,* $\dim F \leqslant n - 2$, $\widehat{\Gamma}$ *— семейство асимптотических кривых для точек* $x \in F$. *Если* $\mathrm{mod}_n \widehat{\Gamma} = 0$ *и* $\mathrm{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F); W^1_n(\mathbb{R}^n)) > 0$, *то* f *продолжается до непрерывного отображения* $\widetilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Поступила 31.07.2015

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 14-01-00552) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект № НШ-2263.2014.1).

Это утверждение сильнее, поскольку, как показано в ([3], пример 1), возможна ситуация, когда $\operatorname{cap}(F; W_n^1(\mathbb{R}^n)) > 0$, но $\operatorname{mod}_n \widehat{\Gamma} = 0$.

Наряду с затиранием особенностей интерес представляет также вопрос об асимптотическом значении. Говорят, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет асимптотическое значение c в точке $b \in \partial\Omega$, если для некоторой кривой $\gamma : [0, 1) \to \Omega$ такой, что $\gamma(t) \to b$ при $t \to 1 - 0$, имеем $c = \lim\limits_{t \to 1-0} f(\gamma(t))$. Аналогом теоремы Ф. Иверсена является

Предложение 2 ([4], теорема VII.2.6)**.** *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением и $b \in \partial\Omega$ — изолированная существенно особая точка. Тогда каждая точка в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\Omega)$ является асимптотическим значением f.*

Цель сообщения — получить аналоги предложений 1 и 2 для недавно введенного С.К. Водопьяновым класса отображений, служащего естественным обобщением класса отображений с ограниченным искажением.

Определение 1 ([5])**.** Пусть $\theta, \sigma : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — локально суммируемые функции (называемые *весовыми*) такие, что $\theta > 0$, $\sigma > 0$ почти всюду. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с (θ, σ)-весовым ограниченным (p, q)-искажением*, $n - 1 < q \leqslant p < \infty$, если:
1) f непрерывно, открыто и дискретно,
2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$,
3) $J(x, f) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$,
4) отображение f имеет *конечное искажение:*

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ из } J(x, f) = 0 \text{ имеем } Df(x) = 0,$$

5) функция локального (θ, σ)-весового q-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x, f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x, f) \neq 0; \\ 0, & \text{если } J(x, f) = 0, \end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

Через $K^{\theta,\sigma}_{q,p}(f; \Omega)$ обозначим величину $\|K_q^{\theta,\sigma}(x, f) \mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

В п. 2 формулируем теоремы 1 и 2, обобщающие сформулированные выше предложения на класс отображений, удовлетворяющих определению 1.

2. Предварительные сведения.

1.1. *Класс Соболева.* Всюду в тексте символ Ω обозначает область (т. е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$. Для области $U \subset \mathbb{R}^n$ запись $U \Subset \Omega$ означает, что U ограничено и $\overline{U} \subset \Omega$. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ положим $B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x_0| < r\}$, $S(x_0, r) = \partial B(x_0, r)$.

Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если существует функция $v_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\, dx,$$

то v_i называется обобщенной частной производной функции u и обозначется через $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Через ∇u обозначим вектор-функцию $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, имеющая в области Ω обобщенные частные производные по всем переменным, принадлежит пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$, если $u \in L_p(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

Отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу Соболева $W_p^1(\Omega)$ ($W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega)$), если все $f_i \in W_p^1(\Omega)$ (все $f_i \in W_p^1(U)$ для любой области $U \Subset \Omega$).

1.2. *Размерность.* Приведем определение и некоторые свойства топологической размерности $\dim F$ множества $F \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2 ([6], определение III, 1)**.** Пустое множество и только оно имеет размерность, равную -1. Множество F имеет размерность $\leqslant k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, в точке $x \in F$, если x обладает произвольно малыми окрестностями такими, что пересечение их границ со множеством F имеет размерность $\leqslant k-1$. Множество F имеет *размерность* $\leqslant k$, $\dim F \leqslant k$, если F имеет размерность $\leqslant k$ в каждой своей точке. Множество F имеет размерность k в точке $x \in F$, если верно, что F имеет размерность $\leqslant k$ в x, и неверно, что F имеет размерность $\leqslant k-1$ в x. Наконец, множество F имеет размерность k, $\dim F = k$, если $\dim F \leqslant k$ верно, а $\dim F \leqslant k-1$ неверно.

Предложение 3 ([6], теорема IV, 3)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\dim U = n$ в том и только том случае, если внутренность U непуста.*

Предложение 4 ([6], гл. IV, § 5, следствие 1)**.** *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $F \subset \Omega$, $\dim F \leqslant n-2$. Тогда множество $\Omega \setminus F$ связно.*

Замечание. В $\mathbb{R}^n$ также широко используется понятие хаусдорфовой размерности, которая, как следует из ([6], теорема VII, 2), не меньше топологической.

1.3. *Емкость.* Здесь мы определим несколько типов емкости. Более подробную информацию можно найти в ([7], гл. 7, 9; [8], гл. 2).

Далее функция $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, называемая *весовой*, считается локально суммируемой и почти всюду отличной от нуля.

Определение 3. *Конденсатором* называется пара $E = (U, K)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $K \subset U$ — компакт. Величина

$$\mathrm{cap}_p^\omega E = \inf_{u \in W_0(U,K)} \int_U |\nabla u(x)|^p \omega(x)\, dx,$$

где $W_0(K, U) = \{u \in C_0^\infty(U) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ u|_K = 1\}$, $p \in [1, \infty)$, называется *ω-весовой p-емкостью конденсатора E*. Если $\omega \equiv 1$, то пишем просто $\mathrm{cap}_p E$.

Определение 4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — область и $p \in [1, \infty)$. *Весовой p-емкостью компакта $K \subset U$ в пространстве $W_p^1(U, \omega)$* называется величина

$$\mathrm{cap}(K; W_p^1(U, \omega)) = \inf_{u \in W_0(K,U)} \left(\int_U u^p(x)\omega(x)\, dx + \int_U |\nabla u(x)|^p \omega(x)\, dx \right).$$

Если $\omega \equiv 1$, то пишем $\mathrm{cap}(K; W_p^1(U))$. На произвольные множества понятие емкости при $\omega \equiv 1$ распространяется обычным образом (см., например, [7], п. 7.2.1).

Отдельно рассмотрим случай, когда компакт K — это точка. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \Omega$. Будем говорить, что точка x_0 имеет нулевую весовую p-емкость в Ω, если для некоторого открытого шара $B(x_0, R) \subset \Omega$ имеем $\mathrm{cap}(\{x_0\}; W_p^1(B(x_0, R), \omega)) = 0$. Последнее соотношение с учетом определений 3, 4 и ([8], теорема 2.2, (iv)) влечет равенства

$$\mathrm{cap}_p^\omega(\{x_0\}, B(x_0, R)) = \lim_{r \to 0} \mathrm{cap}_p^\omega(B(x_0, R), \overline{B(x_0, r)}) = 0.$$

1.4. *Модуль. Промежуток* вещественной оси — это одно из множеств вида $(-\infty, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$ или $\langle a, \infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а каждая из угловых скобок может быть круглой или квадратной. Под *кривой* понимается непрерывное отображение $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток.

Пусть Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелевская функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, если для любой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$ имеем $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$. Совокупность всех допустимых функций обозначим через $\operatorname{adm} \Gamma$.

ω-весовым p-модулем семейства Γ, $p \in [1, \infty)$, называется величина

$$\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega\, dx.$$

Если $\omega \equiv 1$, то пишем просто $\operatorname{mod}_p \Gamma$. Подробнее о (невесовом) модуле см. в ([9], гл. 1, или [4], гл. II).

Аналогом неравенства Полецкого для отображений из определения 1 является

Предложение 5 ([10], теорема 1). *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если Γ — семейство кривых в области Ω, то справедливо неравенство*

$$(\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma))^{1/p'} \leqslant K_{p,q}^{\theta,1}(f; \Omega)^{n-1} (\operatorname{mod}_{q'}^\omega \Gamma)^{1/q'},$$

где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

1.5. *Существенная особенность.* Изолированная точка b границы области Ω называется существенной особой для отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to b$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела отображения f.

Справедлив следующий аналог теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса.

Предложение 6 ([5], следствие 6). *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непостоянное отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (n, n)-искажением и b — изолированная точка границы области Ω, имеющая нулевую ω-весовую n-емкость в $\Omega \cup \{b\}$, где $\omega(x) = \theta^{1-n}(x)$. Если b — существенно особая точка отображения f, то $\operatorname{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus \{b\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0$ для любой окрестности $U \subset \Omega \cup \{b\}$ точки b.*

2. Основные результаты.

В отличие от введения, в теореме 1 кривая $\gamma : [0, 1) \to \Omega \setminus F$ называется *асимптотической* для множества F, если $\operatorname{dist}(\gamma(t_k), F) \to 0$ для некоторой последовательности $t_k \to 1-0$ при $k \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $F \subset \Omega$ — замкнутое множество, $\dim F \leqslant n-2$, $n-1 < q < n \leqslant p < \frac{(n-1)^2}{n-2}$, весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема и Γ — семейство асимптотических кривых для множества F. Если $\operatorname{mod}_{q'}^\omega \Gamma = 0$ и всякая точка множества F имеет нулевую ω-весовую q'-емкость в Ω, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$, то при $p \neq n$ отображение f продолжается до непрерывного отображения $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, а при $p = n$ и дополнительном условии $\operatorname{cap}_n(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F); W_n^1(\mathbb{R}^n)) > 0$ — до непрерывного отображения $\widetilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Следующее утверждение — это обобщение теоремы Иверсена на класс отображений, удовлетворяющих определению 1. Напомним, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет *асимптотическое значение* z в точке $b \in \partial\Omega$, если $z = \lim\limits_{t \to 1-0} f(\gamma(t))$ для некоторой кривой $\gamma : [0, 1) \to \Omega$ такой, что $\lim\limits_{t \to 1-0} \gamma(t) = b$.

Теорема 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непостоянное отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (n, n)-искажением и b — изолированная точка границы области Ω, имеющая нулевую ω-весовую n-емкость в $\Omega \cup \{b\}$, где $\omega(x) = \theta^{1-n}(x)$. Если b — существенно особая точка отображения f, то каждая точка в $\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega)$ служит асимптотическим значением f.*

Отметим, что в доказательстве теорем 1 и 2 важную роль играют недавно установленные предложения 5 и 6.

Литература

[1] Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением* (Наука, Новосибирск, 1982).
[2] Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Distortion and singularities of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. **465**, 1–13 (1970).
[3] Полецкий Е.А. *О стирании особенностей квазиконформных отображений*, Матем. сб. **92** (2), 242–256 (1973).
[4] Rickman S. *Quasiregular mappings* (Springer-Verlag, 1993).
[5] Байкин А.Н., Водопьянов С.К. *Емкостные оценки, теоремы Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p, q)-искажением*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 290–321 (2015).
[6] Гуревич В., Волмэн Г. *Теория размерности* (ГИИЛ, Москва, 1948).
[7] Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева* (Изд-во Ленинградск. ун-та, Ленинград, 1985).
[8] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
[9] Väisälä J. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings* (Springer-Verlag, 1971).
[10] Трямкин М.В. *Оценки на модули семейств кривых для отображений с весовым ограниченным (p, q)-искажением*, Владикавказск. матем. журн. **17** (3), 65–74 (2015).

М.В. Трямкин

ассистент, кафедра высшей математики,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 2, г. Новосибирск, 630090, Россия,

e-mail: maxtryamkin@yandex.ru

M.V. Tryamkin

Asymptotic curves and asymptotic values for mappings with weighted bounded (p, q)-distortion

Abstract. We prove that a mapping with weighted bounded (p, q)-distortion can be extended by continuity to a set whose family of asymptotic curves has modulus zero. We also establish a counterpart to Iversen's theorem for a mapping with weighted bounded (n, n)-distortion.

Keywords: mapping with weighted bounded (p, q)-distortion, capacity, modulus, asymptotic curve, asymptotic value.

M.V. Tryamkin

Teaching Assistant, Chair of Higher Mathematics,
Novosibirsk State University,
2 Pirogov str., Novosibirsk, 630090 Russia,

e-mail: maxtryamkin@yandex.ru