ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 10 (545)

УДК 517.929

Х.Р. АРТЕАГА, М.А. МАЛАХАЛЬЦЕВ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПОТОКИ РИЧЧИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение

Поток Риччи есть семейство метрик g_t на многообразии M такое, что

$$\frac{d}{dt}g_t = -2\,\mathrm{Ric}(g_t), \tag{1}$$

где $\mathrm{Ric}(g)$ есть тензор Риччи метрики g.

В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи римановых многообразий использовались как важное техническое средство, и было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков на компактных многообразиях (напр., [1], [2]). С другой стороны, представляет интерес изучение геометрических свойств метрик, входящих в поток Риччи. Одной из задач, которые могут рассматриваться в связи с этим, является задача изучения однопараметрического семейства вложений f_t многообразия Σ в риманово многообразие (M, G) такого, что метрики $g_t = f_t^* G$, индуцированные на Σ, удовлетворяют уравнению (1). Стоит отметить, что в литературе неоднократно рассматривались однопараметрические семейства подмногообразий, для которых дифференциально-геометрические объекты, естественным образом связанные с подмногообразиями семейства (например, кривизны), удовлетворяют заданному эволюционному дифференциальному уравнению (укажем, к примеру, монографию [3]).

В данной работе исследуются деформации Σ_t поверхностей трехмерного евклидова пространства E_3 такие, что метрики g_t, индуцированные на Σ_t стандартной метрикой E_3, удовлетворяют уравнению потока Риччи (1). Такие деформации Σ_t будем называть *потоками Риччи поверхностей.*

Исследования проводятся локально, а все многообразия и отображения предполагаются аналитическими.

Для двумерного риманова многообразия (M, g) тензор Риччи $\mathrm{Ric} = Kg$, где K — секционная кривизна, поэтому уравнение потока Риччи записывается в виде

$$\frac{d}{dt}g_t = -2K(g_t)g_t. \tag{2}$$

Следующее утверждение в том или ином виде встречается в литературе, но для удобства читателя приведем его доказательство.

Утверждение 1. *Пусть U — область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (u^1, u^2) и $f_t : U \to E_3$ есть однопараметрическое семейство поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть G — стандартная метрика пространства E_3 и $g_t = f_t^* G$ — семейство индуцированных метрик на U. Если семейство метрик g_t удовлетворяет дифференциальному уравнению (2), то $g_t(u, v) = e^{2\varphi(t,u^1,u^2)} g_E$, где $g_E = {du^1}^2 + {du^2}^2$ — стандартная евклидова метрика на плоскости. При этом функция $\varphi = \varphi(u^1, u^2, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{-2\varphi}\Delta_E \varphi, \tag{3}$$

где Δ_E — евклидов лапласиан.

Доказательство. Докажем вначале, что любое решение уравнения (2) имеет вид $g_t = e^{2\varphi} g_E$. Пусть $g_t = g_{ij}(t, u^k) du^i du^j$, где $i, j, k = 1, 2$. Для произвольной точки $(u_0^1, u_0^2) \in U$, взяв два вектора v, w таких, что $g_0(v, w) = g_{ij}(0, u_0^k) v^i w^j = 0$, рассмотрим функцию $\alpha(t) = g_{ij}(t, u_0^k) v^i w^j$. Пусть $K(t, u^1, u^2)$ есть кривизна метрики g_t в точке (u^1, u^2). Из (2) получаем дифференциальное уравнение $\frac{d\alpha}{dt} = -2K(t, u_0^k)\alpha(t)$. Так как $\alpha(0) = 0$, функция $\alpha(t) = 0$ есть единственное решение этого уравнения. Поэтому, если вектора v и w ортогональны в метрике g_0, они ортогональны во всех метриках g_t. Следовательно, метрика g_t является конформной метрике g_0. В свою очередь, метрика g_0 конформна евклидовой метрике g_E (напр., [4], с. 111), поэтому $g_{ij}(t, u^k) = e^{2\varphi(t, u^k)}(du^{1^2} + du^{2^2})$. Кривизна такой метрики $g_{ij}(t, u^k)$ имеет вид $K(t, u^k) = -e^{-2\varphi(t, u^k)} \Delta_E \varphi(t, u^k)$ (напр., [4], с. 113). Следовательно, уравнение (2) переписывается в виде (3). $\square$

Уравнение (3) является квазилинейным параболическим уравнением и имеет решение для любых начальных условий $\varphi(0, u^1, u^2) = \varphi_0(u^1, u^2)$ (напр., [5], с. 327). Подходы к решению, в том числе численному, этого уравнения описаны в [6]. Отметим также, что наиболее общий результат о существовании решения уравнения потока Риччи на замкнутых многообразиях при малых t был получен в работах Р. Хэмилтона [7] и де Тюрка [8].

Таким образом, для любой начальной метрики g_{ij} можно найти семейство метрик, удовлетворяющих уравнению потока Риччи. Известно, что для любой аналитической положительно определенной дифференциальной квадратичной формы $g = g_{ij}(u^k) du^i du^j$ на плоскости можно найти поверхность $\Sigma \subset E_3$ (причем не единственным образом) такую, что g является ее метрическим тензором (напр., [9], с. 191; [10], с. 216–217). Именно, если $z = z(u^1, u^2)$ есть решение уравнения типа Монжа–Ампера

$$\frac{\varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs} \nabla_p z_r \nabla_q z_s}{2(1 - g^{pq} z_p z_q)} = K,$$

где $z_i = \partial_i z$, ε_{ij} — дискриминантный тензор метрики g и K — гауссова кривизна метрики g, то g есть метрика, индуцированная на графике Σ функции z, рассматриваемом как поверхность в E_3 (подробности см. в [10], с. 216–217). Таким образом, заданная поверхность всегда может быть включена в семейство поверхностей, метрики которых образуют поток Риччи. В связи с этим возникает следующий вопрос: *допускает ли заданный класс поверхностей потоки Риччи, т. е. можно ли включить поверхность данного класса в поток Риччи, состоящий из поверхностей этого класса*?

Одним из простейших классов поверхностей, допускающих потоки Риччи, является класс поверхностей вращения. Пусть семейство Σ_t поверхностей вращения задано уравнением

$$\vec{r}(t, u, v) = a(t, u)\vec{e}(v) + b(t, u)\vec{k}. \tag{4}$$

Параметр u можно взять таким образом, чтобы

$$\partial_u a(t, u)^2 + \partial_u b(t, u)^2 = a(t, u)^2. \tag{5}$$

Тогда метрический тензор поверхности Σ_t имеет вид

$$g_t = a(t, u)^2 (du^2 + dv^2),$$

и из утверждения 1 получаем уравнение на $a(t, u)$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{a} \Delta_E \log a. \tag{6}$$

Это уравнение является квазилинейным параболическим уравнением и имеет решение для любого начального условия $a(0, u) = a_0(u)$ ([5], с. 327), а $b(u, t)$ можно найти из уравнения (5):

$$b(t, u) = \int \sqrt{a(t, u)^2 - \partial_u a(t, u)^2} du. \tag{7}$$

Таким образом, любая поверхность вращения может быть включена в поток Риччи, состоящий из поверхностей вращения, заданный уравнением (4), где $a(t,u)$ есть решение уравнения (6), а $b(t,u)$ задается уравнением (7).

Подробное исследование потоков Риччи поверхностей вращения проведено в работе [11], содержащей, помимо вычислений, впечатляющую компьютерную графику.

2. Инфинитезимальные потоки Риччи

2.1. Эволюционные уравнения основных объектов деформируемой поверхности. Изучение деформаций поверхностей — классическая область дифференциальной геометрии и вариационного исчисления, которая до сих пор привлекает внимание исследователей (см., напр., недавние работы В.Т. Фоменко [12], [13]). В работах по деформации поверхностей использовались различные формы эволюционных уравнений для подвижного репера (напр., в книге В. Бляшке [14] эти уравнения записаны для подвижного орторепера) и для основных дифференциально-геометрических объектов деформируемой поверхности. Приведем эволюционные уравнения в виде, удобном для использования в данной работе.

Пусть деформация Σ_t ориентированной поверхности Σ_0 задана уравнениями $\vec{r} = \vec{r}(t,u^i)$. Положим $\vec{r}_i(u^i,t) = \partial_i\vec{r}(t,u^i)$, и пусть $\vec{n}(t,u^i)$ — поле единичной нормали поверхности Σ_t. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(t,u^i) = \widetilde{\lambda}^i(t,u^i)\vec{r}_i(t,u^i) + \widetilde{\mu}(t,u^i)\vec{n}(t,u^i). \tag{8}$$

Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита индуцированной метрики $g_{ij}(t,u^i)$ на поверхности Σ_t, и через $h_{ij}(t,u^i)$ — вторую фундаментальную форму этой поверхности. В дальнейшем для упрощения формул будем опускать аргументы (t,u^i).

Утверждение 2 (эволюционные уравнения репера, адаптированного к деформации).

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_i = \theta_i^s\vec{r}_s + \xi_i\vec{n}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t} = -\xi^s\vec{r}_s, \tag{10}$$

где

$$\theta_i^j = \nabla_i\widetilde{\lambda}^j - \widetilde{\mu}h_i^j, \tag{11}$$

$$\xi_i = \partial_i\widetilde{\mu} + h_{is}\widetilde{\lambda}^s. \tag{12}$$

Доказательство. Деривационные уравнения поверхности записываются в виде

$$\partial_i\vec{r}_j = \Gamma_{ij}^k\vec{r}_k + h_{ij}\vec{n}, \quad \partial_i\vec{n} = -h_i^s\vec{r}_s, \tag{13}$$

где Γ_{ij}^k — коэффициенты римановой связности индуцированной метрики и h_{ij} — коэффициенты второй фундаментальной формы. Продифференцировав (8) по u^j и применяя (13), получаем (9), где θ_j^i и ξ_i заданы соответственно уравнениями (11) и (12). Теперь, дифференцируя по t уравнения $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, $\vec{n}\cdot\vec{r}_i = 0$ и используя (9), получим (10). □

Запишем теперь эволюционные уравнения основных дифференциально-геометрических объектов деформируемой поверхности через θ_i^j и ξ_i, заданных соответственно уравнениями (11) и (12). Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора g_{ij} поверхности, в частности $\theta_{ij} = \theta_i^s g_{js}$, $\theta^{ij} = g^{is}\theta_s^j$.

Утверждение 3. *Пусть семейство поверхностей Σ_t заданно уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t,u^i)$. Пусть $g_{ij}(t,u^i)$, $h_{ij}(t,u^i)$ и $\gamma_{ij}(t,u^i)$ — первая, вторая и третья фундаментальные формы поверхности Σ_t, $\varepsilon_{ij}(t,u^a)$ — дискриминантный тензор поверхности Σ_t, а $K(t,u^i)$ и $H(t,u^i)$ —*

гауссова и средняя кривизны поверхности Σ_t. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = \theta_{ij} + \theta_{ji}, \quad \frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = -\theta^{ij} - \theta^{ji}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ij} = \theta_i^s\varepsilon_{sj} - \theta_j^s\varepsilon_{si}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{js}\theta_s^i - \varepsilon^{is}\theta_s^j, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} = \nabla_i\xi_j + h_{is}\theta_j^s = \nabla_i(\partial_j\widetilde{\mu}) + \nabla_i h_{js}\widetilde{\lambda}^s + h_{is}\nabla_j\widetilde{\lambda}^s + h_{js}\nabla_i\widetilde{\lambda}^s - \widetilde{\mu}g^{sp}h_{is}h_{jp}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_{ij} = h_{js}\nabla_i\xi^s + h_{is}\nabla_j\xi^s, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}K = (Hg^{ij} - h^{ij})\nabla_i\xi_j - Kg^{ij}\theta_{ij}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H = g^{ij}\nabla_i\xi_j - h^{ij}\theta_{ij}. \tag{19}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство $g_{ij} = \vec{r}_i\vec{r}_j$ и используя уравнение (9), получаем первое уравнение в (14). Второе уравнение в (14) получается с помощью дифференцирования тождества $g_{is}g^{js} = \delta_i^j$ по t и использования только что полученного уравнения для $\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}$.

Уравнения (15) получаются с помощью дифференцирования тождества $\varepsilon_{ij} = (\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{n})$ по t, где через $(\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначено смешанное произведение, и применения уравнений (9) и (10).

Чтобы получить уравнение (16), продифференцируем равенство $h_{ij} = -\partial_i\vec{n}\cdot\vec{r}_j$ по t и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} = -\partial_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\right)\cdot\vec{r}_j - \partial_i\vec{n}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_j = -\partial_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\right)\cdot\vec{r}_j + h_i^s\vec{r}_s\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_j. \tag{20}$$

Дифференцируя уравнение (10) по u^i, с помощью уравнения (13) имеем

$$-\partial_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\right) = \nabla_i\xi^s\vec{r}_s + h_{is}\xi^s\vec{n}. \tag{21}$$

Подставляя это выражение в уравнение (20), получаем первое уравнение в (16), а потом и второе уравнение (с помощью уравнений (11) и (12)).

Теперь из равенства $\gamma_{ij} = \partial_i\vec{n}\cdot\partial_j\vec{n}$ с помощью уравнения (21) таким же образом получим (17).

Дифференцируя $H = g^{ij}h_{ij}$ по t и используя уравнения (14) и (16), находим эволюционное уравнение (19) для средней кривизны.

Наконец, с помощью хорошо известного соотношения $\gamma_{ij} - Hh_{ij} + Kg_{ij} = 0$ (напр., [10], с. 194, (8)) и найденных эволюционных уравнений получим эволюционное уравнение (18) для гауссовой кривизны. □

2.2. Инфинитезимальный поток Риччи. Пусть деформация Σ_t, $t \in (\varepsilon, \varepsilon)$, поверхности Σ_0 задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t, u^i)$. Векторное поле $\dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(t, u^i)|_{t=0}$ называется *инфинитезимальной деформацией поверхности Σ_0, соответствующей деформации Σ_t*. Из уравнения (8) для инфинитезимальной деформации следует разложение

$$\dot{\vec{r}} = \widetilde{\lambda}^i(0, u^i)\vec{r}_i(0, u^i) + \widetilde{\mu}(0, u^i)\vec{n}(0, u^i). \tag{22}$$

Положим $\lambda(u^i) = \widetilde{\lambda}(0, u^i)$, $\mu(u^i) = \widetilde{\mu}(0, u^i)$. Векторное поле $\lambda^i(u^i)\vec{r}_i(0, u^i)$ есть ортогональная проекция векторного поля $\dot{\vec{r}}$ на касательную плоскость поверхности Σ_0, и будем называть его *тангенциальной инфинитезимальной деформацией*. Нормальное векторное поле $\mu(u^i)\vec{n}(0, u^i)$ будем называть *нормальной инфинитезимальной деформацией*.

Утверждение 4. *Пусть поток Риччи поверхностей Σ_t, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u^i, t)$ и $\dot{\vec{r}} = \lambda^s\vec{r}_s + \mu\vec{n}$ (см. (22)) есть соответствующая инфинитезимальная деформация поверхности Σ_0.*

Тогда векторное поле $\vec{\lambda} = \lambda^s \vec{r}_s$ и функция μ на Σ_0 удовлетворяют системе уравнений

$$\nabla_i \lambda_j + \nabla_j \lambda_i = -2K g_{ij} + 2\mu h_{ij}, \tag{23}$$

где g_{ij}, h_{ij} — первая и вторая фундаментальные формы поверхности Σ_0, ∇ — связность Леви-Чивита метрики g_{ij}, K — гауссова кривизна поверхности Σ_0.

Доказательство. Из определения потока Риччи и уравнения (14) получаем $\theta_{ij} + \theta_{ji} = -2Kg_{ij}$. Теперь из уравнения (11) следует уравнение (23). □

Назовем векторное поле $\vec{v} = \lambda^s \vec{r}_s + \mu \vec{n}$, заданное вдоль поверхности Σ_0, *инфинитезимальным потоком Риччи*, если векторное поле $\lambda^s \vec{r}_s$ и функция μ удовлетворяют уравнениям (23). Отметим, что из утверждения (4) следует, что инфинитезимальная деформация, соответствующая потоку Риччи, является инфинитезимальным потоком Риччи.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда инфинитезимальный поток Риччи является нормальным векторным полем. Из (23) вытекает

Следствие 1. Пусть кривизна Σ_0 отлична от нуля в каждой точке. Если инфинитезимальный поток Риччи есть нормальное векторное поле, не обращающееся в нуль, то Σ_0 есть сфера.

Доказательство. В условиях следствия $\lambda^i = 0$, и в силу (23) все точки поверхности Σ_t являются омбилическими. □

2.3. Уравнения на тангенциальную компоненту инфинитезимального потока Риччи. Найдем уравнения, которым удовлетворяет тангенциальная компонента $\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{r}_i$ инфинитезимального потока Риччи на поверхности Σ_0.

Пространство $S^2(E_2)$ симметричных тензоров типа $(2,0)$ двумерного евклидова векторного пространства есть трехмерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = g^{ik} g^{jm} u_{ij} v_{km} = u^{ij} v_{ij} = u_{ij} v^{ij}. \tag{24}$$

Если E_2 ориентировано, то определен дискриминантный тензор ε_{ij}, задающий косое произведение на E_2 (напр., [10], с. 26). Условимся поднимать индексы дискриминантного тензора следующим образом: $\varepsilon_{i\cdot}^{\ j} = g^{js} \varepsilon_{is}$ и $\varepsilon^{ij} = g^{ik} g^{jm} \varepsilon_{km}$.

Рассмотрим тензор

$$\Omega(u, v, w) = \varepsilon^{kl} \varepsilon^{mn} \varepsilon^{pq} u_{kq} v_{lm} w_{np}, \quad u, v, w \in S^2(E_2),$$

типа $(3,0)$ на $S^2(E_2)$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — некоторый репер плоскости $S^2(E_2)$. Тогда непосредственный подсчет показывает, что

$$\Omega(u, v, w) = (e^{12})^3 \det \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{22} \\ v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \end{vmatrix},$$

где ε^{ij}, u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} — координаты тензоров ε, u, v, w соответственно в репере $\vec{e}_i$. Отсюда следует, что Ω есть 3-форма на векторном пространстве $S^2(E_2)$. Зададим ориентацию на $S^2(E_2)$ с помощью формы Ω, тогда $S^2(E_2)$ становится ориентированным трехмерным евклидовым пространством.

Если $\vec{e}_i$ — правый орторепер плоскости E_2, то

$$e^1 \otimes e^1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1), \quad e^2 \otimes e^2$$

есть правый орторепер пространства $S^2(E_2)$. Отсюда следует, что смешанное произведение в $S^2(E_2)$ имеет вид

$$(u, v, w) = \sqrt{2}\, \Omega(u, v, w) = \sqrt{2}\, \varepsilon^{kl} \varepsilon^{mn} \varepsilon^{pq} u_{kq} v_{lm} w_{np}. \tag{25}$$

Отметим, что можно найти и выражение для векторного произведения $[\ ,\ ]$ в $S^2(E_2)$, связанного со смешанным произведением с помощью известного тождества $([u,v],w)=(u,v,w)$. Используя определения скалярного и смешанного произведений в $S^2(E_2)$, получаем, что $t=[u,v]$ для $u,v\in S^2(E_2)$ находится по формуле

$$t_{ij}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{i\cdot}^{\ k}\varepsilon_{j\cdot}^{\ m}+\varepsilon_{j\cdot}^{\ k}\varepsilon_{i\cdot}^{\ m})\varepsilon^{pq}u_{kp}v_{mq}.$$

Утверждение 5. *Пусть поверхность Σ_0 не имеет омбилических точек. Тогда λ^i есть тангенциальная компонента инфинитезимального потока Риччи тогда и только тогда, когда λ^i удовлетворяет системе уравнений*

$$(\varepsilon^{mi}h^j_m+\varepsilon^{mj}h^i_m)\nabla_i\lambda_j=0, \tag{26}$$

$$(H^2-2K)(\operatorname{div}\lambda)-Hh^{ij}\nabla_i\lambda_j+K(H^2-4K)=0. \tag{27}$$

Доказательство. Если Σ_0 не имеет омбилических точек, то первая фундаментальная форма g_{ij} и вторая фундаментальная форма h_{ij} поверхности Σ_0 линейно независимы во всех точках.

Симметричный тензор u_{ij} лежит в плоскости, натянутой на симметричные тензоры g_{ij} и h_{ij} тогда и только тогда, когда смешанное произведение $(g,h,u)=0$. Используя (25) и тождество $\varepsilon^{kl}\varepsilon^p_{\cdot k}=-g^{lp}$, получаем соответствующее условие на u_{ij}

$$\varepsilon^{mn}h^p_m u_{np}=0. \tag{28}$$

Теперь, если $u=ag+bh\in S^2(E_2)$, то, как известно,

$$a=\frac{(u,g)(h,h)-(h,g)(u,h)}{(g,g)(h,h)-(g,h)^2}, \tag{29}$$

где через $(\ ,\ )$ обозначено скалярное произведение (24). Имеем

$$(u,g)=g^{ij}u_{ij},\quad (u,h)=h^{ij}u_{ij},\quad (h,g)=g^{ij}h_{ij}=H,\quad (h,h)=h^{ij}h_{ij}=k_1^2+k_2^2=H^2-2K,$$

где K есть гауссова кривизна, H — средняя кривизна, а k_1, k_2 — главные кривизны поверхности Σ_0.

Положим $u_{ij}=\nabla_i\lambda_j+\nabla_j\lambda_i$. Тогда из (28) следует (26).

Далее, $(u,g)=2g^{ij}\nabla_i\lambda_j=2\operatorname{div}(\vec{\lambda})$, $(u,h)=2h^{ij}\nabla_i\lambda_j$. Из уравнений (23) следует, что $a=-2K$, поэтому (29) влечет (27). $\square$

Замечание 1. Из доказательства утверждения (5) следует, что уравнение (26) эквивалентно тому, что $\nabla_i\lambda_j+\nabla_j\lambda_i$ раскладывается в линейную комбинацию форм g_{ij} и h_{ij}, но это свойство имеет место для любой инфинитезимальной конформной деформации. Поэтому уравнение (26) выполняется для любой инфинитезимальной конформной деформации $\vec{v}=\lambda^s\vec{r}_s+\mu\vec{n}$.

3. Инфинитезимальные потоки Риччи минимальных поверхностей

Пусть Σ_0 — ориентированная минимальная поверхность и $\vec{v}=\vec{\lambda}+\vec{\nu}$, где $\vec{\lambda}=\lambda^s\vec{r}_s$ и $\vec{\nu}=\mu\vec{n}$, есть инфинитезимальный поток Риччи на поверхности Σ_0. В дальнейшем будем предполагать, что *гауссова кривизна Σ_0 во всех точках отлична от нуля.*

3.1. Основные уравнения инфинитезимального потока Риччи в специальной системе координат. Так как Σ_0 является минимальной поверхностью, то в окрестности каждой точки $p\in\Sigma$ существует изотермическая система координат (u^1,u^2), координатные линии которой являются линиями кривизны, причем в этой системе координат метрический тензор и тензор второй фундаментальной формы имеют вид

$$\begin{aligned}&g_{11}=g_{22}=\frac{1}{\varkappa},\quad g_{12}=0;\\&h_{11}=1,\quad h_{12}=0,\quad h_{22}=-1\end{aligned} \tag{30}$$

(доказательство существования такой системы координат см. в [15], с. 44). Тогда коэффициентами связности являются

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\frac{\partial_1 \varkappa}{2\varkappa}, \quad \Gamma^1_{12} = -\frac{\partial_2 \varkappa}{2\varkappa}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{\partial_1 \varkappa}{2\varkappa}, \\ &\Gamma^2_{11} = \frac{\partial_2 \varkappa}{2\varkappa}, \quad \Gamma^2_{12} = -\frac{\partial_1 \varkappa}{2\varkappa}, \quad \Gamma^2_{22} = -\frac{\partial_2 \varkappa}{2\varkappa}. \end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда следует, что в этой специальной системе координат уравнения (23), определяющие инфинитезимальный поток Риччи, записываются следующим образом:

$$\partial_1 \lambda_1 + \frac{\partial_1 \varkappa}{2\varkappa} - \frac{\partial_2 \varkappa}{2\varkappa}\lambda_2 = \varkappa + \mu, \tag{32}$$

$$\partial_2 \lambda_2 - \frac{\partial_1 \varkappa}{2\varkappa}\lambda_1 + \frac{\partial_2 \varkappa}{2\varkappa}\lambda_2 = \varkappa - \mu, \tag{33}$$

$$\partial_1 \lambda_2 + \partial_2 \lambda_1 + \frac{\partial_2 \varkappa}{\varkappa}\lambda_1 + \frac{\partial_1 \varkappa}{\varkappa}\lambda_2 = 0. \tag{34}$$

3.2. Редукция системы (32)–(34) **к одному уравнению.** Разрешив уравнения (32) и (33) относительно $\varkappa$ и μ, получим

$$2\varkappa = \partial_1 \lambda_1 + \partial_2 \lambda_2, \tag{35}$$

$$2\mu = \partial_1 \lambda_1 - \partial_2 \lambda_2 + \frac{\partial_1 \varkappa}{\varkappa}\lambda_1 - \frac{\partial_2 \varkappa}{\varkappa}\lambda_2. \tag{36}$$

Гауссова кривизна K минимальной поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta \log(-4K) = 4K$, где Δ — лапласиан метрики g поверхности (напр., [15], теорема 3.1.3, или [10], с. 238, (2)). Так как $K = -\varkappa^2$, отсюда следует, что в данной системе координат имеет место равенство

$$\Delta_E \log \varkappa = -2\varkappa, \tag{37}$$

где Δ_E — евклидов лапласиан. Поэтому уравнение (35) переписывается в виде

$$\partial_1 \lambda_1 + \partial_2 \lambda_2 + \partial_1(\partial_1 \log \varkappa) + \partial_2(\partial_2 \log \varkappa) = 0,$$

откуда

$$\partial_1(\lambda_1 + \partial_1 \log \varkappa) + \partial_2(\lambda_2 + \partial_2 \log \varkappa) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что существует функция φ такая, что

$$\lambda_1 + \partial_1 \log \varkappa = 2\partial_2 \varphi, \quad \lambda_2 + \partial_2 \log \varkappa = -2\partial_1 \varphi. \tag{38}$$

Теперь умножим уравнение (34) на $\varkappa$ и перепишем его в виде

$$\partial_1(\varkappa \lambda_2) + \partial_2(\varkappa \lambda_1) = 0.$$

Подставляя λ_i из уравнения (38) в это уравнение, получим

$$\partial_2(\varkappa \partial_2 \varphi) - \partial_1(\varkappa \partial_1 \varphi) - \partial_{12} \varkappa = 0. \tag{39}$$

Утверждение 6. *Решение системы уравнений* (32)–(34) *имеет вид*

$$\lambda_1 = 2\partial_2 \varphi - \frac{\partial_1 \varkappa}{\varkappa}, \quad \lambda_2 = -2\partial_1 \varphi - \frac{\partial_2 \varkappa}{\varkappa}, \tag{40}$$

$$\mu = 2\partial_{12} \varphi + \frac{\partial_1 \varkappa}{\varkappa}\,\partial_2 \varphi + \frac{\partial_2 \varkappa}{\varkappa}\,\partial_1 \varphi + \frac{\partial_{22} \varkappa - \partial_{11} \varkappa}{2\varkappa}, \tag{41}$$

где φ удовлетворяет гиперболическому уравнению в частных производных

$$\partial_{11} \varphi - \partial_{22} \varphi + \frac{\partial_1 \varkappa}{\varkappa}\,\partial_1 \varphi - \frac{\partial_2 \varkappa}{\varkappa}\,\partial_2 \varphi + \frac{\partial_{12} \varkappa}{\varkappa} = 0. \tag{42}$$

Доказательство. Предыдущие рассуждения показывают, что решения системы уравнений (32)–(34) необходимо имеют форму (40), (41), где φ удовлетворяет уравнению (42) (которое эквивалентно уравнению (39)).

Теперь докажем, что векторное поле λ_i, заданное уравнениями (40), и функция μ, заданная уравнением (41), где φ удовлетворяет уравнению (42), являются решением системы (32)–(34). Подставляя λ_i и μ в уравнение (32), после упрощения приходим к равенству $-\frac{1}{2}\Delta_E \log \varkappa - \varkappa = 0$, которое тождественно выполняется в силу (37). То же самое верно и для уравнения (33). Подставляя λ_i и μ в уравнение (34), после упрощения получаем уравнение (39). $\square$

Замечание 2. Векторное поле λ_i и функция μ, заданные соответственно уравнениями (40) и (41), являются решениями системы уравнений (32)–(33) для любой функции φ. Уравнение (34) эквивалентно уравнению (42) относительно φ.

3.3. Геометрический смысл функции φ. Напомним необходимые сведения из теории сетей на поверхностях (подробное изложение см. в [10], гл. X). Пусть W — ортогональная сеть на ориентированной поверхности Σ в трехмерном евклидовом пространстве E_3, и $\vec{x}$, $\vec{y}$ — единичные векторные поля, касательные к линиям сети W и образующие правый репер. Тогда $\nabla_i x_j = \alpha_i y_j$, где ∇ — связность Леви-Чивита метрики, индуцированной на поверхности Σ (А.П. Норден называл α_i трансверсальным векторным полем векторного поля $\vec{x}$). Пусть $\vec{t}$ — векторное поле, полученное поточечным поворотом значений векторного поля $\vec{\alpha} = \alpha^i \partial_i$ на угол $\pi/2$ в положительном направлении. Тогда $\vec{t}$ есть чебышевское векторное поле сети W и $\operatorname{div}(\vec{t}) = g^{ij}\nabla_i t_j = K$, где K — гауссова кривизна поверхности. Более того, если для некоторого векторного поля $\vec{w}$ на поверхности Σ выполняется равенство $\operatorname{div}(\vec{w}) = K$, то $\vec{w}$ есть чебышевское векторное поле некоторой ортогональной сети.

Вернемся к рассмотрению минимальной поверхности Σ_0. Так как средняя кривизна $H = 0$, уравнение (27) переписывается в виде

$$\operatorname{div}(\vec{\lambda}) = -2K,$$

откуда следует, что векторное поле $\vec{t} = -\frac{1}{2}\vec{\lambda}$ есть чебышевское векторное поле некоторой ортогональной сети W на Σ_0. Обозначим через $\vec{x}$ единичное векторное поле, касательное к одному из семейств линий сети W. Пусть $\vec{\tau}_1$ — единичное векторное поле, имеющее главное направление поверхности Σ_0, соответствующее главной кривизне $\varkappa$.

Утверждение 7. *Пусть $\varphi(p)$ — угол между $\vec{x}(p)$ и $\vec{\tau}_1(p)$.*

1. *Функция φ удовлетворяет системе уравнений (40), где $\vec{\lambda} = -2\vec{t}$, а $\vec{t}$ есть чебышевский вектор ортогональной сети W.*
2. *Функция φ удовлетворяет уравнению (42) тогда и только тогда, когда 1-форма $\eta_i = h_{is}\lambda^s$ замкнута.*

Доказательство. Возьмем специальную систему координат, использовавшуюся в 3.2. Тогда $\vec{\tau}_1 = \sqrt{\varkappa}\,\vec{r}_1$ и

$$\vec{x} = \sqrt{\varkappa}(\cos\varphi\,\vec{r}_1 + \sin\varphi\,\vec{r}_2), \quad \vec{y} = \sqrt{\varkappa}(-\sin\varphi\,\vec{r}_1 + \cos\varphi\,\vec{r}_2).$$

Найдем α_i из уравнения $\nabla_i x_j = \alpha_i y_j$. Имеем $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cos\varphi$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sin\varphi$, $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sin\varphi$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cos\varphi$. Используя выражения (31) коэффициентов связности, непосредственными вычислениями получаем

$$\nabla_1 x_1 = (\partial_1\varphi + \frac{\partial_2\varkappa}{2\varkappa})y_1, \quad \nabla_2 x_1 = (\partial_2\varphi - \frac{\partial_1\varkappa}{2\varkappa})y_1.$$

Отсюда следует

$$\alpha_1 = \partial_1\varphi + \frac{\partial_2\varkappa}{2\varkappa}, \quad \alpha_2 = \partial_2\varphi - \frac{\partial_1\varkappa}{2\varkappa}.$$

Теперь чебышевское векторное поле $\vec{t}$ сети имеет координаты $t_1 = -\alpha_2$, $t_2 = \alpha_1$ (в силу изотермичности координат). По определению векторного поля $\vec{t}$ имеем $\vec{\lambda} = -2\vec{t}$, откуда $\lambda_1 = 2\alpha_2$ и $\lambda_2 = -2\alpha_1$, что эквивалентно системе уравнений (40). Первое утверждение доказано.

Докажем теперь второе утверждение. В выбранной системе координат $h_1^1 = \varkappa$, $h_2^2 = -\varkappa$, $h_1^2 = h_2^1 = 0$, откуда следует

$$\eta_1 = h_1^1\lambda_1 = 2\varkappa\partial_2\varphi - \partial_1\varkappa, \quad \eta_2 = h_2^2\lambda_2 = 2\varkappa\partial_1\varphi + \partial_2\varkappa.$$

Поэтому $\partial_1\eta_2 - \partial_2\eta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет уравнению (42). $\square$

Замечание 3. Система уравнений (40) определяет φ с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание 4. Для $\vec{t} = -\frac{1}{2}\vec{\lambda}$ 1-форма $\eta_i = h_i^s\lambda_s$ замкнута тогда и только тогда, когда 1-форма $\zeta_i = h_i^s t_s$ замкнута. Поэтому из утверждения 7 следует, что пространство инфинитезимальных потоков Риччи на минимальной поверхности Σ_0 изоморфно пространству чебышевских векторных полей $\vec{t}$ ортогональных сетей со свойством, что 1-форма $\zeta(\vec{X}) = h(\vec{t}, \vec{X})$ замкнута.

3.4. Потоки Риччи, состоящие из минимальных поверхностей. Пусть семейство минимальных поверхностей Σ_t задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u^i, t)$, и $\vec{v} = \vec{\lambda} + \vec{\nu}$, где $\vec{\lambda} = \lambda^s\vec{r}_s$ и $\vec{\nu} = \mu\vec{n}$, есть соответствующая инфинитезимальная деформация поверхности Σ_0.

Утверждение 8. *$\Delta\mu = 2K\mu$, где K — гауссова кривизна и Δ — лапласиан метрики поверхности Σ_0.*

Доказательство. Для каждого t средняя кривизна $H(t)$ поверхности Σ_t равна нулю, следовательно, $\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Из (19) следует, что на поверхности Σ_0 имеет место равенство $g^{ij}\nabla_i\xi_j - h^{ij}\theta_{ij} = 0$. Запишем это равенство в специальной системе координат (u^1, u^2) такой, что имеет место (30),

$$\nabla_1\xi_1 + \nabla_2\xi_2 - \varkappa(\theta_{11} - \theta_{22}) = 0. \tag{43}$$

В силу (12) имеем $\xi_1 = \partial_1\mu + \varkappa\lambda_1$ и $\xi_2 = \partial_2\mu - \varkappa\lambda_2$. Затем, используя (31), непосредственными вычислениями получаем

$$\nabla_1\xi_1 + \nabla_2\xi_2 = \partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2 = \partial_{11}\mu + \partial_{22}\mu + \partial_1(\varkappa\lambda_1) - \partial_2(\varkappa\lambda_2).$$

Из (11) следует, что на поверхности Σ_0 выполняется равенство $\theta_{ij} = \nabla_i\lambda_j - \mu h_{ij}$, поэтому $\theta_{11} - \theta_{22} = \nabla_1\lambda_1 - \nabla_2\lambda_2 - 2\mu$. Используя (31), найдем

$$\nabla_1\lambda_1 = \partial_1\lambda_1 + \frac{\partial_1\varkappa}{2\varkappa}\lambda_1 - \frac{\partial_2\varkappa}{2\varkappa}\lambda_2, \quad \nabla_2\lambda_2 = \partial_2\lambda_2 - \frac{\partial_1\varkappa}{2\varkappa}\lambda_1 + \frac{\partial_2\varkappa}{2\varkappa}\lambda_2.$$

Отсюда следует

$$\theta_{11} - \theta_{22} = \partial_1\lambda_1 - \partial_2\lambda_2 + \frac{\partial_1\varkappa}{\varkappa}\lambda_1 - \frac{\partial_2\varkappa}{\varkappa}\lambda_2 - 2\mu,$$

поэтому

$$\varkappa(\theta_{11} - \theta_{22}) = \partial_1(\varkappa\lambda_1) - \partial_2(\varkappa\lambda_2) - 2\mu\varkappa.$$

Таким образом, уравнение (43) переписывается в виде

$$\partial_{11}\mu + \partial_{22}\mu + 2\varkappa\mu = 0, \tag{44}$$

что и доказывает требуемое утверждение. $\square$

Если теперь семейство Σ_t есть поток Риччи, то функция μ задается уравнением (41), где φ удовлетворяет уравнению (42). Поэтому, вообще говоря, μ не удовлетворяет уравнению (44), т. е. *в общем случае минимальная поверхность не может быть включена в поток Риччи, состоящий из минимальных поверхностей.*

3.5. Инфинитезимальный поток Риччи, касательный к минимальной поверхности. Инфинитезимальный поток Риччи $\vec{v} = \lambda + \mu\vec{n}$ на поверхности Σ_0 касателен к Σ_0 тогда и только тогда, когда $\mu = 0$. В свою очередь, это равенство эквивалентно тому, что функция φ удовлетворяет системе гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из (41) и (42),

$$\partial_{12}\varphi + \frac{\partial_1\varkappa}{2\varkappa}\partial_2\varphi + \frac{\partial_2\varkappa}{2\varkappa}\partial_1\varphi + \frac{\partial_{22}\varkappa - \partial_{11}\varkappa}{4\varkappa} = 0, \tag{45}$$

$$\partial_{11}\varphi - \partial_{22}\varphi + \frac{\partial_1\varkappa}{\varkappa}\partial_1\varphi - \frac{\partial_2\varkappa}{\varkappa}\partial_2\varphi + \frac{\partial_{12}\varkappa}{\varkappa} = 0. \tag{46}$$

Интересно, что при замене координат $u^{1'} = u^1 + u^2$, $u^{2'} = u^1 - u^2$ уравнение (45) переходит в уравнение (46) (геометрический смысл этой замены состоит в том, что координатная сеть линий кривизны заменяется на координатную сеть асимптотических линий). Это позволяет с помощью единой замены неизвестной функции φ избавиться от первых производных.

Положим $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\psi$, тогда из (45) и (46) получим

$$\partial_{11}\psi - \partial_{22}\psi + \left\{\frac{\partial_{22}\varkappa - \partial_{11}\varkappa}{2\varkappa} - \frac{(\partial_2\varkappa)^2 - (\partial_1\varkappa)^2}{4\varkappa^2}\right\}\psi + \frac{\partial_{12}\varkappa}{\sqrt{\varkappa}} = 0, \tag{47}$$

$$\partial_{12}\psi + \left\{\frac{\partial_1\varkappa\partial_2\varkappa}{4\varkappa^2} - \frac{\partial_{12}\varkappa}{2\varkappa}\right\}\psi + \frac{\partial_{11}\varkappa - \partial_{22}\varkappa}{4\sqrt{\varkappa}} = 0. \tag{48}$$

Используя эту систему, можно доказать, например,

Утверждение 9. *Катеноид не допускает касательных инфинитезимальных потоков Риччи.*

Доказательство. Пусть катеноид задан уравнением $\vec{r}(u^1, u^2) = \cosh(u^1)\vec{e}(u^2) - u^1\vec{k}$, тогда $\varkappa(u^1, u^2) = \frac{1}{\cosh^2(u^1)}$. Система (47), (48) принимает вид

$$\partial_{11}\psi(u^1, u^2) - \partial_{22}\psi(u^1, u^2) + a(u^1)\psi(u^1, u^2) = 0, \tag{49}$$

$$\partial_{12}\psi(u^1, u^2) + b(u^1) = 0, \tag{50}$$

где

$$a(u^1) = \frac{2}{\cosh^2(u^1)} - 1, \quad b(u^1) = \frac{2\cosh^2(u^1) - 3}{2\cosh^3(u^1)}. \tag{51}$$

Будем обозначать производные функций a и b штрихом. Из (50) следует $\partial_{122}\psi = 0$, $\partial_{112}\psi = -b'$, $\partial_{1122}\psi = 0$. Тогда из (49) имеем $-\partial_{2222}\psi + a\partial_{22}\psi = 0$ и, продифференцировав по u^1, получим $a'\partial_{22}\psi = 0$. Так как $a' \neq 0$, то $\partial_{22}\psi = 0$, значит, $\psi(u^1, u^2) = f(u^1)u^2 + g(u^2)$. Подставляя это выражение в (49) и (50), приходим к уравнениям

$$f'' + af = 0, \quad g'' + ag = 0, \quad f' = -b.$$

Следовательно, $-b' + af = 0$, откуда $f = b'/a$. Тогда $(b'/a)' = -b$, но легко проверить, что это условие невозможно удовлетворить для a и b, заданных уравнениями (51), т. к.

$$(b'/a)' = \frac{2\cosh^6(u^1) - 27\cosh^4(u^1) + 54\cosh^2(u^1) - 36}{2\cosh^7(u^1) - 8\cosh^5(u^1) + 8\cosh^3(u^1)}. \quad \square$$

Отметим, что этот результат согласуется с утверждением в конце предыдущего раздела, т. к. существование касательного инфинитезимального потока Риччи на поверхности Σ влечет, что

эта поверхность включается в “постоянный” поток Риччи $\Sigma_t = \Sigma$ (при этом, конечно, параметризация поверхности меняется).

Авторы выражают глубокую благодарность Ж.К. Кортиссозу и А.Г. Кушнеру за полезные обсуждения в процессе написания данной работы, и В.Е. Фомину за многочисленные замечания и предложения, позволившие существенно улучшить текст статьи.

Литература

1. Chow B., Knopf D. *The Ricci flow: an introduction.* – Mathematical Surveys and Monographs, V. 110. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
2. Bennett Chow, Sun-Chin Chu, Chia-Yi, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part* I: *Geometric aspects.* – Mathematical Surveys and Monographs, V. 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
3. Zhu Xi-Ping. *Lectures on mean curvature flows.* – AMS/IP Studies in Advanced Mathematics-32. Providence, RI: American Mathematical Society; Somerville: International Press. ix, 2002. – 150 p.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* – М.: Наука, 1979. – 759 с.
5. Taylor M.E. *Partial differential equations.* III *Nonlinear equations.* – Springer-Verlag, 1996. – 608 p.
6. Carstea S.A., Visinescu M. *Special solutions for Ricci flow equation in 2D using the linearization approach* // Mod. Phys. Lett. A 20 (2005), № 39, 2993-3002 (см. также http://arxiv.org/abs/hep-th/0506113).
7. Hamilton R.S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature* // J. Differential Geom. – 1982. – V. 17. – № 2. – P. 255–306.
8. DeTurck D.M. *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensor* // J. Differential Geom. – 1983. – V. 18. – № 1. – P. 157–162.
9. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. Аппарат исследования, общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности. Т. I. – М.–Л., Гостехиздат, 1947. – 512 с.
10. Норден А.П. *Теория поверхностей.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 260 с.
11. Rubinstein J., Sinclair R. *Visualizing Ricci flow of manifolds of revolution* // Experimental Mathematics. – 2005. – V. 14. – P. 285–298.
12. Фоменко В.Т. *Об одном свойстве конформных бесконечно малых деформаций многомерных поверхностей в римановом пространстве* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – Вып. 2. – С. 284–290.
13. Фоменко В.Т. *Об одном аналоге теоремы Зауера* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 3–4. – С. 438–444.
14. Бляшке В. *Введение в дифференциальную геометрию.* – М.: Гостехиздат, 1957. – 223 с.
15. Palais R.S., Terng Chuu-lian, *Critical point theory and submanifold geometry.* – Lecture Notes in Math. – 1988. – V. 1353.

Университет Los Andes
(*Богота, Колумбия*)

Казанский государственный университет

Поступила
13.04.2007