Известия вузов. Математика
2014, №2, с. 54–60

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.А. УТКИНА

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ И СО СМЕЩЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация. Для уравнения третьего порядка неисследованного ранее вида рассмотрен вариант задачи Гурса. Доказаны существование и единственность решения изучаемой задачи.

Ключевые слова: задача со смещением аргументов искомой функции, псевдопараболический оператор.

УДК: 517.956

1. В литературе хорошо известны обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых аргумент искомой функции претерпевает определенное смещение. Подобные уравнения различные авторы называют по-разному: функционально-дифференциальными, с запаздывающим или отклоняющимся аргументом (библиография в [1]–[5]). Для уравнений с частными производными в интересующем нас направлении развитой теории не существует. Можно указать лишь некоторые результаты (например, [6]–[10]).

В данной статье постановка задачи из [7] распространяется на уравнение, являющееся обобщением известного в литературе уравнения Аллера [11], описывающего процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации.

В области $D = \{0 < x, y < 1\}$ определим псевдопараболические операторы

$$L_s\theta \equiv \alpha^s_{21}\theta_{xxy} + \alpha^s_{20}\theta_{xx} + \alpha^s_{11}\theta_{xy} + \alpha^s_{10}\theta_x + \alpha^s_{01}\theta_y + \alpha^s_{00}\theta \quad (s = 1, 2),$$

где $\alpha^s_{ij} \in C^{i+j}(\overline{D})$, $\alpha^1_{21} \neq 0$.

Задача Г. *Найти в D регулярное решение уравнения*

$$L_1u + L_2v = f, \quad f \in C(\overline{D}), \tag{1}$$

непрерывно продолжимое на ∂D при $x \to 0$, $y \to 0$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad u_x(0, y) = \varphi_1(y), \tag{2}$$

$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \psi'(0) = \varphi_1(0), \quad \varphi, \varphi_1 \in C^1[0, 1], \quad \psi \in C^2[0, 1].$$

При этом $v(x, y)$ определяется по $u(x, y)$ по формуле

$$v(x, y) \equiv u[\lambda(y), \mu(x)], \tag{3}$$

где каждая из функций $\lambda, \mu \in C^1[0, 1]$ отображает отрезок $[0, 1]$ на себя с сохранением направления движения, т. е., в частности,

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0, \quad \lambda(1) = \mu(1) = 1, \tag{4}$$

Поступила 12.10.2012

а повторное применение преобразования (λ, μ) *возвращает координаты* (x, y) *в исходное положение*:

$$v[\lambda(y), \mu(x)] \equiv u\{\lambda[\mu(x)], \mu[\lambda(y)]\} \equiv u(x, y). \tag{5}$$

Примерами таких пар являются $\lambda = y$, $\mu = x$ и $\lambda = (e^y - 1)/(e - 1)$, $\mu = \ln[1 + (e - 1)x]$.

Понятно, что данная постановка включает в себя известную [12] задачу Гурса для уравнения $L_1 u = f$.

2. Положим в (1) $x = t$, $y = \tau$ и проинтегрируем рассматриваемое уравнение дважды по t от 0 до x, и один раз по τ от 0 до y. Учитывая при этом условия (2) и вытекающие из (3)–(4) соотношения

$$v(x, 0) = \varphi[\mu(x)], \quad v(0, y) = \psi[\lambda(y)],$$

получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{21}^1(x,y)u(x,y) + \alpha_{21}^2(x,y)u[\lambda(y),\mu(x)] = \int_0^x \{h_1(t,y)u(t,y) + h_2(t,y)u[\lambda(y),\mu(t)]\}dt+ \\ + \int_0^y \{k_1(x,\tau)u(x,\tau) + k_2(x,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(x)]\}d\tau+ \\ + \int_0^x \int_0^y \{H_1(t,\tau)u(t,\tau) + H_2(t,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(t)]\}d\tau dt + \varpi(x,y),\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$h_s(t,y) = (2\alpha_{21t}^s - \alpha_{11}^s)(t,y) - (x-t)(\alpha_{21tt}^s - \alpha_{11t}^s + \alpha_{01}^s)(t,y),$$
$$k_s(x,\tau) = (\alpha_{21\tau}^s - \alpha_{20}^s)(x,\tau),$$

$$\begin{aligned}H_s(t,\tau) = (-2\alpha_{21t\tau}^s + \alpha_{20t}^s + \alpha_{11\tau}^s - \alpha_{10}^s + \\ + (x-t)(\alpha_{21tt\tau}^s - \alpha_{20tt}^s - \alpha_{11t\tau}^s + \alpha_{01\tau}^s + \alpha_{10t}^s))(t,\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varpi(x,y) = \alpha_{21}^1(0,y)\varphi(y) + \alpha_{21}^2(0,y)\psi[\lambda(y)] + \alpha_{21}^1(x,0)\psi(x) + \alpha_{21}^2(x,0)\varphi[\mu(x)]- \\ - \int_0^x \{h_1(t,0)\psi(t) + h_2(t,0)\varphi[\mu(t)]+ \\ + (\alpha_{21t}^1(0,y) - \alpha_{11}^1(0,y))\varphi(y) + (\alpha_{21t}^2(0,y) - \alpha_{11}^2(0,y))\psi(\lambda(y))\}dt- \\ - x\alpha_{21}^1(0,0)\varphi_1(0) - x\alpha_{21}^2(0,0)\varphi'(0)\mu'(0)- \\ - \int_0^y \{k_1(0,\tau)\varphi(\tau) + k_2(0,\tau)\psi[\lambda(\tau)]\}d\tau- \\ - [\alpha_{21}^1(0,0) + \alpha_{21}^2(0,0) + x\alpha_{21x}^1(0,0) + x\alpha_{21x}^2(0,0) - x\alpha_{11}^1(0,0) - x\alpha_{11}^2(0,0)]\varphi(0)+ \\ + f(x,y) + x\alpha_{21}^1(0,y)\varphi_1(y) + x\alpha_{21}^2(0,y)u_y(\lambda(y),0)\mu'(0)- \\ - x\int_0^y (\alpha_{21\tau}^1(0,\tau) - \alpha_{20}^1(0,\tau))\varphi_1(\tau)d\tau- \\ - x\int_0^y (\alpha_{21\tau}^2(0,\tau) - \alpha_{20}^2(0,\tau))u_y(\lambda(\tau),0)\mu'(0)d\tau+ \\ + x\int_0^y (\alpha_{21x\tau}^1(0,\tau) - \alpha_{20x}^1(0,\tau) + \alpha_{10}^1(0,\tau))\varphi(\tau)d\tau+\end{aligned}$$

$$+ x \int_0^y (\alpha^2_{21x\tau}(0,\tau) - \alpha^2_{20x}(0,\tau) + \alpha^2_{10}(0,\tau))\psi(\lambda(\tau))d\tau.$$

Сформулированные перед постановкой задачи Г условия гладкости коэффициентов уравнения (1) обеспечивают законность проведенных при выводе (6) действий и непрерывность в $\overline{D}$ функций h_s, k_s, H_s $(s = 1,2)$, $\varpi(x,y)$.

Обозначив всю правую часть (6) через $g(x,y)$, получим, что с учетом (3) это соотношение принимает вид

$$\alpha^1_{21}(x,y)u(x,y) + \alpha^2_{21}(x,y)v(x,y) = g(x,y). \tag{7}$$

Положив в (7) $x = \lambda(y)$, $y = \mu(x)$ и учитывая свойство (5), имеем

$$\alpha^1_{21}[\lambda(y),\mu(x)]v(x,y) + \alpha^2_{21}[\lambda(y),\mu(x)]u(x,y) = g[\lambda(y),\mu(x)]. \tag{8}$$

Равенства (7)–(8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для u, v. Ее определитель равен

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha^1_{21}(x,y) & \alpha^2_{21}(x,y) \\ \alpha^2_{21}[\lambda(y),\mu(x)] & \alpha^1_{21}[\lambda(y),\mu(x)] \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Если $\Delta(x,y) \neq 0$, то по формуле Крамера получаем

$$\Delta(x,y)u(x,y) = \alpha^1_{21}[\lambda(y),\mu(x)]g(x,y) - \alpha^2_{21}(x,y)g[\lambda(y),\mu(x)], \tag{10}$$

$$\Delta(x,y)v(x,y) = \alpha^1_{21}(x,y)g[\lambda(y),\mu(x)] - \alpha^2_{21}[\lambda(y),\mu(x)]g(x,y). \tag{11}$$

Из (9) на основании свойства (5) следует $\Delta(x,y) \equiv \Delta[\lambda(y),\mu(x)]$. Поэтому, если в (11) положить $y = \mu(x)$, $x = \lambda(y)$, а также учесть свойство (5) и правило (3), то получится (10). Таким образом, формулы (10)–(11) дают одно и то же решение. Следовательно, уравнение (7) оказалось однозначно разрешимым в явном виде (10). Подставим теперь в (10) значение $g(x,y)$, которое является правой частью (6),

$$\begin{aligned}\Delta(x,y)u(x,y) = \alpha^1_{21}[\lambda(y),\mu(x)]\Bigg(&\int_0^x \{h_1(t,y)u(t,y) + h_2(t,y)u[\lambda(y),\mu(x)]\}dt + \\ &+ \int_0^y \{k_1(x,\tau)u(x,\tau) + k_2(x,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(x)]\}d\tau - \\ &- \int_0^x\int_0^y \{H_1(t,\tau)u(t,\tau) + H_2(t,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(t)]\}d\tau dt\Bigg) - \\ - \alpha^2_{21}(x,y)\Bigg(&\int_0^{\lambda(y)} \{h_1[t,\mu(x)]u[t,\mu(x)] + h_2[t,\mu(x)]u[x,\mu(t)]\}dt + \\ &+ \int_0^{\mu(x)} \{k_1[\lambda(y),\tau]u[\lambda(y),\tau] + k_2[\lambda(y),\tau]u[\lambda(\tau),y]\}d\tau - \\ &- \int_0^{\lambda(y)}\int_0^{\mu(x)} \{H_1(t,\tau)u(t,\tau) + H_2(t,\tau)u[\lambda(\tau),\mu(t)]\}d\tau dt\Bigg) + F(x,y),\end{aligned} \tag{12}$$

$$F(x,y) = \alpha^1_{21}[\lambda(y),\mu(x)]\varpi(x,y) - \alpha^2_{21}(x,y)\varpi[\lambda(y),\mu(x)].$$

Поделив (12) на $\Delta(x,y)$, представим это уравнение в операторной форме

$$u = Au + F(x,y)/\Delta(x,y). \tag{13}$$

Отметим, что в (6) (и последующих формулах) присутствует функция $u_y(x,0)$, пока неопределенная. Для ее нахождения воспользуемся формулой решения задачи Гурса

$$u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f, \qquad (14)$$
$$u(0,y) = \varphi(y), \quad u(x,0) = \psi(x), \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y)$$

из [12], имеющей вид

$$u(x,y) = \varphi(y) + \int_0^x h(\alpha,y)d\alpha + \int_0^x \int_0^\xi \int_0^y R(\alpha,\beta,\xi,y)f(\alpha,\beta)d\beta\, d\alpha\, d\xi, \qquad (15)$$

$$h(x,y) = R(x,0,x,y)\psi'(x) + R(0,y,x,y)\varphi_1(y) - M(x,0,x,y)\psi(x) - M(0,y,x,y)\varphi(y)+$$
$$+ M(0,0,x,y)\psi(0) - R(0,0,x,y)\psi'(0) + \int_0^y [P(0,\beta,x,y)\varphi(\beta) - N(0,\beta,x,y)\varphi_1(\beta)]d\beta+$$
$$+ \int_0^x Q(\alpha,0,x,y)\psi(\alpha)d\alpha,$$

$$M = R_x - a_{11}M, \quad N = R_y - a_{20}R, \quad P = M_y - (a_{20}R)_x + a_{10}R, \quad Q = R_x + a_{01}R.$$

Преобразуем уравнение (1) к виду (14)

$$u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = \frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v). \qquad (16)$$

Используя для уравнения (16) формулу (15) (в ней вместо $f(x,y)$ возьмем $\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)$), получим, что функция $u_y(x,0)$ полностью определяется. Действительно, решение задачи (16), (2) с учетом (15) будет иметь вид

$$u(x,y) = \varphi(y) + \int_0^x h(\alpha,y)d\alpha + \int_0^x \int_0^\xi \int_0^y R(\alpha,\beta,\xi,y)\left(\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)\right)(\alpha,\beta)d\beta\, d\alpha\, d\xi.$$

Полученное уравнение продифференцируем по y

$$u_y(x,y) = \varphi'(y) + \int_0^x h_y(\alpha,y)d\alpha + \int_0^x \int_0^\xi R(\alpha,y,\xi,y)\left(\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)\right)(\alpha,y)d\alpha\, d\xi+$$
$$+ \int_0^x \int_0^\xi \int_0^y R_y(\alpha,\beta,\xi,y)\left(\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)\right)(\alpha,\beta)d\beta\, d\alpha\, d\xi.$$

Здесь все слагаемые правой части, кроме

$$\int_0^x \int_0^\xi R(\alpha,y,\xi,y)\left(\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)\right)(\alpha,y)d\alpha\, d\xi$$

и

$$\int_0^x \int_0^\xi \int_0^y R_y(\alpha,\beta,\xi,y)\left(\frac{1}{\alpha_{21}^1}(f - L_2v)\right)(\alpha,\beta)d\beta\, d\alpha\, d\xi,$$

являются известными. Требуется определить их при $y = 0$. Второе из слагаемых при $y = 0$ равно нулю, а первое после несложных преобразований и подстановки $y = 0$ содержит функции $v(x,0)$ и $v_x(x,0)$, выражающиеся через граничные значения (2). Поэтому получаем, что $u_y(x,0)$ полностью определяется.

Вернемся теперь к доказательству существования и единственности решения (13). Пусть $|\Delta(x,y)| \geq m > 0$, а величины $|\alpha_i h_j|$, $|\alpha_i k_j|$, $|H_j|$ в силу непрерывности ограничены при $i,j = 1,2$ числом M.

Принимая во внимание, что $\lambda(y), \mu(x) \in [0,1]$, учитывая теорему о среднем значении интеграла и то, что в данном случае (см. (4)) из формулы конечных приращений для $\lambda(y), \mu(x)$ следуют неравенства

$$\lambda(y) \leq s_1 y, \quad \mu(x) \leq s_2 x, \quad \text{где} \quad s_1 = \max_{[0,1]} |\lambda'(y)|, \quad s_2 = \max_{[0,1]} |\mu'(x)|, \quad s = \max(s_1, s_2),$$

из (13) получим оценку по норме пространства $C(\overline{D})$

$$\begin{gathered}
|Au_1(x,y) - Au_2(x,y)| \leq \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^x |(u_1-u_2)(t,y)| dt + \int_0^x |(u_1-u_2)(\lambda(y),\mu(t))| dt \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^y |(u_1-u_2)(x,\tau)| d\tau + \int_0^y |(u_1-u_2)(\lambda(\tau),\mu(x))| d\tau \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^x \int_0^y |(u_1-u_2)(t,\tau)| d\tau dt + \int_0^x \int_0^y |(u_1-u_2)(\lambda(\tau),\mu(t))| d\tau\, dt \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^{\lambda(y)} |(u_1-u_2)(t,\mu(x))| dt + \int_0^{\lambda(y)} |(u_1-u_2)(x,\mu(t))| dt \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^{\mu(x)} |(u_1-u_2)(\lambda(y),\tau)| d\tau + \int_0^{\mu(x)} |(u_1-u_2)(\lambda(\tau),y)| d\tau \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \Bigg[\int_0^{\lambda(y)} \int_0^{\mu(x)} |(u_1-u_2)(t,\tau)| d\tau dt + \int_0^{\lambda(y)} \int_0^{\mu(x)} |(u_1-u_2)(t,\tau))| d\tau\, dt \Bigg] < \\
< \frac{1}{m} M \|u_1 - u_2\| \Bigg[\int_0^{x+y} dt + \int_0^{x+y} dt + \\
+ \int_0^{x+y} d\tau + \int_0^{x+y} d\tau \Bigg] + \frac{1}{m} M \|u_1 - u_2\| \Bigg[\int_0^x \int_0^y d\tau dt + \int_0^x \int_0^y d\tau\, dt \Bigg] + \\
+ \frac{1}{m} M \|u_1 - u_2\| \Bigg[s \int_0^{x+y} dt + \\
+ s \int_0^{x+y} dt + s \int_0^{x+y} d\tau + s \int_0^{x+y} d\tau \Bigg] + \frac{1}{m} M \|u_1 - u_2\| \Bigg[\int_0^{sy} \int_0^{sx} d\tau dt + \int_0^{sy} \int_0^{sx} d\tau\, dt \Bigg] < \\
< 20 \frac{M}{m} s^2 \|u_1 - u_2\|. \qquad (17)
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\|Au_1 - Au_2\| < 20 s^2 \frac{M}{m} \|u_1 - u_2\|. \qquad (18)$$

Так как на $\overline{D}$ $\sigma = x+y \leq 2$, то оператор А непрерывен. Очевидно, из (17), (18) выводятся также оценки

$$\|A^k u_1 - A^k u_2\| \leq \left(\frac{20Ms^2}{m} \right)^k \frac{\sigma^k}{k!} \|u_1 - u_2\|, \quad k = 1, 2 \ldots .$$

Ясно, что при некотором k

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{40Ms^2}{m} \right)^k < 1,$$

т. е. A^k является сжимающим оператором. Поэтому ([13], с. 82) уравнение (13) имеет только одно решение.

Подстановка этого решения в (12) превращает его в тождество, влекущее за собой обращение в тождество соотношения (6), найденного путем непосредственного интегрирования уравнения (1) с учетом условий (2). Поэтому оправдано применение к (6) обратной операции $\partial^3/\partial x \partial x \partial y$, которое приводит к тождественному выполнению (1). Таким образом, имеет место

Теорема. *Если определяемая с помощью* (9) *функция* $\Delta(x, y)$ *не обращается при* $(x, y) \in \overline{D}$ *в нуль, то решение задачи* Γ *существует и является единственным.*

Все вышеизложенные рассуждения справедливы и в случае прямоугольной области D со сторонами, параллельными осям координат. Квадратная область выбрана только для некоторого упрощения формул.

Результаты могут быть обобщены на случай системы уравнений (векторно-матричного аналога уравнения (1)).

Литература

[1] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).

[2] Мышкис А.Д. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, УМН **32** (2), 173–202 (1977).

[3] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Функционально-дифференциальные уравнения*, Дифференц. уравнения **14** (5), 771–797 (1978).

[4] Хейли Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* (Мир, М., 1984).

[5] Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1985).

[6] Зарубин А.Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом.* Учебное пособие (ОГУ, Орел, 1997).

[7] Жегалов В.И. *Гиперболическое уравнение со смещением аргументов искомой функции*, Материалы второго Международного Российско-Узбекского симпозиума “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики” (Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2012), с. 107–109.

[8] Андреев А.А. *О корректности начальных задач для некоторых уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом*, В сб.: Уравнения неклассического типа (ИМ СОАН СССР, Новосибирск, 1986), с. 10–14.

[9] Андреев А.А. *Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом*, Дифференц. уравнения **40** (5), 1126–1128 (2004).

[10] Андреев А.А., Саушкин И.Н. *Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области*, Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. Вып. 34, 10–16 (2005).

[11] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии* (Высш. школа, М., 1995).

[12] Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка*, Изв. вузов. Матем., № 10, 73–76 (1999).

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1976).

Е.А. Уткина

доцент, кафедра общей математики,

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` eutkina1@yandex.ru

E.A. Utkina

A characteristic boundary problem for a third-order equation with a psedoparabolic operator where the desired function has shifted arguments

Abstract. We consider one variant of the Goursat problem for a third-order equation which was not studied earlier and prove its unique solvability.

Keywords: desired function with shifted arguments, pseudo-parabolic operator.

E.A. Utkina

Associate Professor, Chair of General Mathematics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` eutkina1@yandex.ru