ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 512

Ф.А. БЕЛЫХ, А.Ю. БОРЗАКОВ, А.В. ЛОБОДА

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ $M(2, \mathbb{C})$

Введение

При изучении аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в 3-мерном комплексном пространстве естественным образом возникают (см., напр., [1]) вещественные подалгебры Ли алгебры комплексных квадратных матриц 2-го порядка. В связи с этим можно предложить подход к классификации аффинно-однородных поверхностей, основанный на использовании именно таких несложных объектов, как алгебры матриц 2-го порядка. Однако в математической литературе авторы данной работы не нашли соответствующих описаний.

Данная статья содержит классификацию подалгебр Ли $M(2, \mathbb{C})$ всех размерностей от 0 до 4, к которым сводится упомянутая выше задача об однородности. В то же время в других приложениях интерес могут представлять аналогичные подалгебры всех возможных размерностей (от 0 до 7) алгебры Ли $M(2, \mathbb{C})$.

Как частный случай в данную статью включен результат работы [2], в которой построен полный список 3-мерных вещественных подалгебр Ли алгебры $M(2, \mathbb{C})$. Отметим, что традиционно 3-мерные алгебры Ли обсуждаются чаще других (см., напр., [3], [4]).

Описание еще одного частного случая 2-мерных подалгебр приведено в [5]. Однако в этой работе имеются "лишние" алгебры и нет обсуждений по их устранению. В связи с этим в § 2 приводится список 2-мерных подалгебр $M(2, \mathbb{C})$, необходимый для дальнейшего и даются необходимые комментарии.

1. Описание результатов

Основным результатом статьи является описание всех 4-мерных подалгебр обсуждаемой матричной алгебры $M(2, \mathbb{C})$ (теорема 3). Предлагаемый в статье метод изучения алгебр конкретной размерности опирается на информацию об алгебрах меньших размерностей. В связи с этим ниже приводится (теорема 1) достаточно объемное описание 2-мерных подалгебр Ли и цитируется (теорема 2) список 3-мерных подалгебр.

Приводимые описания естественно дополнить двумя следующими замечаниями:

1) единственная нульмерная подалгебра Ли в $M(2, \mathbb{C})$ — это алгебра, содержащая только нулевую матрицу;

2) одномерную вещественную подалгебру Ли в $M(2, \mathbb{C})$ порождает вещественная линейная оболочка любой ненулевой матрицы.

Все обсуждения в статье проводятся с точностью до матричных подобий. Напомним, что подобием с матрицей $C \in GL(2, \mathbb{C})$ называется преобразование $P_C : A \to CAC^{-1}$, действующее в пространстве $M(2, \mathbb{C})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 03-01-96493(р), 05-01-00630).

Теорема 1. *Любая 2-мерная вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ подобна одной из следующих верхнетреугольных алгебр (α, β — координаты в алгебре):*

$$g^{(1)}_{(\mu,\nu)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha\mu + \beta\nu \end{pmatrix} \right\}, \quad (\mu,\nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(1,i)\};$$

$$g^{(2)}_{(\theta,\varphi)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \beta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\}, \quad 0 \le \varphi \le \theta < \pi;$$

$$g^{(3)}_{(\varphi,r)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\varphi} & \beta \\ 0 & \alpha(e^{i\varphi} + r) \end{pmatrix} \right\}, \quad \varphi \in [0,\pi), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$g^{(4)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\};$$

$$g^{(5)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \right\};$$

$$g^{(6)}_{\varphi} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\varphi} & \beta \\ 0 & \alpha e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\};$$

$$g^{(7)}_{\varphi} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta) e^{i\varphi} & \beta \\ 0 & (\alpha + i\beta) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\}, \quad \varphi \in [0,\pi);$$

$$g^{(8)}_{t} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta) & \alpha + i\beta t \\ 0 & (\alpha + i\beta) \end{pmatrix} \right\}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

$$g^{(9)}_{\varphi} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\varphi} & \alpha + i\beta \\ 0 & \alpha e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\}, \quad \varphi \in [0,\pi);$$

$$g^{(10)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha + i\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Теорема 2 ([2]). *Любая 3-мерная вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ подобна либо алгебре $\mathrm{su}(2)$, либо алгебре $\mathrm{su}(1,1)$, либо некоторой алгебре верхнетреугольных матриц. Полный список всех (с точностью до матричного подобия) верхнетреугольных 3-мерных вещественных подалгебр Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ приведен ниже (α, β, γ — координаты в алгебре):*

1) *диагональные алгебры;*

2) *алгебры, все элементы которых имеют кратные спектры,*

$$S^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & \gamma \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \right\};$$

$$S^{(2)}_{\theta} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\theta} & \beta + i\gamma \\ 0 & \alpha e^{i\theta} \end{pmatrix} \right\}, \quad \theta \in [0,\pi);$$

$$S^{(3)}_{\theta} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta) e^{i\theta} & \beta + i\gamma \\ 0 & (\alpha + i\beta) e^{i\theta} \end{pmatrix} \right\}, \quad \theta \in [0,\pi);$$

3) *алгебры, не сводимые к диагональным и содержащие матрицы с простыми спектрами,*

$$f^{(1)}_{\theta} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\theta} & \beta \\ 0 & (\alpha e^{i\theta} + \gamma) \end{pmatrix} \right\};$$

$$f^{(2)}_{\theta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (\alpha + i\beta) \\ 0 & \gamma e^{i\theta} \end{pmatrix} \right\}, \quad \theta \in [0,\pi);$$

$$f^{(3)}_{(\varphi,\lambda)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha e^{i\varphi} & (\beta + i\gamma) \\ 0 & \alpha\lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad \varphi \in [0,\pi), \quad \lambda \ne e^{i\varphi};$$

$$f^{(4)}_{(\mu,\xi)} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta) & \gamma \\ 0 & (\alpha + i\beta) + (\xi\beta - \mu\alpha) \end{pmatrix} \right\}, \quad (\mu,\xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Теорема 3. *Всякая 4-мерная вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ подобна либо некоторой верхнетреугольной алгебре, либо одной из алгебр вида*

$$h_\theta^{(+)} = \mathrm{su}(2) + \langle \mathrm{diag}(e^{i\theta})\rangle, \quad h_\theta^{(-)} = \mathrm{su}(1,1) + \langle \mathrm{diag}(e^{i\theta})\rangle, \quad \theta \in [0,\pi). \tag{1.1}$$

При этом любая 4-мерная верхнетреугольная алгебра подобна одной из алгебр $h=\langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$ с базисом вида

$$h^{(1)}: \quad E_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}; \tag{1.2}$$

$$h^{(2)}: \quad E_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}; \tag{1.3}$$

$$h^{(3)}: \quad E_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}; \tag{1.4}$$

$$h^{(4)}_{(\varphi,\psi)}: E_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & e^{i\psi}\end{pmatrix}, \quad \varphi,\psi \in [0,\pi); \tag{1.5}$$

$$h^{(5)}_{(\mu,\nu)}: E_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & \nu\end{pmatrix}, \quad \mu,\nu \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Обсуждения теорем 1 и 3 содержатся в последующих параграфах статьи.

Замечание. Основное содержание теорем 1–3 составляет подробная классификация матричных подалгебр. Приведенные для полноты формулировок утверждения о приводимости таких алгебр к треугольному виду получаются при этом как промежуточные результаты. Эти утверждения можно также получить в качестве следствий известных фактов об алгебрах Ли.

2. Описание 2-мерных подалгебр

Доказательство теоремы 1 (см. также [5]) иллюстрирует

Предложение 1. *Любая 2-мерная подалгебра $g \subset M(2,\mathbb{C})$ подобна некоторой верхнетреугольной алгебре.*

Доказательство. Считая, что первая базисная матрица E_1 алгебры g имеет жорданов нормальный вид, рассмотрим три случая.

1) $E_1 = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $\lambda_1 \neq 0$ (т.к. подобие P_C с матрицей $C = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ меняет местами элементы λ_1, λ_2 диагональной матрицы E_1);

2) $E_1 = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, $\lambda \neq 0$, и дополнительно считаем, что обе базисные матрицы обсуждаемой 2-мерной алгебры имеют кратный спектр (т.к. иначе ситуация сводится к первому случаю);

3) $E_1 = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, и ни одна из матриц алгебры g не диагонализируема (т.к. иначе ситуация сводится к одному из двух первых случаев).

Рассмотрим подробнее эти три случая.

1) Базисные матрицы алгебры g можно записать в виде

$$E_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi < \pi)$, $a_2 = ite^{i\varphi}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Скобка двух таких матриц равна

$$[E_1, E_2] = \begin{pmatrix}0 & b_2(\lambda_1 - \lambda_2)\\ c_2(\lambda_2 - \lambda_1) & 0\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Так как $[E_1, E_2] = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ для некоторых вещественных α_1, α_2, то $[E_1, E_2]_{11} = \alpha_1 e^{i\varphi} + \alpha_2 ite^{i\varphi} = 0$. Следовательно, равны нулю два числа α_1 и $(\alpha_2 t)$.

Если $\alpha_2 = 0$ $(t \neq 0)$, то $b_2 = c_2 = 0$, т.е. вся алгебра g диагональная.

Если же $\alpha_2 \neq 0$ (но $t = 0$), то рассмотрим $(1,2)$- и $(2,1)$-элементы скобки (2.1):

$$b_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \alpha_2 b_2, \quad c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha_2 c_2.$$

При $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ отсюда следует, что либо $c_2 = 0$, либо $b_2 = 0$. В первом подслучае матрица E_2, а с ней и алгебра g верхнетреугольные. Во втором подслучае g нижнетреугольная, и, следовательно, она также подобна верхнетреугольной алгебре (за счет подобия с матрицей $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$).

2) Во втором случае достаточно подобием привести вторую базисную матрицу E_2 к жордановой нормальной форме. Скалярная матрица E_1 сохранит при этом свой вид, а вся алгебра g окажется верхнетреугольной.

3) Рассмотрим матрицу

$$A = E_2 + \mu E_1 = \begin{pmatrix} a_2 + \lambda\mu & b_2 + \mu \\ c_2 & d_2 + \lambda\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^* & b_2^* \\ c_2^* & d_2^* \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

с произвольным вещественным μ, дискриминант характеристического многочлена которой

$$D = (a_2^* - d_2^*)^2 + 4b_2^* c_2^* = (a_2 - d_2)^2 + 4(b_2 + \mu)c_2. \tag{2.3}$$

Так как любая матрица вида (2.2) должна иметь только кратные корни, то (2.3) равно нулю при любых $\mu \in \mathbb{R}$. Необходимым условием этого является равенство $c_2 = 0$, следовательно, алгебра g и в этом случае верхнетреугольная. $\square$

Для доказательства теоремы 1 необходимо уточнение некоторых деталей описанной схемы. Поскольку аналогичный теореме 1 список был получен ранее в [5], обратим здесь внимание лишь на возможность подобия различных алгебр из приведенных списков.

Несложно показать, что в списках $g^{(2)}$–$g^{(10)}$ теоремы 1 возможны только тривиальные подобия, т. е. все алгебры из этих семейств попарно различны. Подобие алгебры типа $g^{(1)}$ алгебре любого другого типа из теоремы 1 также невозможно.

В то же время для 4-параметрического семейства $g^{(1)}_{(\mu,\nu)}$ справедлив следующий интересный по формулировке критерий.

Предложение 2. *Пусть $g^{(1)}_{(\mu,\nu)}$ и $g^{(1)}_{(\xi,\eta)}$ — две алгебры из теоремы 1 с различными наборами (μ,ν) и (ξ,η) и разложения μ, ν, ξ, η на вещественные и мнимые части имеют вид $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$. Тогда необходимым и достаточным условием матричного подобия алгебр $g^{(1)}_{(\mu,\nu)}$ и $g^{(1)}_{(\xi,\eta)}$ является равенство*

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этого критерия здесь не приводим. Отметим лишь, что оно аналогично доказательству более сложного случая 4-мерных алгебр, приведенному в конце статьи.

3. Идея описания 4-мерных подалгебр

Построение полных списков 2-мерных (см. § 2), а также 3-мерных (см. [2]) подалгебр Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$ позволяет существенно упростить процедуру описания 4-мерных подалгебр Ли той же алгебры $M(2,\mathbb{C})$. Упрощение основывается на расширении матричных алгебр Ли в следующем смысле.

Пусть g — некоторая подалгебра Ли в $M(2,\mathbb{C})$, $A_1, \dots, A_k \in M(2,\mathbb{C})$. Если линейное пространство $h = \langle A_1 \rangle + \dots + \langle A_k \rangle + g$ замкнуто относительно матричной скобки, то оно само является подалгеброй Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$. Будем в таком случае говорить, что подалгебра Ли h является *расширением* подалгебры g с помощью матриц $A_1, \dots, A_k$.

Лемма 1. *Пусть h — вещественная подалгебра Ли алгебры $M(2,\mathbb{C})$, и ее размерность $\dim_{\mathbb{R}} h > 2$. Тогда h является расширением некоторой верхнетреугольной алгебры g при помощи не более чем двух матриц.*

Доказательство леммы проводится на основе исследования совокупности M_{21} всех матричных (поддиагональных) $(2,1)$-элементов изучаемой алгебры h.

В зависимости от вещественной размерности пространства M_{21} (0, 1 или 2) либо сразу имеем диагональную алгебру, либо выделяем в алгебре одну или две матрицы, не являющиеся верхнетреугольными. С помощью этих матриц легко строится требуемое представление исходной алгебры.

Следствие. С точностью до матричного подобия любая 4-мерная вещественная подалгебра Ли h алгебры $M(2,\mathbb{C})$ является

либо верхнетреугольной;

либо расширением вида

$$h = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ e^{i\theta} & d_1 \end{pmatrix} + g_3, \quad \theta \in [0,\pi), \tag{3.1}$$

одной из 3-мерных алгебр теоремы 2;

либо расширением вида

$$h = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ i & d_2 \end{pmatrix} + g_2 \tag{3.2}$$

одной из 2-мерных алгебр теоремы 1.

Замечание 1. Матричное подобие, вообще говоря, может изменять размерность пространства M_{21}. Например, алгебры $\mathrm{su}(1,1)$ и $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ являются матрично подобными. В то же время размерности M_{21} для них равны соответственно 2 и 1.

При изучении расширений видов (3.1) и (3.2) часто будем использовать

Замечание 2. Если 4-мерная вещественная подалгебра Ли h алгебры $M(2,\mathbb{C})$ содержит скалярную матрицу $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{smallmatrix}\right)$, то для этой алгебры справедливо первое из утверждений теоремы 3. Действительно, имеющуюся скалярную матрицу легко дополнить до базиса всей алгебры h так, что линейная оболочка оставшихся базисных матриц сама является 3-мерной алгеброй.

4. Расширения 3-мерных подалгебр

Предложение 3. *Для всех 4-мерных алгебр вида* (3.1) *выполняется первое утверждение теоремы* 3.

Доказательство предложения 3 фактически сводится к перебору всех алгебр из теоремы 2 (типов $S^{(k)}, f^{(l)}$, а также диагональных) и состоит из следующей леммы и замечания 3.

Лемма 2. *Если g — одна из алгебр $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, то линейное пространство* (3.1) *не замкнуто относительно скобки.*

Доказательство. Любая из алгебр с кратными спектрами $S^{(1)}$–$S^{(3)}$, а также столбцовая алгебра $f_\theta^{(2)}$ содержат матрицу H вида $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & A \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ с ненулевым угловым элементом A. При этом скобка

$$[E_1, H] = \begin{pmatrix} -Ae^{i\theta} & (a_1 - d_1)A \\ 0 & Ae^{i\theta} \end{pmatrix}$$

является верхнетреугольной матрицей.

Принадлежность такой матрицы линейному пространству (3.1) означала бы включение $[E_1, H] \subset g$. Но это невозможно, т.к. ни алгебры с кратными спектрами, ни столбцовая алгебра $f_\theta^{(2)}$ не содержат матриц с двумя различными ненулевыми собственными значениями.

Для алгебры $f^{(3)}_{(\varphi,\lambda)} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha e^{i\varphi} & (\beta+i\gamma) \\ 0 & \alpha\lambda \end{smallmatrix} \right) \right\}$ аналогичная незамкнутость устанавливается несколько сложнее. Любая такая алгебра содержит матрицы $H_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ и $H_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Скобки E_1 с H_1 и H_2 имеют верхнетреугольный вид

$$[E_1, H_1] = \begin{pmatrix} -e^{i\theta} & (a_1 - d_1) \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad [E_1, H_2] = \begin{pmatrix} -ie^{i\theta} & i(a_1 - d_1) \\ 0 & ie^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Если обе эти скобки принадлежат $\langle E_1 \rangle + g$, то, как и раньше, это означает, что они принадлежат исходной алгебре $g = f^{(3)}_{(\varphi,\lambda)}$. Поправляя скобки за счет H_1 и H_2, делаем вывод, что пара диагональных матриц $H_1^* = \left(\begin{smallmatrix} -e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{smallmatrix} \right)$ и $H_2^* = \left(\begin{smallmatrix} -ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{i\theta} \end{smallmatrix} \right)$ также принадлежит алгебре $f^{(3)}_{(\varphi,\lambda)}$. Это, однако, невозможно, т. к. система двух матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} -e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -ie^{i\theta} & 0 \\ 0 & ie^{i\theta} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

не имеет вещественных решений. □

Замечание 3. Заметим, что все остальные 3-мерные алгебры из теоремы 2 содержат ненулевые скалярные матрицы. Для диагональных 3-мерных алгебр это очевидно. Любая из алгебр типа $f^{(2)}_\theta$ содержит матрицу $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{smallmatrix} \right)$ ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$). Наконец, для алгебры $f^{(4)}_{(\mu,\xi)} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} (\alpha+i\beta) & \gamma \\ 0 & (\alpha+i\beta)+(\xi\beta-\mu\alpha) \end{smallmatrix} \right) \right\}$ вид требуемой скалярной матрицы зависит от параметров μ, ξ.

Например, при $\xi = 0$ соответствующая алгебра содержит матрицу $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix} \right)$ ($\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$). А при $\xi \neq 0$ скалярной матрицей, принадлежащей $f^{(4)}_{(\mu,\xi)}$, является $\left(\begin{smallmatrix} (\xi+i\mu) & 0 \\ 0 & (\xi+i\mu) \end{smallmatrix} \right)$ ($\alpha = \xi$, $\beta = \mu$, $\gamma = 0$).

В силу замечания 3 для расширения $h = \langle E_1 \rangle + g$ любой такой алгебры g выполняется первое утверждение теоремы 3. Таким образом, предложение 3 доказано.

5. Расширения 2-мерных подалгебр[1]

Имея в виду в первую очередь доказательство теоремы 3, заметим, что 2-мерные алгебры типов $g^{(5)}$, $g^{(6)}$, $g^{(7)}$ содержат скалярные матрицы. Поэтому расширение (3.2) любой из таких алгебр удовлетворяет первой части теоремы 3. Еще 4 типа двумерных алгебр являются “непродуктивными” в смысле леммы 2.

Лемма 3. *Если g — одна из алгебр вида $g^{(4)}$, $g^{(8)}$, $g^{(9)}$, $g^{(10)}$, то линейное пространство* (3.2) *не замкнуто относительно скобки.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что все перечисленные в ней 2-мерные алгебры являются верхнетреугольными и содержат матрицу вида $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ с ненулевым угловым элементом A. Скобка такой матрицы с $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ e^{i\theta} & d_1 \end{smallmatrix} \right)$ уже вычислялась в лемме 2. С учетом равенства $e^{i\theta} = 1$ получаем

$$[E_1, H] = \begin{pmatrix} -A & a_1 - d_1 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Так как эта скобка оказывается верхнетреугольной матрицей, имеющей два ненулевых различных собственных значения, то принадлежность ее пространству (3.2) невозможна. □

Замечание. Точно так же не замкнуто относительно скобки и линейное пространство $h = \langle E_1 \rangle + \langle E_2 \rangle + g^{(3)}_{(\varphi,r)}$, т. е. расширение вида (3.2) алгебры $g^{(3)}$. Но здесь для доказательства нужно рассмотреть две скобки $[E_1, H]$, $[E_2, H]$ с матрицей $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \in g^{(3)}_{(\varphi,r)}$. Имеем

$$[E_1, H] = \begin{pmatrix} -1 & (a_1 - d_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [E_2, H] = \begin{pmatrix} -i & (a_2 - d_2) \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

[1] Результаты этого и двух следующих разделов принадлежат первому автору.

Так как обе эти матрицы верхнетреугольные, то из их принадлежности пространству (3.2) следует их принадлежность исходной алгебре

$$g^{(3)}_{(\varphi,r)} = \left\langle \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi}+r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

что невозможно.

Относительно двух оставшихся типов $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ диагональных алгебр справедливы два следующих утверждения.

Предложение 4. *Если линейное пространство h с базисом*

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ i & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

является матричной алгеброй Ли, то для нее выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) *h подобна некоторой верхнетреугольной алгебре;*

2) *h содержит скалярную матрицу.*

Предложение 5. *Если линейное пространство h с базисом*

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ i & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

при $(\mu,\nu) \neq (1,i)$ является матричной алгеброй Ли, то для нее выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) *h подобна некоторой верхнетреугольной алгебре;*

2) *h содержит скалярную матрицу.*

Докажем здесь лишь более сложное предложение 5. Заметим сначала, что в базисе (5.1) можно “улучшить” две первые матрицы и получить в них условия $a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим теперь четыре матричные скобки элементов “улучшенного” базиса:

$$[E_3,E_1] = \begin{pmatrix} 0 & b_1(1-\mu) \\ \mu-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E_3,E_2] = \begin{pmatrix} 0 & b_2(1-\mu) \\ i(\mu-1) & 0 \end{pmatrix},$$
$$[E_4,E_1] = \begin{pmatrix} 0 & b_1(i-\nu) \\ (\nu-i) & 0 \end{pmatrix}, \quad [E_4,E_2] = \begin{pmatrix} 0 & b_2(i-\nu) \\ i(\nu-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $(1,1)$-элементы всех этих скобок нулевые, то каждая из скобок представляется в виде линейной комбинации лишь двух “улучшенных” матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ i & d_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, для некоторых вещественных чисел α_k, β_k, γ_k, δ_k $(k=1,2)$ справедливы равенства

$$\mu - 1 = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad b_1(1-\mu) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, \tag{5.2}$$
$$i(\mu-1) = \beta_1 + i\beta_2, \quad b_1(1-\mu) = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \tag{5.3}$$
$$\nu - i = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad b_1(i-\nu) = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2, \tag{5.4}$$
$$i(\nu-i) = \delta_1 + i\delta_2, \quad b_2(i-\nu) = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2. \tag{5.5}$$

Из совместного рассмотрения первых уравнений четырех этих систем получаем равенства

$$\beta_1 = -\alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1, \quad \delta_1 = -\gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_1.$$

Тогда вторые уравнения систем (5.2)–(5.5) превращаются в

$$(\alpha_1 + \mu - 1)b_1 + \alpha_2 b_2 = 0, \quad -\alpha_2 b_1 + (\alpha_1 + \mu - 1)b_2 = 0 \tag{5.6}$$

и

$$(\gamma_1 + \nu - i)b_1 + \gamma_2 b_2 = 0, \quad -\gamma_2 b_1 + (\gamma_1 + \nu - 1)b_2 = 0. \tag{5.7}$$

Определитель системы (5.6) равен

$$\Delta_1 = (\alpha_1 + \mu - 1)^2 + \alpha_2^2.$$

Условие $\Delta_1 \neq 0$ означает, что $b_1 = b_2 = 0$ и соответствует треугольной алгебре h.

Рассмотрим случай $\Delta_1 = 0$. Отделяя в этом равенстве вещественные и мнимые части, при $\mu_1 = \operatorname{Re}\mu$, $\mu_2 = \operatorname{Im}\mu$ получим

$$(\alpha_1 + \mu_1 - 1)^2 + \alpha_2^2 - \mu_2^2 = 0, \quad \mu_2(\alpha_1 + \mu_1 - 1) = 0. \tag{5.8}$$

Если здесь $\mu_2 = 0$, то из (5.2) и (5.8) получаем $\mu_1 = 1$. Это означает, что базисная матрица $E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ алгебры h скалярная. Если же $\mu_2 \neq 0$, то из тех же систем (5.2) и (5.8) в этом случае получаем

$$\mu = 1 + i\mu_2. \tag{5.9}$$

Рассматривая систему (5.7), можно получить по аналогии либо нижнетреугольный вид алгебры h (если $\Delta_2 = (\gamma_1 + \nu - i)^2 + \gamma_2^2 \neq 0$), либо скалярный вид матрицы $E_4 = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ (если $\Delta_2 = 0$, $\nu_2 = \operatorname{Im}\nu = 1$), либо (при $\nu_2 \neq 1$) условие $\nu_1 = \operatorname{Re}\nu = 0$.

В последнем случае имеем

$$\nu = i\nu_2 \quad (\nu_2 \neq 1). \tag{5.10}$$

Остается заметить, что при выполнении условий (5.9) и (5.10) линейная комбинация

$$E_3 + \frac{\mu_2}{1-\nu_2} E_4 = \begin{pmatrix} 1 + i\frac{\mu_2}{1-\nu_2} & 0 \\ 0 & 1 + i\mu_2(1 + \frac{\nu_2}{1-\nu_2}) \end{pmatrix}$$

является скалярной матрицей.

Итак, во всех случаях для алгебры h выполняется одно из двух утверждений предложения 5.

В целом лемма 3, замечание к ней и предложения 4 и 5 составляют полное описание 4-мерных алгебр Ли вида (3.2). С учетом результатов § 3 этим завершается доказательство теоремы 3.

6. Описание верхнетреугольных 4-мерных подалгебр

Лемме 1 аналогична

Лемма 4. *Произвольная 4-мерная верхнетреугольная подалгебра Ли h алгебры $M(2,\mathbb{C})$ является расширением некоторой диагональной алгебры при помощи не более чем двух матриц.*

Например, рассматриваемая алгебра Ли h может изначально оказаться диагональной. Несложно убедиться, что существует лишь одна такая алгебра, а именно

$$h^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \gamma + i\delta \end{pmatrix} \right\}, \tag{6.1}$$

где α, β, γ, δ — координаты в алгебре. В этом случае h есть тривиальное расширение самой себя.

Если h не является диагональной, то множество M_{12} ее матричных $(1,2)$-элементов имеет вещественную размерность, равную 1 или 2.

В первом случае базисом h является набор матриц вида

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & e^{i\theta} \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

а во втором — четверка матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & i \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Предложение 6. *Существует единственная (с точностью до матричного подобия) алгебра* $h^{(2)} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$, *базис которой имеет вид* (6.2). *В качестве базиса этой алгебры можно взять следующие матрицы*:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Для доказательства рассмотрим (если потребуется) измененный набор матриц E_2, E_3, E_4 и добьемся выполнения для матрицы E_2 неравенства $a_2 \neq d_2$. После этого рассмотрим разложение скобки

$$[E_1, E_2] = \begin{pmatrix} 0 & (d_2 - a_2)e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

по базису E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры h: $[E_1, E_2] = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4$. Из этого разложения следует, во-первых, что $d_2 - a_2 = \beta_1 \in \mathbb{R}$ (при этом $\beta_1 \neq 0$). А во-вторых, получаем линейную зависимость векторов

$$\beta_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ d_3 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} a_4 \\ d_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Переходя теперь к исправленной матрице $E_1^* = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4 = [E_1, E_2]$, можно считать, что коэффициенты a_1, d_1 первой матрицы базиса (6.2) равны нулю.

Рассматривая дополнительно скобки $[E_1, E_3]$ и $[E_1, E_4]$, получаем условия

$$d_k - a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 2, 3, 4. \qquad (6.5)$$

Заметим, что существует единственная 3-мерная диагональная алгебра g, для всех базисных матриц которой выполнены условия (6.5). Действительно, пусть базис такой алгебры есть

$$E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 + t_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 + t_3 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & a_4 + t_4 \end{pmatrix},$$

где $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$, $t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$.

Рассматривая линейные комбинации матриц E_2, E_3, E_4, можно перейти к новому базису алгебры g вида

$$E_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^* = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad E_4^* = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}.$$

Можно еще упростить этот базис, заменяя E_3^* и E_4^* на пару $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$.

Следовательно, обсуждаемая 3-мерная алгебра g имеет базисом, например, матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$, а любая алгебра h с базисом (6.2) есть расширение $h = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle + g$.

Наконец, подобием P_C с матрицей $C = \left(\begin{smallmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ можно превратить $E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ в $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, не изменяя при этом трех остальных диагональных матриц базиса (6.2). Искомая алгебра построена.

Предложение 7. *Любая алгебра, имеющая базис вида* (6.3), *подобна одной из алгебр, описанных в* §§ 4, 5, *или одной из алгебр* (1.4), (1.5), (1.6) *теоремы* 3.

Доказательство. Рассмотрим множество M_{11} матричных $(1,1)$-элементов двумерной диагональной алгебры g. Для размерности n этого линейного пространства имеются три возможности: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

В первом случае, вычисляя скобки $[E_1, E_3]$ и $[E_1, E_4]$ базисных матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & i \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

легко получить равенства $a_1 = a_2 = 0$. Следовательно, 4-мерная алгебра h оказывается в этом случае "столбцовой", имеющей вид (1.4).

Во втором случае можно считать базис обсуждаемой 4-мерной алгебры h имеющим вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} it_1 e^{i\theta} & 1 \\ 0 & ir_1 e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} it_2 e^{i\theta} & i \\ 0 & ir_2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

где $\theta, \varphi \in [0, \pi)$, $t_k, r_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$. Рассмотрение скобок $[E_1, E_3]$, $[E_2, E_3]$ приводит здесь к условиям $t_1 = t_2 = 0$.

Аналогично из скобок $[E_1, E_4]$, $[E_2, E_4]$ выводятся равенства $r_1 = r_2 = 0$. Так получается алгебра (1.5).

Наконец, в третьем случае запишем базис обсуждаемой алгебры в виде

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

с некоторыми комплексными d_k $(1 \le k \le 4)$. В этом случае

$$[E_1, E_3] = \begin{pmatrix} 0 & d_3 - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E_2, E_3] = \begin{pmatrix} 0 & i(d_3 - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скобки $[E_1, E_4]$, $[E_2, E_4]$ оказываются аналогичным образом выражены через разность $(d_4 - i)$.

Если здесь пара $(d_3, d_4) \ne (1, i)$, то несложно показать, что $d_1 = d_2 = 0$. В этом случае получаем алгебру (1.6) с ограничением $(\mu, \nu) \ne (1, i)$.

Пусть теперь $d_3 = 1, d_4 = i$. Тогда базис обсуждаемой алгебры h имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

и содержит две скалярные матрицы.

При $d_1 = d_2 = 0$ снова получаем алгебру вида (1.6), снимая тем самым введенные выше ограничения на параметры (μ, ν).

Если же хотя бы один из этих коэффициентов, например, d_1, отличен от нуля, то алгебра h подобна одной из алгебр, рассмотренных ранее. Действительно, подобие P_C с матрицей $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -d^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ диагонализирует матрицу E_1 из (6.6), сохраняет столбцовый вид E_2 и оставляет неизменными скалярные матрицы E_3 и E_4. Следовательно, новый базис алгебры h содержит не менее 3-х диагональных матриц. Такая алгебра сводится либо к (6.1), либо к (6.4).

Предложение 7, а вместе с ним и теорема 3, доказаны.

7. Отсутствие подобий в построенных списках 4-мерных алгебр

Предложение 8. *Для матричных алгебр из теоремы* 3 *возможны только тривиальные подобия.*

Для доказательства, во-первых, заметим, что никакие две алгебры типов (1.1), т. е. $h_\theta^{(-)}$ и $h_\theta^{(+)}$ не являются матрично подобными и не сводятся (матричными подобиями) к верхнетреугольным алгебрам из теоремы 4.

Во-вторых, убедимся, что никакие две алгебры из семейств (1.2)–(1.6) не могут быть подобными.

Действительно, диагональная алгебра (1.2) уникальна и не может быть подобна никакой другой из оставшихся алгебр именно в силу своей диагональности.

Далее рассмотрим семейства скалярных матриц, содержащиеся в изучаемых алгебрах и сохраняющиеся при любых подобиях. В одиночной алгебре (1.3) такое семейство является 2-мерным. Для сравнения заметим, что в алгебре (1.4) семейство S скалярных матриц является 0-мерным, а в любой алгебре типа (1.5) такое семейство не более чем 1-мерно. Наконец, скалярная часть S не более чем 1-мерна для всех алгебр из самого “большого” семейства (1.6), за исключением алгебры, соответствующей набору $(\mu, \nu) = (1, i)$.

В последнем случае скалярная часть S, очевидно, является 2-мерной. Но алгебра $h^{(5)}_{(1,i)}$ является коммутативной, а алгебра (1.3) таким свойством не обладает. Это означает, что и вторая одиночная алгебра (1.3) не может быть подобной ни одной другой алгебре из теоремы 4.

Теперь обратим внимание на матрицы, имеющие нулевые собственные значения. У "столбцовой" алгебры (1.4) таковы все ее элементы. В то же время в любой алгебре типа (1.5) имеется матрица $E_3 + E_4 = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}$ с двумя ненулевыми собственными значениями.

Среди алгебр последнего типа (1.6) имеется лишь одна, "строчная" алгебра $h^{(5)}_{(0,0)}$, все элементы которой имеют нулевое характеристическое значение. В любой другой алгебре типа (1.6) с набором (μ, ν), отличным от $(0, 0)$, имеются матрицы с ненулевыми собственными значениями.

Как известно, "строчная" и "столбцовая" алгебры не являются матрично подобными. Этими рассуждениями алгебра (1.4) отделяется от семейств (1.5) и (1.6).

С точностью до матричных подобий семейства (1.5) и (1.6) также отделены друг от друга. Действительно, спектры всех элементов любой алгебры $h^{(4)}_{(\varphi,\psi)}$ при $\varphi \neq \psi$ лежат на двух прямых, наклоненных соответственно под углами φ и ψ к вещественной оси (при $\varphi = \psi$ на одной прямой). В то же время спектры элементов любой алгебры (1.6) заметают всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

В-третьих, необходимо показать, что внутри каждого из "больших" семейств (1.5) и (1.6) подобия двух алгебр возможны лишь при совпадении задающих эти алгебры наборов параметров. Рассмотрим здесь более сложное семейство (1.6), опуская почти очевидный случай (1.5).

Предположим, что имеется пара подобных алгебр $h^{(5)}_{(\xi,\eta)}$ и $h^{(5)}_{(\mu,\nu)}$, а невырожденной матрицей, осуществляющей подобие, является $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Это означает, что для любой из базисных матриц E_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ первой алгебры матрица $P_C(E_k) = CE_kC^{-1}$ допускает разложение $P_C(E_k) = \alpha_k E_1^* + \beta_k E_2^* + \gamma_k E_3^* + \delta_k E_4^*$ по базису второй алгебры (все коэффициенты α_k, β_k, γ_k, δ_k вещественны).

Последнее матричное равенство перепишем в виде

$$CE_k = (\alpha_k E_1^* + \beta_k E_2^* + \gamma_k E_3^* + \delta_k E_4^*)C. \tag{7.1}$$

Из уравнения (7.1) для матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ легко следует, что коэффициент c_{22} обсуждаемой матрицы подобия отличен от нуля.

Подставляя в (7.1) матрицы E_3 и E_4, получим восемь скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (\gamma_3 + i\delta_3)c_{11} + (\alpha_3 + i\beta_3)c_{21}, & c_{11}i &= (\gamma_4 + i\delta_4)c_{11} + (\alpha_4 + i\beta_4)c_{21}, \\
c_{12}\xi &= (\gamma_3 + i\delta_3)c_{12} + (\alpha_3 + i\beta_3)c_{22}, & c_{12}\eta &= (\gamma_4 + i\delta_4)c_{12} + (\alpha_4 + i\beta_4)c_{22}, \\
c_{21} &= (\gamma_3\mu + \delta_3\nu)c_{21}, & c_{21}i &= (\gamma_4\mu + \delta_4\nu)c_{21}, \\
c_{22}\xi &= (\gamma_3\mu + \delta_3\nu)c_{22}, & c_{22}\eta &= (\gamma_4\mu + \delta_4\nu)c_{22}.
\end{aligned}$$

За счет неравенства $c_{22} \neq 0$ эта система упрощается. Далее ее достаточно рассмотреть при $c_{21} = 0$ и $c_{21} \neq 0$. В каждом из этих случаев получаем один и тот же вывод: $\xi = \mu$, $\eta = \nu$. Эти равенства означают возможность только тривиального подобия рассматриваемых алгебр.

Литература

1. Лобода А.В., Ходарев А.С. *Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 10. – С. 38–50.
2. Loboda A.V. *Tree-dimensional Lie subalgebras of matrix algebra* $M(2, \mathbb{C})$ // Russian J. of Math. Phys. – 2003. – V. 10. – № 4. – P. 495–500.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* – М.: Наука, 1979. – 760 с.

4. Михайличенко Г.Г. *Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости* // Сиб. матем. журн. – 1982. – Т. 23. – № 5. – С. 132–141.
5. Пушмина Н.С.,Черных С.С., Седаев А.А. *Классификация двумерных вещественных подалгебр алгебры Ли* $M(2, \mathbb{C})$ // Тр. 5-й междунар. конф. молодых. ученых и студентов "Актуальные проблемы современной науки". – Самара, 2004. – С. 104–107.

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступили
первый вариант 01.11.2005
окончательный вариант 23.05.2006