ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 519.6 : 519.85

И.В. КОННОВ

РЕАЛИЗУЕМЫЕ ДОПУСТИМЫЕ КВАЗИНЕРАСТЯГИВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Введение

Многие методы релаксационного типа, предназначенные для решения задач оптимизации, равновесия и вариационных неравенств, включают выполнение операции проектирования на допустимое множество на каждой итерации. Эта операция позволяет, во-первых, сохранить допустимость итерационной последовательности, а во-вторых, не увеличить при этом расстояние до множества решений в силу нерастягивающих свойств проекции. Наиболее известным среди такого рода методов является метод проекции градиента. Однако область применения операции проектирования довольно ограничена, поскольку в общем случае, когда допустимое множество имеет вид

$$D = \{x \in H \mid f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m\}, \tag{1}$$

где $f_i : H \to R$, $i = 1, \dots, m$, — выпуклые нелинейные функции, H — гильбертово пространство, операция проектирования на D обычно не может быть реализована с помощью конечной процедуры. В то же время, чтобы сохранить отмеченные полезные свойства, вместо проектирования на D можно использовать любой оператор P, который для произвольной точки $v \in H$ удовлетворяет условиям

(a) $P(v) \in D$,

(b) $\|P(v) - x\| \le \|v - x\| \quad \forall x \in D$.

Оператор, обладающий свойством (a), называется допустимым в отношении множества D, а оператор, обладающий свойством (b), называется квазинерастягивающим в отношении множества D (см., напр., [1], [2]). Нетрудно привести примеры операторов, обладающих либо свойством (a), либо свойством (b) (см., напр., [1], [3], [4]). Однако проблема состоит в том, чтобы указать конструктивный способ реализации оператора, обладающего обоими свойствами. Далее, для краткости, класс допустимых квазинерастягивающих операторов в отношении множества D будем обозначать $\mathcal{F}(D)$.

Предположим, что

(H1) *существует точка* $\overline{x}$ *такая, что* $f_i(\overline{x}) < 0$ *для всех* $i = 1, \dots, m$,

т. е. выполняется условие регулярности Слейтера для множества D.

Тогда конечные процедуры, реализующие оператор из $\mathcal{F}(D)$, существуют (см. [5], [6]). Например, в методе отражений [5], начиная с произвольной точки $x^0 = v$, строится последовательность $\{x^k\}$ по формуле

$$x^{k+1} = x^k - 2h(x^k)g^k/\|g^k\|^2, \quad g^k \in \partial h(x^k),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта № 98-01-00200.

где $h(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$. Нетрудно заметить, что точка x^{k+1} расположена симметрично точке x^k относительно проекции x^k на гиперплоскость

$$H_k = \{x \in H \mid \langle g^k, x - x^k\rangle = -h(x^k)\},$$

которая разделяет точку x^k и множество D. В другом методе [6] вместо гиперплоскости H_k используется многогранник, содержащий множество D. Как показано в [5], [6], оба метода за конечное число итераций находят точку из D, которую можно рассматривать как реализацию оператора из $\mathcal{F}(D)$.

В данной работе предлагается иной подход к построению операторов из $\mathcal{F}(D)$. Прежде всего, в качестве основы предлагается использовать методы с допустимой, т. е. принадлежащей D, итерационной последовательностью, аппроксимирующей проекцию точки v на D. В результате можно надеяться, что скорость сходимости метода, использующего подобный оператор, будет несущественно отличаться от случая, когда метод использует оператор проектирования на D.

2. Условие идентификации

Итак, пусть задана точка $v \in H$, определено множество D согласно (1), где $f_i : H \to R$, $i = 1, \ldots, m$, — выпуклые непрерывные функции. Необходимо определить точку $p = P(v)$, где $P \in \mathcal{F}(D)$, т. е. $p \in D$ и

$$\|p - x\| \leq \|v - x\| \quad \forall x \in D. \tag{2}$$

При сделанных предположениях существует проекция точки v на D, которую обозначим $\pi_D(v)$. Напомним, что при этом выполняется соотношение

$$\langle x - \pi_D(v), v - \pi_D(v)\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D \tag{3}$$

(см., напр., [4], с. 24). Отсюда следует хорошо известное усиленное нерастягивающее свойство проекции (см. [1], гл. 2).

Лемма 1. *Для всех $x \in D$ выполняется соотношение*

$$\|x - \pi_D(v)\|^2 \leq \|x - v\|^2 - \|v - \pi_D(v)\|^2. \tag{4}$$

Доказательство. Используя (3), имеем

$$\begin{aligned}\|x - \pi_D(v)\|^2 &= \|x - v\|^2 + 2\langle x - v, v - \pi_D(v)\rangle + \|v - \pi_D(v)\|^2 = \\ &= \|x - v\|^2 + \|v - \pi_D(v)\|^2 + 2\langle x - \pi_D(v), v - \pi_D(v)\rangle + 2\langle \pi_D(v) - v, v - \pi_D(v)\rangle = \\ &= \|x - v\|^2 - \|v - \pi_D(v)\|^2 + 2\langle x - \pi_D(v), v - \pi_D(v)\rangle \leq \|x - v\|^2 - \|v - \pi_D(v)\|^2,\end{aligned}$$

т. е. (4) выполняется. □

Введем функцию

$$\varphi_y(x) = \langle y - v, x - 0.5(y + v)\rangle,$$

с помощью которой дадим эквивалентное определение условия (2).

Лемма 2. *Условие* (2) *эквивалентно следующему*:

$$\varphi_p(x) \geq 0 \quad \forall x \in D. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $z = 0.5(p + v)$, выберем любую точку $x \in D$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\|p - x\|^2 &= \|p - v\|^2 + 2\langle p - v, v - x\rangle + \|v - x\|^2 = \\ &= \|v - x\|^2 + \|p - v\|^2 + 2\langle p - v, v - z\rangle + 2\langle p - v, z - x\rangle = \|v - x\|^2 + 2\langle p - v, z - x\rangle\end{aligned}$$

или

$$2\varphi_p(x) = \|v - x\|^2 - \|p - x\|^2.$$

Полученное тождество доказывает эквивалентность условий (5) и (2). $\square$

На основе полученных результатов можно установить условия существования требуемой точки p "вблизи" проекции $\pi_D(v)$. Дополнительно предположим, что

(H2) *множество D ограничено.*

Для точки x и числа $\varepsilon > 0$ обозначим $B(x, \varepsilon) = \{z \mid \|z - x\| \le \varepsilon\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (H1) *и* (H2) *и $v \notin D$. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что любая точка $p \in B(\pi_D(v), \varepsilon)$ удовлетворяет условию* (2).

Доказательство. Выберем любую точку $x \in D$. Тогда, используя (4), имеем

$$\|x - p\|^2 = \|x - \pi_D(v)\|^2 + 2\langle x - \pi_D(v), \pi_D(v) - p\rangle + \|\pi_D(v) - p\|^2 \le$$
$$\le \|x - v\|^2 - \|v - \pi_D(v)\|^2 + 2\|x - \pi_D(v)\|\varepsilon + \varepsilon^2 \le \|x - v\|^2$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что и требовалось. $\square$

Итак, для получения точки $p = P(v)$, где $P \in \mathcal{F}(D)$, достаточно найти хорошее приближение к $\pi_D(v)$, что может быть сделано конечными алгоритмами, общая схема построения которых описывается в следующем разделе.

3. Алгоритмы

Как известно, проекция точки v на множество D является решением следующей задачи:

$$\min \to \{\|w - v\|^2 \mid w \in D\}. \tag{6}$$

В данном случае это задача выпуклой нелинейной оптимизации. Для таких задач разработано большое число достаточно быстро сходящихся итеративных релаксационных методов, таких как методы возможных направлений, центров и другие (см. [3], [7]–[10]). В этих методах, начиная с некоторой точки $w^0 \in D$, строится допустимая итерационная последовательность $\{w^k\}$, причем значение целевой функции в этих точках убывает (не возрастает). Выберем произвольный алгоритм данного типа, который можно применить к задаче (6), и обозначим его Alg D. Описываемая общая схема методов решения исходной задачи будет также содержать условия (C1) и (C2), определяющие вместе с Alg D конкретный алгоритм.

Общая схема. Известна точка $v \notin D$, определим точку $y \in D$.

Шаг 0. Определить $i := 0$, $k := 1$, $w^0 := x^0 := y$.

Шаг 1. Применить очередную k-ю итерацию Alg D с начальной точкой w^{k-1} и получить точку w^k.

Шаг 2. Если выполняется (C1), то определить $x^{i+1} := w^k$, $i := i + 1$, $k := k + 1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 3. Если выполняется (C2), то остановиться. Иначе определить $k := k + 1$ и перейти к шагу 1.

Согласно описанию точка x^i является текущим кандидатом на роль p, поэтому условие (C1) является условием отсева, а условие (C2) является условием остановки. Отметим, что определение точки $y \in D$ не представляет особых затруднений, при использовании данной процедуры в итеративном методе в качестве y может быть выбрана текущая итерационная точка этого метода.

Основываясь на результатах предыдущего раздела, можно предложить несколько способов выбора условий (C1) и (C2). Одним из наиболее простых является следующий

Вариант 1. Выбрать число $\varepsilon > 0$.

(C1) $\varphi_{x^i}(w^k) < 0$.

(C2) $\|w^k - w^{k-1}\| / \varphi_{x^i}(w^k) < \varepsilon$.

Здесь условие (C1) согласно лемме 2 позволяет отсеять заведомо неподходящие точки. Если ε выбрано достаточно малым, то согласно теореме 1 и свойствам Alg D через конечное число итераций будет получена допустимая точка, удовлетворяющая условию (2), т. е. реализующая оператор $P \in \mathcal{F}(D)$.

В то же время можно использовать условия с заранее определенными значениями параметров. Для фиксированной точки x^i обозначим

$$f(w) = \varphi_{x^i}(w), \quad G_\delta(w) = \mathrm{conv}\{\partial f(w) \bigcup \partial_\delta h(w)\},$$

пусть d — диаметр множества D. По определению, если $t^k = \pi_{G_{\delta_k}(w^k)}(0)$, то $t^k = \tau_k c + (1-\tau_k) g^k$, где $\tau_k \in [0,1]$, $c = x^i - v$, $g^k \in \partial_{\delta_k} h(w^k)$. Используя свойства субдифференциалов, отсюда для любого y получаем

$$\tau_k(f(y) - f(w^k)) + (1-\tau_k)(h(y) - h(w^k)) \geq -\|t^k\| \, \|y - w^k\| - (1-\tau_k)\delta_k. \tag{7}$$

При $y = \overline{y}$, где $h(\overline{y}) < 0$ согласно условию (H1), из этого неравенства следует

$$\tau_k(f(\overline{y}) - f(w^k) - h(\overline{y}) + h(w^k) - \delta_k) \geq -\|t^k\| \, \|\overline{y} - w^k\| - h(\overline{y}) + h(w^k) - \delta_k,$$

и если $\{\delta_k\} \to 0$ и $\|t^k\| \to 0$, то

$$\liminf_{k\to\infty} \tau_k \geq \liminf_{k\to\infty} \tau'_k \geq \tau' > 0,$$

где

$$\tau'_k = (-h(\overline{y}) + h(w^k) - \delta_k - \|t^k\| \, \|\overline{y} - w^k\|)/(f(\overline{y}) - f(w^k) - h(\overline{y}) + h(w^k) - \delta_k). \tag{8}$$

С другой стороны, если y^* — точка минимума функции f на D, то $h(y^*) = 0$ и из (7) при $y = y^*$ получаем

$$\tau_k(f(y^*) - f(w^k)) \geq -\|t^k\| \, \|y^* - w^k\| - (1-\tau_k)(\delta_k + h(w^k)).$$

Обозначим

$$\varepsilon_k = \|t^k\| d/\tau'_k + (1/\tau'_k - 1)(\delta_k + h(w^k)). \tag{9}$$

Тогда если $f(w^k) \geq \varepsilon_k$, то для любого $y \in D$ имеем

$$\varphi_{x^i}(y) \geq \varphi_{x^i}(y^*) \geq \varphi_{x^i}(w^k) - \varepsilon_k \geq 0,$$

т. е. $x^i = P(v)$, где $P \in \mathcal{F}(D)$. Поэтому можно предложить следующий:

Вариант 2. Выбрать последовательность $\{\delta_k\} \searrow 0$, число $\beta > 0$.
(C1) $\|w^k - w^{k-1}\|/\|x^i - w^k\| < \beta$, либо $\varphi_{x^i}(w^k) < 0$.
(C2) $\varphi_{x^i}(w^k) \geq \varepsilon_k \geq 0$, $\tau'_k \geq 0$.

Отметим, что первая часть условия (C1) обеспечивает регулярную смену точек x^i так, что $\{x^i\} \to p^*$ и $\{w^k\} \to p^* = \pi_D(v)$, поэтому $h(w^k) \to 0$. Кроме того, условие оптимальности в задаче

$$\min \to \{\varphi_{p^*}(x) \mid x \in D\}$$

с решением z запишется в виде

$$\langle p^* - v, x - z \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D,$$

т. е. точка p^* согласно (3) является решением этой задачи. Учитывая полунепрерывность сверху отображения G, отсюда имеем $\|t^k\| \to 0$. Следовательно, данный вариант конечен и обеспечивает получение точки, реализующей оператор $P \in \mathcal{F}(D)$, а все величины в (8) и (9) могут быть достаточно просто вычислены.

Таким образом, данный подход представляет некоторую альтернативу методам штрафов при решении различных задач с нелинейными ограничениями.

Литература

1. Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 263 с.
2. Konnov I.V. *A class of combined iterative methods for solving variational inequalities* // J. Optimization Theory and Appl. – 1997. – V. 94. – № 3. – P. 677–693.
3. Зойтендейк Г. *Методы возможных направлений.* – М.: Ин. лит., 1963. – 176 с.
4. Карманов В.Г. *Математическое программирование.* – М.: Наука, 1986. – 288 с.
5. Куликов А.Н., Фазылов В.Р. *Конечный метод решения систем выпуклых неравенств* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 11. – С. 59–63.
6. Куликов А.Н., Фазылов В.Р. *Конечный метод линеаризации для систем выпуклых неравенств* // Кибернетика. – 1987. – № 4. – С. 36–40.
7. Полак Е. *Численные методы оптимизации. Единый подход.* – М.: Мир, 1974. – 376 с.
8. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. *Численные методы в экстремальных задачах.* – М.: Наука, 1975. – 320 с.
9. Сеа Ж.*Оптимизация.Теория и алгоритмы.* – М.: Мир, 1973. – 244 с.
10. Kiwiel K.C. *Methods of descent for nondifferentiable optimization.* – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 362 p.

Казанский государственный университет

Поступила
06.10.1998