ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 519.10

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Г. КУЗЬМИН, А.М. ЛЕОНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ТИПЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ЧАСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ ВИДА Σ-MINMAX И Σ-MINMIN

1. Введение

При исследовании различных видов устойчивости задач оптимизации возникает проблема получения условий, при которых множество оптимальных решений обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности при внешних воздействиях. Под устойчивостью задачи чаще всего понимается одно из свойств непрерывности или полунепрерывности (например, по Хаусдорфу или Бержу) оптимального отображения, т. е. точечно-множественного (многозначного) отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие множество искомых решений. В задачах дискретной оптимизации полунепрерывность снизу в смысле Хаусдорфа превращается в свойство сохранения исходных оптимальных решений задачи при любых изменениях ее параметров в пределах "малой" окрестности исходных данных. Этот тип устойчивости принято называть квазиустойчивостью. Его исследованию для различных векторных задач дискретной оптимизации посвящена обширная литература. В работе [1] (см. также [2]–[4]) доказано, что совпадение множества Парето с множеством Смейла (множеством строго эффективных решений) является необходимым и достаточным условием этого вида устойчивости в векторных задачах целочисленного линейного программирования с ограниченным множеством допустимых решений. Распространить этот результат на векторные комбинаторные задачи с частными критериями вида MINSUM, MINMAX и MINMIN не удается. В [5] показано, что при отсутствии в таких задачах линейных частных критериев (MINSUM) упомянутое условие, оставаясь достаточным, перестает быть необходимым. Необходимое и одновременно достаточное условие квазиустойчивости векторной траекторной задачи с любой комбинацией приведенных выше частных критериев было получено в [6] (см. ниже следствие 2).

Исследования свойства квазиустойчивости проводились для векторных комбинаторных задач с лексикографическим принципом оптимальности [7], [8], мажоритарным принципом оптимальности [9], а также с паретовским — в случае l_∞-экстремальных траекторных задач [10]–[12], задач минимизации линейных форм на множестве подстановок [13] и векторных задач целочисленного линейного программирования [4], [14].

В данной статье получены два необходимых и одновременно достаточных условия квазиустойчивости векторной комбинаторной задачи с обобщенными частными критериями, включающими такие широко известные критерии, как линейный и "узкого места". В качестве следствий получены ранее известные результаты из [6], [15].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры 29" (грант № 913/28).

2. Определения, обозначения и свойства

Рассмотрим следующую модель векторной (n-критериальной) траекторной задачи. Пусть заданы множество $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, и система непустых подмножеств (траекторий) $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| \geq 2$. Пусть частными критериями вектор-функции

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1, k_1), f_2(t, A_2, k_2), \dots, f_n(t, A_n, k_n)), \quad n \geq 1,$$

заданной на множестве траекторий T, являются критерии следующих двух видов:

$$\Sigma\text{-MINMAX:}\quad f_i(t, A_i, k_i) = \max\{g_i(s, A_i) : s \in S(t, k_i)\} \longrightarrow \min_{t \in T}, \quad i \in I_1, \tag{1}$$

$$\Sigma\text{-MINMIN:}\quad f_i(t, A_i, k_i) = \min\{g_i(s, A_i) : s \in S(t, k_i)\} \longrightarrow \min_{t \in T}, \quad i \in I_2, \tag{2}$$

где $g_i(s, A_i) = \sum\limits_{j \in N(s)} a_{ij}$, $S(t, k) = \{s \subseteq t : |s| = \min\{|t|, k\}\}$, $N(s) = \{j \in N_m : e_j \in s\}$, $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $I_1 \cup I_2 = N_n$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ — заданные числа из множества N_m. Будем считать, что $g_i(\emptyset, A_i) = 0$, $S(t, 0) = \emptyset$.

Для любого непустого множества $p \subseteq E$ и числа k будем использовать прежнее обозначение $f_i(p, A_i, k)$, полагая лишь $f_i(p, A_i, k) = 0$, если $k = 0$.

Легко видеть, что критерии (1) и (2) при $k_i \geq \max\{|t| : t \in T\}$ превращаются в линейный критерий

$$\text{MINSUM:}\qquad f_i(t, A_i, k_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t \in T},$$

критерий (1) при $k_i = 1$ превращается в критерий "узкого места"

$$\text{MINMAX:}\qquad f_i(t, A_i, k_i) = \max_{j \in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t \in T},$$

а критерий (2) при $k_i = 1$ — в критерий

$$\text{MINMIN:}\qquad f_i(t, A_i, k_i) = \min_{j \in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t \in T}.$$

Множество тех индексов из N_n, которыми занумерованы частные критерии вида MINSUM, будем обозначать через I_{SUM}.

Под векторной (n-критериальной) траекторной задачей $Z^n(A)$, $n \geq 1$, будем понимать задачу поиска множества Парето, состоящего из всех эффективных траекторий

$$P^n(A) = \{t \in T : P^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$P^n(t, A) = \{t' \in T : f(t,\ A) \geq f(t', A), \quad f(t, A) \neq f(t', A)\}.$$

Очевидно, $P^1(A)$, где A — m-мерный вектор, является множеством всех оптимальных решений скалярной траекторной задачи $Z^1(A)$. В схему таких задач вкладываются многие широко известные задачи оптимизации на графах, задачи булева программирования, разнообразные задачи теории расписаний [2], [15]–[17].

Отметим, что Σ-минимаксные и Σ-миниминные критерии используются при формулировке задач оптимального целераспределения [18].

Возмущение параметров векторного критерия $f(t, A)$ будем осуществлять путем сложения матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ с матрицами множества

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n \times m} : \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\|\cdot\|$ — чебышевская норма в пространстве $\mathbf{R}^{n \times m}$, т. е.

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = [b_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}.$$

Задачу $Z^n(A + B)$, полученную из начальной задачи $Z^n(A)$ путем сложения матриц A и $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, будем называть возмущенной, а матрицу B — возмущающей.

Как обычно [3]–[6], [10]–[12], под квазиустойчивостью задачи $Z^n(A)$ будем понимать дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу в смысле Хаусдорфа оптимального отображения, т. е. свойство сохранения эффективности траекторий при "малых" независимых возмущениях элементов матрицы A. Тем самым задача $Z^n(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (P^n(A) \subseteq P^n(A+B)).$$

Отсюда непосредственно вытекают два свойства.

Свойство 1. Задача $Z^n(A)$ не является квазиустойчивой, если

$$\exists\, t \in P^n(A) \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (t \notin P^n(A+B)).$$

Свойство 2. Задача $Z^n(A)$ квазиустойчива, если

$$\forall\, t \in P^n(A) \ \ \exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (t \in P^n(A+B)).$$

В [15] было показано, что совпадение множеств эффективных и строго эффективных траекторий является необходимым и достаточным условием квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ лишь в том случае, когда среди частных критериев имеется хотя бы один линейный критерий (см. ниже следствие 1). В данной работе получены два необходимых и одновременно достаточных условия квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ с произвольной комбинацией частных критериев вида (1) и (2).

Для любых $i \in N_n$, $t \in T$ и $t' \in T \setminus \{t\}$ при $t \cap t' \neq \emptyset$ положим

$$\xi_i(t,t',A_i) = \begin{cases} f_i(t\cap t',A_i,k_i) - f_i(t\cap t',A_i,k_i-1) - f_i(\Delta(t,t'),A_i,1), & \text{если } i \in I_1; \\ -(f_i(t\cap t',A_i,k_i) - f_i(t\cap t',A_i,k_i-1) - f_i(\Delta(t,t'),A_i,1)), & \text{если } i \in I_2, \end{cases}$$

где $\Delta(t,t') = (t \cup t') \setminus (t \cap t')$. Ясно, что $\Delta(t,t') \neq \emptyset$, если $t \neq t'$.

Для непустого множества $p \subseteq E$ и числа $k \in N_m$ введем обозначение

$$U_i(p,A_i,k) = \begin{cases} \operatorname{Arg}\max\{g_i(s,A_i) : s \in S(p,k)\}, & \text{если } i \in I_1; \\ \operatorname{Arg}\min\{g_i(s,A_i) : s \in S(p,k)\}, & \text{если } i \in I_2. \end{cases}$$

Естественно считать, что $U_i(p,A_i,0) = \emptyset$.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 3. Если $i \in I_{\mathrm{SUM}}$, то равенство $U_i(t,A_i,k_i) = U_i(t',A_i,k_i)$ справедливо тогда и только тогда, когда траектории t и t' равны.

Свойство 4. Если $s, s' \subseteq E$, $s \cap s' = \emptyset$, то для любого индекса $i \in N_n$ справедливо равенство

$$g_i(s,A_i) + g_i(s',A_i) = g_i(s \cup s', A_i).$$

Свойство 5. Если для некоторого индекса $i \in N_n$ и траекторий t и t' выполняются равенства $U_i(t,A_i,k_i) = U_i(t',A_i,k_i) = U$, то $t \cap t' \neq \emptyset$, $U_i(t \cup t',A_i,k_i) = U_i(t \cap t',A_i,k_i) = U$, $f_i(t \cup t',A_i,k_i) = f_i(t,A_i,k_i) = f_i(t',A_i,k_i) = f_i(t \cap t',A_i,k_i)$.

Свойство 6. Пусть $\beta > 0$, $i \in N_n$, $s \in U_i(t,A_i,k_i)$, $t \in T$, $q \in N(s)$, b — m-мерный возмущающий вектор с координатами

$$b_j = \begin{cases} \beta, & \text{если } j = q; \\ 0, & \text{если } j \in N_m \setminus \{q\}. \end{cases}$$

Тогда

$$f_i(t, A_i + b, k_i) = f_i(t,A_i,k_i) + \beta, \quad \text{если } \ i \in I_1;$$
$$f_i(t, A_i - b, k_i) = f_i(t,A_i,k_i) - \beta, \quad \text{если } \ i \in I_2.$$

Свойство 7. Пусть $i \in N_n$, $s \subset p \subseteq E$, $|s| = k_i$. Множество s принадлежит $U_i(p, A_i, k_i)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\, j \in N(s), \quad \forall\, l \in N(p \setminus s) \ \ (a_{ij} \geq a_{il}), \quad \text{если} \ \ i \in I_1;$$
$$\forall\, j \in N(s), \quad \forall\, l \in N(p \setminus s) \ \ (a_{ij} \leq a_{il}), \quad \text{если} \ \ i \in I_2.$$

Из свойства 7 легко выводится

Свойство 8. Пусть $i \in N_n$, $s \subset p \subseteq E$, $|s| = k_i$. Множество $s \in U_i(p, A_i, k_i)$ тогда и только тогда, когда

$$\min\{a_{ij} : j \in N(s)\} \geq \max\{a_{ij} : j \in N(p \setminus s)\}, \quad \text{если} \ \ i \in I_1;$$
$$\max\{a_{ij} : j \in N(s)\} \leq \min\{a_{ij} : j \in N(p \setminus s)\}, \quad \text{если} \ \ i \in I_2.$$

Свойство 9. Если для некоторого индекса $i \in N_n$ множество $s \in U_i(p, A_i, k_i)$, причем $|s| = k_i$, то $f_i(p, A_i, k_i - 1) = f_i(s, A_i, k_i - 1)$.

Доказательство этого свойства достаточно провести лишь при $s \neq p$ и $k_i > 1$.

Случай 1: $i \in I_1$. Пусть $\widehat{s} \in U_i(s, A_i, k_i - 1)$. Тогда $|\widehat{s}| = k_i - 1$. Таким образом, $\widehat{s} \subset s \subset p$. Поэтому, дважды используя свойство 8, выводим

$$\min_{j \in N(\hat{s})} a_{ij} \geq \max_{j \in N(s \setminus \hat{s})} a_{ij} \geq \min_{j \in N(s)} a_{ij} \geq \max_{j \in N(p \setminus s)} a_{ij} \geq \min_{j \in N(p \setminus s)} a_{ij} \geq \min_{j \in N(p \setminus \hat{s})} a_{ij}.$$

Отсюда, вновь применяя свойство 8, приходим к соотношению $\widehat{s} \in U_i(p, A_i, k_i - 1)$, что вместе с условием $\widehat{s} \in U_i(s, A_i, k_i - 1)$ дает окончательно $f_i(p, A_i, k_i - 1) = g_i(\widehat{s}, A_i) = f_i(s, A_i, k_i - 1)$.

Случай 2: $i \in I_2$. Доказательство проводится аналогично случаю 1. $\square$

Замечание 1. Легко видеть, что индекс i, фигурирующий в свойствах 7 и 8, не может принадлежать множеству I_{SUM}.

3. Леммы

Лемма 1. *Если для некоторого индекса $i \in N_n$ и траекторий $t \neq t'$ выполняется неравенство*

$$U_i(t, A_i, k_i) \neq U_i(t', A_i, k_i), \tag{3}$$

где $k_i \in N_m$, то существует такое множество $s \in U_i(t, A_i, k_i) \cup U_i(t', A_i, k_i)$, что $s \not\subseteq t \cap t'$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$\forall s \in U_i(t, A_i, k_i) \cup U_i(t', A_i, k_i) \ \ (s \subseteq t \cap t'). \tag{4}$$

Тогда для всякого множества $s \in U_i(t, A_i, k_i)$ справедливы соотношения $|t \cap t'| \geq |s| = \min\{|t|, k_i\}$. Отсюда имеем $\min\{|t \cap t'|, k_i\} = \min\{|t|, k_i\}$. Поэтому получаем $S(t \cap t', k_i) \subseteq S(t, k_i)$. Это значит, что $U_i(t \cap t', A_i, k_i) \subseteq U_i(t, A_i, k_i)$. Отсюда с учетом включения $U_i(t, A_i, k_i) \subseteq U_i(t \cap t', A_i, k_i)$, справедливого в силу (4), имеем $U_i(t \cap t', A_i, k_i) = U_i(t, A_i, k_i)$.

Аналогичным образом, учитывая включение $s \subseteq t \cap t'$, верное при любом $s \in U_i(t', A_i, k_i)$, легко выводим $U_i(t \cap t', A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i)$. Итак, получаем равенство $U_i(t, A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i)$, противоречащее условию (3). $\square$

Лемма 2. *Если для некоторого индекса $i \in N_n$ и траекторий $t \neq t'$ выполняется равенство*

$$U_i(t, A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i), \tag{5}$$

где $k_i \in N_m$, то справедливы неравенства

$$|t \cap t'| \geq k_i, \tag{6}$$
$$\xi_i(t, t', A_i) > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (6). Допустим, наоборот, что справедливо неравенство $|t \cap t'| < k_i$. Тогда в силу свойства 5 для всякого множества $s \in U_i(t \cap t', A_i, k_i)$ верны соотношения $|s| = |t \cap t'| < k_i$. Отсюда получаем $\min\{|t'|, k_i\} = \min\{|t|, k_i\} = |s| < k_i$. Поэтому $|t \cap t'| = |s| = |t| = |t'|$, т. е. $t = t'$. Полученное противоречие доказывает неравенство (6).

Далее докажем неравенство (7). Предположим, напротив, что верно неравенство

$$\xi_i(t, t', A_i) \leq 0. \tag{8}$$

Пусть

$$s \in U_i(t \cap t', A_i, k_i - 1), \quad s' \in U_i(\Delta(t, t'), A_i, 1). \tag{9}$$

Не исключая общности, в дальнейшем будем полагать, что $s' \subseteq t \setminus t'$. Тогда, принимая во внимание (9), имеем

$$s \cap s' = \emptyset, \tag{10}$$

$$s \cup s' \subseteq t, \tag{11}$$

$$s \cup s' \not\subseteq t'. \tag{12}$$

Из (6), (9) и (10) с учетом свойства 4 и определения величины $\xi_i(t, t', A_i)$ получаем

$$\xi_i(t, t', A_i) = \begin{cases} f_i(t \cap t', A_i, k_i) - g_i(s \cup s', A_i), & \text{если } \ i \in I_1; \\ g_i(s \cup s', A_i) - f_i(t \cap t', A_i, k_i), & \text{если } \ i \in I_2. \end{cases}$$

Отсюда согласно свойству 5 (ввиду (5)) и неравенству (8) заключаем

$$f_i(t, A_i, k_i) \leq g_i(s \cup s', A_i), \quad \text{если } \ i \in I_1; \tag{13}$$

$$f_i(t, A_i, k_i) \geq g_i(s \cup s', A_i), \quad \text{если } \ i \in I_2. \tag{14}$$

Кроме того, соотношения (6) и (9) (ввиду $|\Delta(t, t')| \geq 1$) дают $|s| = k_i - 1$ и $|s'| = 1$. Тогда, учитывая (10), выводим $|s \cup s'| = k_i$. Поэтому, принимая во внимание (11), заключаем, что $s \cup s' \in S(t, k_i)$, и с учетом неравенств (13) и (14) получаем $s \cup s' \in U_i(t, A_i, k_i)$. Отсюда и из (12) $U_i(t, A_i, k_i) \neq U_i(t', A_i, k_i)$, что противоречит (5). $\square$

Лемма 3. *Если* $i \in N_n$, $t, t' \in T$, $t \neq t'$, $|t \cap t'| \geq k_i \in N_m$, $s \in U_i(t \cap t', A_i, k_i)$, *то*

$$\xi_i(t, t', A_i) = \begin{cases} \min\{a_{ij} : j \in N(s)\} - \max\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\}, & \textit{если} \quad i \in I_1; \\ \min\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\} - \max\{a_{ij} : j \in N(s)\}, & \textit{если} \ \ i \in I_2. \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. В силу свойства 9 и определения множества $U_i(t \cap t', A_i, k_i)$ имеем

$$f_i(t \cap t', A_i, k_i) - f_i(t \cap t', A_i, k_i - 1) = g_i(s, A_i) - f_i(s, A_i, k_i - 1). \tag{16}$$

Случай 1: $i \in I_1$. Из (16) получаем

$$f_i(t \cap t', A_i, k_i) - f_i(t \cap t', A_i, k_i - 1) = g_i(s, A_i) - \max_{j \in N(s)} (g_i(s, A_i) - a_{ij}) = \min_{j \in N(s)} a_{ij}.$$

Отсюда с учетом определения величины $\xi_i(t, t', A_i)$, $i \in I_1$, и очевидного равенства $f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) = \max\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\}$ выводим необходимое равенство (15).

Случай 2: $i \in I_2$. В силу (16) имеем

$$f_i(t \cap t', A_i, k_i) - f_i(t \cap t', A_i, k_i - 1) = g_i(s, A_i) - \min_{j \in N(s)} (g_i(s, A_i) - a_{ij}) = \max_{j \in N(s)} a_{ij}.$$

Отсюда с учетом определения величины $\xi_i(t, t', A_i)$, $i \in I_2$, и очевидного равенства

$$f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) = \min\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\}$$

получаем равенство (15). $\square$

Лемма 4. *Пусть $i \in N_n$, $t, t' \in T$, $t \neq t'$,*

$$|t \cap t'| \geq k_i \in N_m, \tag{17}$$
$$\xi_i(t, t', A_i) > 0. \tag{18}$$

Тогда имеет место равенство $f_i(t, A_i, k_i) = f_i(t', A_i, k_i)$.

Доказательство. Пусть $s \in U_i(t \cap t', A_i, k_i)$. Тогда ввиду (17) имеем

$$|s| = k_i. \tag{19}$$

Для доказательства леммы достаточно доказать равенство

$$f_i(t, A_i, k_i) = g(s, A_i), \tag{20}$$

т. к. траектории t и t' входят в условия леммы 4 равноправно. Ввиду (19) равенство (20) равносильно включению $s \in U_i(t, A_i, k_i)$.

Далее будем полагать, что s является собственным подмножеством траектории t. Иначе (при $s = t$, т. е. при $|t| = k_i$) равенство (20) очевидно.

Случай 1: $i \in I_1$. С учетом (18) в силу леммы 3 получаем

$$\min\{a_{ij} : j \in N(s)\} \geq \max\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\} \geq \max\{a_{ij} : j \in N(t \setminus t')\}. \tag{21}$$

Непосредственно из определения множества s следует $s \subseteq t \cap t'$. Если $s \subset t \cap t'$, то с учетом свойства 8 (ввиду (19)) выводим $\min\{a_{ij} : j \in N(s)\} \geq \max\{a_{ij} : j \in N((t \cap t') \setminus s)\}$. Отсюда и из (21) имеем

$$\min\{a_{ij} : j \in N(s)\} \geq \max\{a_{ij} : j \in N(t \setminus s)\}. \tag{22}$$

Если $s = t \cap t'$, то вновь убеждаемся в справедливости неравенства (22), используя (21).

Учитывая (19), (22) и свойство 8, заключаем, что $s \in U_i(t, A_i, k_i)$.

Случай 2: $i \in I_2$. Используя (18), в силу леммы 3 выводим

$$\max\{a_{ij} : j \in N(s)\} \leq \min\{a_{ij} : j \in N(\Delta(t, t'))\} \leq \min\{a_{ij} : j \in N(t \setminus t')\}. \tag{23}$$

Как уже отмечалось, $s \subseteq t \cap t'$. Если $s \subset t \cap t'$, то с учетом свойства 8 получаем

$$\max\{a_{ij} : j \in N(s)\} \leq \min\{a_{ij} : j \in N((t \cap t') \setminus s)\}.$$

Отсюда и из (23) вытекает

$$\max\{a_{ij} : j \in N(s)\} \leq \min\{a_{ij} : j \in N(t \setminus s)\}. \tag{24}$$

Если $s = t \cap t'$, то вновь убеждаемся в справедливости неравенства (24) в силу (23).

Учитывая (19), (24) и свойство 8, заключаем, что $s \in U_i(t, A_i, k_i)$. $\square$

Замечание 2. Легко видеть, что индекс i, фигурирующий в леммах 2–4, не может принадлежать множеству I_{SUM}.

4. Теоремы

Произвольной траектории $t \in P^n(A)$ сопоставим множество эквивалентных ей эффективных траекторий

$$Q^n(t, A) = \{t' \in T \setminus \{t\} : f(t', A) = f(t, A)\}.$$

Теорема 1. *Для векторной траекторной задачи* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *с любой комбинацией частных критериев* (1) *и* (2) *следующие утверждения эквивалентны*:
1^0. *задача* $Z^n(A)$ *квазиустойчива,*
2^0. $(Q^n(t, A) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \forall t' \in Q^n(t, A),\ \forall i \in N_n\ (U_i(t, A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i)) \quad \forall t \in P^n(A)$,
3^0. $(Q^n(t, A) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \forall t' \in Q^n(t, A),\ \forall i \in N_n\ (|t \cap t'| \geq k_i \ \&\ \xi_i(t, t', A_i) > 0)) \quad \forall t \in P^n(A)$.

Доказательство. $1^0 \Rightarrow 2^0$. Пусть задача $Z^n(A)$ квазиустойчива. Допустим, что вопреки утверждению 2^0 найдутся такие траектории $t \in P^n(A)$ и $t' \in Q^n(t, A)$, что для некоторого индекса $q \in N_n$ множества $U_q(t, A_q, k_q)$ и $U_q(t', A_q, k_q)$ не совпадают. Тогда существование множества $s \in U_q(t, A_q, k_q) \cup U_q(t', A_q, k_q)$, $s \nsubseteq t \cap t'$ гарантируется леммой 1. Значит, найдется такой индекс $l \in N(s)$, что $l \in N(t \setminus t')$ или $l \in N(t' \setminus t)$. Рассмотрим эти два случая.

Случай 1: $l \in N(t \setminus t')$. Возмущающую матрицу $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ построим в зависимости от принадлежности индекса q множеству I_1 или I_2. Положим $0 < \beta < \varepsilon$.

Если индекс $q \in I_1$, то элементы возмущающей матрицы B зададим формулой

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } \ i = q,\ j = l; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, учитывая свойство 8 и эквивалентность траекторий t и t', найдем

$$f_i(t, A_i + B_i, k_i) - f_i(t', A_i + B_i, k_i) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \ i = q; \\ 0, & \text{если } \ i \in N_n \setminus \{q\}. \end{cases}$$

Поэтому $P^n(t, A + B) \neq \emptyset$. В результате получаем

$$\exists t \in P^n(A) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (t \notin P^n(A + B)).$$

Следовательно, на основании свойства 2 задача $Z^n(A)$ не является квазиустойчивой, что противоречит утверждению 1^0.

Если индекс $q \in I_2$, то построим возмущающую матрицу B по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} -\beta, & \text{если } \ i = q,\ j = l; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, учитывая свойство 8 и эквивалентность траекторий t и t', убеждаемся в справедливости равенств

$$f_i(t, A_i + B_i, k_i) - f_i(t', A_i + B_i, k_i) = \begin{cases} -\beta, & \text{если } \ i = q; \\ 0, & \text{если } \ i \in N_n \setminus \{q\}. \end{cases}$$

Поэтому имеем $P^n(t', A + B) \neq \emptyset$, т. е. траектория t' не является эффективной в возмущенной задаче $Z^n(A + B)$. Отсюда, учитывая $t' \in P^n(A)$, на основании свойства 1 заключаем, что задача $Z^n(A)$ не является квазиустойчивой. Следовательно, вновь приходим к противоречию с утверждением 1^0.

Случай 2: $l \in N(t' \setminus t)$. Так как $t' \in P^n(A)$ и $t \in Q^n(t', A)$, то доказательство в этом случае проводится аналогично предыдущему случаю (достаточно поменять местами t и t').

$2^0 \Rightarrow 3^0$. Эта импликация непосредственно следует из леммы 2.

$3^0 \Rightarrow 1^0$. Предположим, что $t \in P^n(A)$. Покажем, что при выполнении 3^0 никакая траектория $t' \neq t$ не может принадлежать множеству $P^n(t, A)$ при "малых" возмущениях матрицы A.

Случай 1: $t' \in T \setminus Q^n(t, A)$. Тогда $f(t, A) \neq f(t', A)$, откуда следует существование такого индекса $r \in N_n$, для которого выполняется неравенство $f_r(t', A_r, k_r) > f_r(t, A_r, k_r)$. Поэтому в силу непрерывности в $\mathbf{R}^m$ функций $f_i(t, A_i, k_i)$ найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(t') > 0$, что для любой матрицы $B \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо неравенство $f_r(t', A_r + B_r, k_r) > f_r(t, A_r + B_r, k_r)$. Следовательно,

$$\forall t' \in T \setminus Q^n(t, A), \quad \forall B \in \Omega(\varepsilon^*) \quad (t' \notin P^n(t, A + B)), \tag{25}$$

где $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t') : t' \in T \setminus Q^n(t, A) \ \&\ t' \neq t\}$.

Случай 2: $t' \in Q^n(t, A)$. Тогда в силу утверждения 3^0 для любого индекса $i \in N_n$ верны неравенства $|t \cap t'| \geq k_i$ и $\xi_i(t, t', A_i) > 0$. Поэтому с учетом непрерывности в $\mathbf{R}^m$ функций $\xi_i(t, t', A_i)$ имеем $\forall i \in N_n \quad \exists \varepsilon_i(t') > 0 \quad \forall B \in \Omega(\varepsilon_i(t')) \quad (\xi_i(t, t', A_i + B_i) > 0)$. Отсюда по лемме 4 для любого индекса $i \in N_n$ при $B \in \Omega(\varepsilon_i(t'))$ верно равенство $f_i(t, A_i + B_i) = f_i(t', A_i + B_i)$. В результате получаем

$$\forall t' \in Q^n(t, A), \quad \forall B \in \Omega(\varepsilon_*) \quad (t' \notin P^n(t, A + B)), \tag{26}$$

где $\varepsilon_* = \min\limits_{t' \in Q^n(t,A)} \ \min\limits_{i \in N_n} \varepsilon_i(t')$.

Из (25) и (26) вытекает, что при любой матрице $B \in \Omega(\varepsilon)$ траектория t является эффективной в возмущающей задаче $Z^n(A + B)$, если $\varepsilon = \min\{\varepsilon^*, \varepsilon_*\}$. Следовательно, на основании свойства 2 задача $Z^n(A)$ квазиустойчива. $\square$

Таким образом, теорема 1 может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2. *Для векторной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев* (1) *и* (2) *следующие утверждения эквивалентны*:

1^0. *задача $Z^n(A)$ квазиустойчива,*

2^0. *выполняется одно из условий*

$$P^n(A) = R^n(A) \quad \text{или} \quad \emptyset \neq P^n(A) \setminus R^n(A) = \widehat{P}^n(A), \tag{27}$$

3^0. *выполняется одно из условий*

$$P^n(A) = R^n(A) \quad \text{или} \quad \emptyset \neq P^n(A) \setminus R^n(A) = \check{P}^n(A),$$

где

$$\widehat{P}^n(A) = \{t \in P^n(A) \setminus R^n(A) : \forall t' \in Q^n(t, A) \ \ \forall i \in N_n \ \ (U_i(t, A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i))\},$$
$$\check{P}^n(A) = \{t \in P^n(A) \setminus R^n(A) : \forall t' \in Q^n(t, A) \ \ \forall i \in N_n \ \ (|t \cap t'| \geq k_i \ \&\ \xi_i(t, t', A_i) > 0)\},$$
$$R^n(A) = \{t \in P^n(A) : Q^n(t, A) = \emptyset\}$$

— *множество строго эффективных траекторий, т. е. множество Смейла* [19].

5. Следствия

В качестве следствий получаем известные ранее результаты.

Следствие 1 ([15]). Для того чтобы задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с частными критериями вида (1) и (2) была квазиустойчива, достаточно, а в случае, когда $I_{\mathrm{SUM}} \neq \emptyset$, и необходимо, чтобы выполнялось равенство $P^n(A) = R^n(A)$.

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из теоремы 2.

Необходимость. Пусть задача $Z^n(A)$ квазиустойчива и $I_{\mathrm{SUM}} \neq \emptyset$. Из квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ в силу теоремы 2 следует выполнимость одного из условий (27). Легко видеть, что второе из этих условий не может выполняться, поскольку согласно свойству 3 для любых $i \in I_{\mathrm{SUM}}$, $t \in P^n(A) \setminus R^n(A)$ и $t' \in Q^n(t, A)$ (ввиду $t \neq t'$) справедливо неравенство $U_i(t, A_i, k_i) \neq U_i(t', A_i, k_i)$. Следовательно, верно равенство $P^n(A) = R^n(A)$. $\square$

Пусть далее $N_n = I_{\text{SUM}} \cup I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$, где I_{SUM}, I_{MAX} и I_{MIN} — множества тех индексов из N_n, которыми занумерованы соответственно частные критерии MINSUM, MINMAX и MINMIN.

Для любых двух различных траекторий $t, t' \in T$ и индекса $i \in N_n$ положим

$$\zeta_i(t, t', A_i) = \begin{cases} f_i(t', A_i, k_i) - f_i(t, A_i, k_i), & \text{если } \ i \in I_{\text{SUM}}; \\ f_i(t', A_i, k_i) - f_i(t \setminus t', A_i, k_i), & \text{если } \ i \in I_{\text{MAX}}; \\ f_i(t' \setminus t, A_i, k_i) - f_i(t, A_i, k_i), & \text{если } \ i \in I_{\text{MIN}}. \end{cases}$$

При любом векторе $A_i \in \mathbf{R}^m$ считаем

$$f_i(\emptyset, A_i, k_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ i \in I_{\text{SUM}}; \\ -\infty, & \text{если } \ i \in I_{\text{MAX}}; \\ +\infty, & \text{если } \ i \in I_{\text{MIN}}. \end{cases}$$

Следствие 2 ([6]). Для того чтобы n-критериальная ($n \geq 1$) траекторная задача с любой комбинацией частных критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN ($I_{\text{SUM}} \cup I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}} = N_n$) была квазиустойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась формула

$$\forall t \in P^n(A) \ \ (Q^n(t, A) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \forall t' \in Q^n(t, A), \ \ \forall i \in N_n \ \ (\zeta_i(t, t', A_i) > 0)). \tag{28}$$

Доказательство. Достаточность. Нетрудно видеть, что из (28) следует выполнение одного из условий $P^n(A) = R^n(A)$ или $\emptyset \neq P^n(A) \setminus R^n(A) = \widetilde{P}^n(A)$, где $\widetilde{P}^n(A) = \{t \in P^n(A) \setminus R^n(A) : \forall t' \in Q^n(t, A), \forall i \in N_n \ (\zeta_i(t, t', A_i) > 0)\}$.

Если $P^n(A) = R^n(A)$, то согласно следствию 1 задача $Z^n(A)$ квазиустойчива.

Пусть $P^n(A) \neq R^n(A)$. Тогда $\widetilde{P}^n(A) \neq \emptyset$. Это означает, что для любых траекторий $t \in P^n(A) \setminus R^n(A)$ и $t' \in Q^n(t, A)$ выполняются неравенства

$$\zeta_i(t, t', A_i) > 0, \quad i \in N_n. \tag{29}$$

Отсюда согласно определению величины $\zeta_i(t, t', A_i)$ справедливо равенство $I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}} = N_n$, т. е. $i \notin I_{\text{SUM}}$. Очевидно (благодаря теореме 2), в этом случае для доказательства квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ достаточно показать выполнение неравенств $|t \cap t'| \geq 1$ и $\xi_i(t, t', A_i) > 0$ при любых $t \in P^n(A) \setminus R^n(A)$ и $t' \in Q^n(t, A)$, $i \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$.

Прежде всего, справедливо неравенство $|t \cap t'| \geq 1$. Действительно, если $|t \cap t'| = 0$, то с учетом эквивалентности траекторий t и t' имеют место равенства

$$f_i(t \setminus t', A_i, 1) = f_i(t, A_i, 1) = f_i(t', A_i, 1) = f_i(t' \setminus t, A_i, 1).$$

Тогда $\zeta_i(t, t', A_i) = 0$, что противоречит (29). Следовательно, $|t \cap t'| \geq 1$.

Далее покажем, что $\xi_i(t, t', A_i) > 0$. Для этого рассмотрим два случая.

Случай 1: $i \in I_{MAX}$. Учитывая (29) и эквивалентность траекторий t и t', имеем

$$0 < \zeta_i(t, t', A_i) = f_i(t', A_i, 1) - f_i(t \setminus t', A_i, 1),$$
$$0 < \zeta_i(t', t, A_i) = f_i(t, A_i, 1) - f_i(t' \setminus t, A_i, 1) = f_i(t', A_i, 1) - f_i(t' \setminus t, A_i, 1).$$

Отсюда $f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) < f_i(t', A_i, 1)$. Поэтому $f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) < f_i(t \cap t', A_i, 1)$. Следовательно, $\xi_i(t, t', A_i) > 0$.

Случай 2: $i \in I_{\text{MIN}}$. Тогда с учетом (29) и эквивалентности траекторий t и t' выводим

$$0 < \zeta_i(t, t', A_i) = f_i(t' \setminus t, A_i, 1) - f_i(t, A_i, 1),$$
$$0 < \zeta_i(t', t, A_i) = f_i(t \setminus t', A_i, 1) - f_i(t', A_i, 1) = f_i(t \setminus t', A_i, 1) - f_i(t, A_i, 1).$$

Отсюда $f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) > f_i(t, A_i, 1)$. Поэтому $f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) > f_i(t \cap t', A_i, 1)$. Следовательно, $\xi_i(t, t', A_i) > 0$.

Собирая все доказанное (для случая $P^n(A) \neq R^n(A)$), приходим к выводу, что справедливо утверждение 3^0 теоремы 2, в силу чего задача $Z^n(A)$ квазиустойчива.

Необходимость докажем методом от противного. Пусть задача $Z^n(A)$ квазиустойчива, но условие (28) не выполняется, т. е. найдутся такие различные траектории $t \in P^n(A) \setminus R^n(A)$ и $t' \in Q^n(t, A)$, что для некоторого индекса $i \in N_n$ выполняется неравенство

$$\zeta_i(t, t', A_i) \le 0. \tag{30}$$

Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $i \in I_{\mathrm{SUM}}$. В силу утверждения 2^0 теоремы 1 $U_i(t, A_i, k_i) = U_i(t', A_i, k_i)$. Следовательно, по свойству 3 $t = t'$. Получено противоречие.

Случай 2: $i \in I_{\mathrm{MAX}}$. Тогда $k_i = 1$, $i \in I_1$, и в силу теоремы 1 $|t \cap t'| \ge 1$. Поэтому с учетом неравенства (30) и определения величин $\zeta_i(t, t', A_i)$ и $\xi_i(t, t', A_i)$ выводим

$$0 \ge \zeta_i(t, t', A_i) = f_i(t', A_i, 1) - f_i(t \setminus t', A_i, 1) \ge f_i(t \cap t', A_i, 1) - f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) = \xi_i(t, t', A_i),$$

что противоречит условию 3^0 теоремы 1.

Случай 3: $i \in I_{\mathrm{MIN}}$. Тогда $k_i = 1, i \in I_2$. Поэтому с учетом неравенств (30) и $|t \cap t'| \ge 1$ (ввиду теоремы 1) имеем

$$0 \ge \zeta_i(t, t', A_i) = f_i(t' \setminus t, A_i, 1) - f_i(t, A_i, 1) \ge f_i(\Delta(t, t'), A_i, 1) - f_i(t \cap t', A_i, 1) = \xi_i(t, t', A_i),$$

что вновь противоречит утверждению 3^0 теоремы 1. $\square$

Из следствия 2 при $n = 1$ получаем

Следствие 3 ([20]). Однокритериальная линейная (с критерием вида MINSUM) задача $Z^1(A)$, где $A \in \mathbf{R}^m$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда $|P^1(A)| = 1$.

Замечание 3. С учетом эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве ([21], с. 166) все результаты, приведенные в данной статье, справедливы не только для чебышевской, но и для других норм в пространстве возмущающих матриц $\mathbf{R}^{n \times m}$.

Литература

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т.И. *Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 307. – № 3. – С. 527–529.
2. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
3. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 11. – С. 1801–1805.
4. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. *Stability and regularization of vector problems of integer linear programming* // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645–676.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 21–27.
6. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *Квазиустойчивость векторной нелинейной траекторной задачи с паретовским принципом оптимальности* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 27–32.
7. Бердышева Р.А., Емеличев В.А. *Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 11–21.
8. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. *О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации* // Дискретн. матем. – 1998. – Т. 10. – Вып. 1. – С. 20–27.
9. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *О квазиустойчивости векторной траекторной задачи мажоритарной оптимизации* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – Вып. 1. – С. 38–47.

10. Emelichev V.A., Leonovich A.M. *A sensitivity measure of the Pareto set in a vector l_∞-extreme combinatorial problem* // Computer Science Journal of Moldova. – 2001. – V. 9. – № 3. – P. 291–304.
11. Emelichev V.A., Leonovich A.M. *A quasistability of the vector l_∞-extreme combinatorial problem with Pareto principle of optimality* // Buletinul Acad. de St. a Republicii Moldova. Matematica. – 2001. – № 1. – P. 44–50.
12. Emelichev V.A., Kovalenko K.E. *Quasi-stability of a vector trajectorial problem with non-linear partial criteria* // Computer Science Journal of Moldova. – 2003. – V. 11. – № 2. – P. 137–149.
13. Емеличев В.А., Похилько В.Г. *Анализ чувствительности эффективных решений векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок* // Дискретн. матем. – 2000. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 37–48.
14. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 47–69.
15. Гирлих Э., Ковалев М.Н., Кравцов М.К. *Стабильность, устойчивость и квазиустойчивость многокритериальной задачи на системе подмножеств* // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – С. 111–124.
16. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *О комбинаторных задачах векторной оптимизации* // Дискретн. матем. – 1995. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 3–18.
17. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discrete Appl. Math. – 1995. – V. 58. – № 2. – P. 169–190.
18. Диниц А.Е. *О решении двух задач о назначении* // Исследов. по дискретн. оптимизации. – М.: Наука, 1976. – С. 333–348.
19. Smale S. *Global analysis and economics. V. Pareto theory with constraints* // J. Math. Econom. – 1974. – V. 1. – № 3. – P. 213–221.
20. Леонтьев В. К. *Устойчивость в линейных дискретных задачах* // Пробл. кибернетики. – М.: Наука, 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.
21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Белорусский государственный университет

Поступила 02.03.2004