ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2008 МАТЕМАТИКА № 2 (549)

УДК 517.552

О.Н. БЫКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА ТЕМЛЯКОВА В СЛУЧАЕ ЕДИНИЧНОГО БИКРУГА

Теория интегральных представлений аналитических функций многих комплексных переменных является важной ветвью многомерного комплексного анализа. Значительным вкладом в эту теорию были установленные А.А. Темляковым [1], [2] интегральные представления функций двух комплексных переменных, аналитических в классе параметрически задаваемых ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областей.

Л.А. Айзенберг [3], рассмотрев в качестве плотности в интегралах Темлякова произвольную функцию, суммируемую по Лебегу на границе определяющей области, на основе интегральных представлений Темлякова ввел понятие интегралов типа Темлякова.

Данная работа посвящена исследованию свойств обобщенного интеграла типа Темлякова

$$f(w,z)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\int\limits_{a_3}^{b_3}dx_3\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(x_1,x_2,x_3,\xi)}{\xi-u}d\xi, \tag{1}$$

в котором компонента u, входящая в ядро внутреннего интеграла, имеет более сложную структуру, чем в классическом интеграле типа Темлякова, исследованном ранее (напр., [4], [5]).

В интеграле (1) функция $F(x_1,x_2,x_3,\xi)$ задана на топологическом произведении

$$X=\{x_1,x_2,x_3\in R,\ \xi\in \mathrm{C}: a_1\le x_1\le b_1,\ a_2\le x_2\le b_2,\ a_3\le x_3\le b_3,\ |\xi|=1\},$$
$$F(x_1,x_2,x_3+h_3,\xi)=F(x_1,x_2,x_3,\xi),\quad h_3=b_3-a_3,$$
$$u=t_1(x_1)w\exp it_2(x_2)+(1-t_1(x_1))z\exp it_3(x_3),$$

$t_1(x_1)$ — линейная функция, определяемая условиями $t_1(a_1)=0$, $t_1(b_1)=1$, функция $t_2(x_2)=p$ постоянна на отрезке $[a_2,b_2]$, а функция $t_3(x_3)$ строго возрастающая, непрерывная, периодическая со смещением

$$t_3(x_3+h_3)=t_3(x_3)+2\pi,$$

причем

$$t_3(a_3)=p,\quad t_3(b_3)=p+2\pi.$$

Теорема 1. *В точках пространства* C^2 *функции, определяемые интегралом* (1), *представимы по формуле*

$$f(w,z)=\frac{1}{4\pi^2}\Bigg[\iiint\limits_{R_1\cup R_3}\Phi^+(x_1,x_2,x_3,u)dx_1dx_2dx_3+ \\ +\iiint\limits_{R_2\cup R_4}\Phi^-(x_1,x_2,x_3,u)dx_1dx_2dx_3+\iiint\limits_{R_5}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(x_1,x_2,x_3,\xi)}{\xi-u}d\xi\right)dx_1dx_2dx_3\Bigg],$$

где

$$\Phi^+(x_1,x_2,x_3,u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(x_1,x_2,x_3,\xi)}{\xi-u}d\xi,\quad \textit{если}\quad |u|<1,$$

$$\Phi^{-}(x_1,x_2,x_3,u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(x_1,x_2,x_3,\xi)}{\xi-u}d\xi,\quad \text{если}\quad |u|>1,$$

$$R_1=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in X_1,\ x_2\in[a_2,b_2],\ x_3\in[a_3,b_3]\},$$
$$R_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in X_2,\ x_2\in[a_2,b_2],\ x_3\in[a_3,b_3]\},$$
$$R_3=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in X_3,\ (x_2,x_3)\in P_1\},$$
$$R_4=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in X_3,\ (x_2,x_3)\in P_2\},$$
$$R_5=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in X_3,\ t_2(x_2)-t_3(x_3)=\psi-\varphi\vee t_2(x_2)-t_3(x_3)=\psi+\varphi\},$$
$$P_1=\{(x_2,x_3)\in[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]:\psi+\varphi-2\pi<t_2(x_2)-t_3(x_3)<\psi-\varphi\},$$
$$P_2=\{(x_2,x_3)\in[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]:\psi-\varphi<t_2(x_2)-t_3(x_3)<\psi+\varphi\},$$
$$\varphi=\arccos\frac{(b_1-a_1)^2-(x_1-a_1)^2|w|^2-(b_1-x_1)^2|z|^2}{2(x_1-a_1)(b_1-x_1)|w|\,|z|}.$$

Множества X_k, $k=1,2,3$, определяются с помощью линейных функций

$$g_1(x_1)=\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}|w|-\frac{b_1-x_1}{b_1-a_1}|z|-1,\quad g_2(x_1)=g_1(x_1)+2,\quad g_3(x_1)=\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}|w|+\frac{b_1-x_1}{b_1-a_1}|z|-1$$

следующим образом:

$$X_1=\{x_1\in[a_1,b_1]:g_3(x_1)<0\},\quad X_2=\{x_1\in[a_1,b_1]:|g_1(x_1)+1|>1\},$$
$$X_3=\{x_1\in[a_1,b_1]:0\le g_2(x_1)\le 2,\ g_3(x_1)\ge 0\}.$$

Используем непересекающиеся множества

$$M=\{|w|\le 1,\ |z|\le 1,\ |w|+|z|<2\},\quad M_0=\{|w|\ge 1,\ |z|\ge 1,\ |w|+|z|>2\},$$
$$M_1=\{|w|>1,\ |z|<1\},\quad M_2=\{|w|<1,\ |z|>1\},$$
$$L=\{|w|=|z|=1\}$$

и обозначим через τ_k единственный нуль функции $g_k(x_1)$, $k=1,2,3$.

Теорема 2. *Пусть функция $t_3(x_3)$ строго возрастает. Тогда в точках пространства $\mathbb{C}^2$ для функций, представимых интегралом* (1), *в областях M, M_0, M_1 и M_2 справедливы следующие формулы*:

если $(w,z)\in M$, то $f(w,z)=\mathbf{I}^+(a_1,b_1)$,

если $(w,z)\in M_0$, то $f(w,z)=\mathbf{I}^-(a_1,\tau_2)+\mathbf{I}_1(\tau_2,\tau_1)+\mathbf{I}^-(\tau_1,b_1)$,

если $(w,z)\in M_1$, то $f(w,z)=\mathbf{I}^+(a_1,\tau_3)+\mathbf{I}_1(\tau_3,\tau_1)+\mathbf{I}^-(\tau_1,b_1)$,

если $(w,z)\in M_2$, то $f(w,z)=\mathbf{I}^-(a_1,\tau_2)+\mathbf{I}_1(\tau_2,\tau_3)+\mathbf{I}^+(\tau_3,b_1)$,

где

$$\mathbf{I}^{\pm}(q_1,q_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{q_1}^{q_2}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\int\limits_{a_3}^{b_3}\Phi^{\pm}(x_1,x_2,x_3,u)dx_3,$$

$$\mathbf{I}_1(q_1,q_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{q_1}^{q_2}\Phi(x_1,u)dx_1,$$

$$\Phi(x_1,u)=\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\int\limits_{t_3^{-1}(p+\psi+\varphi-2\pi)}^{t_3^{-1}(p+\psi-\varphi)}\Phi^{+}(x_1,x_2,x_3,u)dx_3+\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\int\limits_{t_3^{-1}(p+\psi-\varphi)}^{t_3^{-1}(p+\psi+\varphi)}\Phi^{-}(x_1,x_2,x_3,u)dx_3.$$

Если $(w,z)\in L$, то $f(w,z)=\mathbf{I}^+(a_1,b_1)$.

Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем, например, из [4], [5].

Теорема 3. *Функции, представимые интегралом* (1), *являются аналитическими в области* M *и, вообще говоря, неаналитическими в замыкании объединения областей* M_0, M_1 *и* M_2.

Доказательство теоремы следует из строения формул для интеграла (1), полученных в теореме 2.

Теорема 4. *Пусть* Γ_1 *и* Γ_2 — *интегральные операторы вида*

$$\Gamma_1 = \int\limits_{a_1}^{c_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} dx_3 + \int\limits_{c_2}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} dx_3 + \int\limits_{c_5}^{c_6} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{p+\psi+\varphi-2\pi}^{p+\psi-\varphi} dx_3,$$

$$\Gamma_2 = \int\limits_{a_1}^{c_3} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} dx_3 + \int\limits_{c_4}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} dx_3 + \int\limits_{c_5}^{c_6} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{p+\psi-\varphi}^{p+\psi+\varphi} dx_3,$$

где

$$c_1 = \begin{cases} \tau_3, & (w,z) \in M_1; \\ a_1, & (w,z) \in M_0 \cup M_2, \end{cases} \quad c_2 = \begin{cases} \tau_3, & (w,z) \in M_2; \\ b_1, & (w,z) \in M_0 \cup M_1, \end{cases} \quad c_3 = \begin{cases} \tau_2, & (w,z) \in M_0 \cup M_2; \\ a_1, & (w,z) \in M_1, \end{cases}$$

$$c_4 = \begin{cases} \tau_1, & (w,z) \in M_0 \cup M_1; \\ b_1, & (w,z) \in M_2, \end{cases} \quad c_5 = \begin{cases} \tau_2, & (w,z) \in M_0 \cup M_2; \\ \tau_3, & (w,z) \in M_1, \end{cases} \quad c_6 = \begin{cases} \tau_1, & (w,z) \in M_0 \cup M_1; \\ \tau_3, & (w,z) \in M_2. \end{cases}$$

Тогда для функции $f(w,z)$ *в областях* M_0, M_1 *и* M_2 *справедлива формула*

$$f(w,z) = \frac{1}{4\pi^2}(\Gamma_1[\Phi^+] + \Gamma_2[\Phi^-]). \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, непосредственной проверкой из формулы (2) следуют формулы представления функции $f(w,z)$ в областях M_0, M_1 и M_2, полученные в теореме 2.

Пусть, например, $(w,z) \in M_0$. Тогда $c_1 = a_1$, $c_2 = b_1$, $c_3 = c_5 = \tau_2$, $c_4 = c_6 = \tau_1$, причем $a_1 \le \tau_2 < \tau_1 \le b_1$ в области M_0, поэтому из равенства (2) получаем представление интеграла (1) в указанной области.

Аналогично проверяется справедливость формулы (2) для областей M_1 и M_2. □

Теперь перейдем к исследованию подвижных областей аналитичности интеграла (1).

Зафиксируем точку $(w,z) \in \mathrm{C}^2$ и отметим, что при этом функции $g_1(x_1)$ и $g_2(x_1)$ строго возрастают на отрезке $[a_1, b_1]$, а функция $g_3(x_1)$ строго возрастает при $|w| > |z|$ и строго убывает при $|w| < |z|$.

Пусть $a \in (a_1, b_1)$. Рассмотрим области

$$G_1 = \{(w,z) \in C^2 : g_3(b_1) > 0,\ g_3(a) < 0\}, \quad G_2 = \{(w,z) \in C^2 : g_3(a_1) > 0,\ g_3(a) < 0\},$$
$$G_3 = \{(w,z) \in C^2 : g_2(a) < 0\}, \quad G_4 = \{(w,z) \in C^2 : g_1(a) > 0\}.$$

Теорема 5. *Если плотность* $F(x_1, x_2, x_3, \xi)$ *интеграла* (1) *тождественно равна нулю при всех* $x_1 \in (a, b_1]$, *то функция* $f(w,z)$, *представимая этим интегралом, аналитична в областях* G_1 *и* G_3, *причем*

если $(w,z) \in G_1$, *то* $f(w,z) = \mathbf{I}^+(a_1, a)$,

если $(w,z) \in G_3$, *то* $f(w,z) = \mathbf{I}^-(a_1, a)$.

Если плотность $F(x_1, x_2, x_3, \xi)$ *интеграла* (1) *тождественно равна нулю при всех* $x_1 \in [a_1, a)$, *то функция* $f(w,z)$, *представимая этим интегралом, аналитична в областях* G_2 *и* G_4, *причем*

если $(w,z) \in G_2$, *то* $f(w,z) = \mathbf{I}^+(a, b_1)$,

если $(w,z) \in G_4$, *то* $f(w,z) = \mathbf{I}^-(a, b_1)$.

Доказательство. Если $(w, z) \in G_1 \subset M_1$, то функция $g_3(x_1)$ строго возрастает на отрезке $[a_1, b_1]$, а, следовательно, из условия $g_3(a) < 0 (= g_3(\tau_3))$ для множества G_1 имеем

$$a_1 < a < \tau_3 < \tau_1 < b_1.$$

Так как $c_1 = c_5 = \tau_3$, $c_2 = b_1$, $c_3 = a_1$, $c_4 = c_6 = \tau_1$ в области M_1, то формулу (2) можно записать в виде

$$f(w,z) = \mathbf{I}^{+}(a_1, a) + \mathbf{I}^{+}(a, \tau_3) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\tau_3}^{\tau_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{p+\psi+\varphi-2\pi}^{p+\psi-\varphi} \Phi^{+}(x_1, x_2, x_3, u) dx_3 +$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\tau_3}^{\tau_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{p+\psi-\varphi}^{p+\psi+\varphi} \Phi^{-}(x_1, x_2, x_3, u) dx_3 + \mathbf{I}^{-}(\tau_1, b_1). \quad (3)$$

По условию для любого $x_1 \in (a, b_1]$ $F(x_1, x_2, x_3, \xi) = 0$, следовательно, все слагаемые, кроме первого правой части равенства (3), обращаются в нуль. Таким образом, получена формула для функции $f(w, z)$ в области G_1, что и доказывает аналитичность данной функции в указанной области.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. □

Теперь зафиксируем произвольные $a, b \in (a_1, b_1)$, $a < b$, и рассмотрим области

$$G_5 = \{(w,z) \in C^2 : g_3(a) < 0,\ g_1(b) > 0\}, \quad G_6 = \{(w,z) \in C^2 : g_2(a) < 0,\ g_3(b) < 0\},$$
$$G_7 = \{(w,z) \in C^2 : g_2(a) < 0,\ g_1(b) > 0\}.$$

Теорема 6. *Если плотность $F(x_1, x_2, x_3, \xi)$ интеграла (1) тождественно равна нулю при всех $x_1 \in (a, b)$, то функция $f(w, z)$, представимая этим интегралом, аналитична в областях G_5, G_6 и G_7, причем*
если $(w, z) \in G_5$, то $f(w, z) = \mathbf{I}^{+}(a_1, a) + \mathbf{I}^{-}(b, b_1)$,
если $(w, z) \in G_6$, то $f(w, z) = \mathbf{I}^{-}(a_1, a) + \mathbf{I}^{+}(b, b_1)$,
если $(w, z) \in G_7$, то $f(w, z) = \mathbf{I}^{-}(a_1, a) + \mathbf{I}^{-}(b, b_1)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5.

Далее исследуем поведение интеграла (1) в областях неаналитичности.

Теорема 7. *Если при любых $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$ и $x_3 \in [a_3, b_3]$ плотность $F(x_1, x_2, x_3, \xi)$ интеграла (1) является аналитической в замкнутом единичном круге $|\xi| \le 1$ функцией, то в областях M_0, M_1 и M_2 функция $f(w, z)$ представима равномерно и абсолютно сходящимся функциональным рядом*

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{mn} w^m z^{n-m}, \quad (4)$$

$$a_{mn} = \frac{\Gamma_1[(x_1 - a_1)^m (b_1 - x_1)^{n-m} e^{i[nt_3(x_3) - m(t_3(x_3) - t_2(x_2))]} F_{\xi}^{(n)}(x_1, x_2, x_3, 0)]}{2\pi (b_1 - a_1)^n m! (n-m)!}.$$

Доказательство. Так как плотность $F(x_1, x_2, x_3, \xi)$ интеграла (1) является аналитической функцией в замкнутом единичном круге $|\xi| \le 1$, то в некотором замкнутом круге $\overline{K}_{\varepsilon} = \{|\xi| \le 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ она разлагается в ряд Маклорена

$$F(x_1, x_2, x_3, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{\xi}^{(n)}}{n!} \xi^n. \quad (5)$$

Функция $|F(x_1, x_2, x_3, \xi)|$ непрерывна на компакте

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, \xi) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \overline{K}_{\varepsilon}\},$$

следовательно, ограничена на нем. Пусть $M^* = \sup\limits_S |F(x_1, x_2, x_3, \xi)|$. Тогда в силу неравенства Коши

$$\left|\frac{F_\xi^{(n)}}{n!}\right| \leq \frac{M^*}{(1+\varepsilon)^n} = A_n,$$

поэтому в замкнутом круге $|\xi| \leq 1$ ряд (5) мажорируется сходящимся числовым положительным рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, и, следовательно, сходится в этом круге равномерно и абсолютно. Так как внутренний интеграл правой части формулы (1) является интегралом Коши по комплексной переменной u, то $\Phi^+ = F(x_1, x_2, x_3, u)$, а $\Phi^- \equiv 0$, поэтому из формулы (2) получим

$$f(w, z) = \frac{1}{4\pi^2}\Gamma_1[F(x_1, x_2, x_3, u)],$$

откуда в силу равномерной сходимости ряда (5) имеем

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Gamma_1[F_\xi^{(n)}u^n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3),$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{n!}\int\limits_{c_5}^{c_6} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{p+\psi+\varphi-2\pi}^{p+\psi-\varphi} F_\xi^{(n)} u^n dx_3, \quad \mathrm{I}_2 = \frac{1}{n!}\int\limits_{a_1}^{c_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} F_\xi^{(n)} u^n dx_3,$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{1}{n!}\int\limits_{c_2}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} F_\xi^{(n)} u^n dx_3.$$

Обозначим длину отрезка интегрирования по x_k через $\Delta_k = b_k - a_k$, $k = 1, 2, 3$, и произведем оценки трех последних интегралов:

$$|\mathrm{I}_1| \leq \Delta_1\Delta_2\Delta_3 A_n,$$

т. к. $|u| < 1$, $2(\pi - \varphi) < \Delta_3$, а $0 \leq c_6 - c_5 \leq \Delta_1$. С учетом того, что $|u| < 1$, а $0 \leq c_1 - a_1 \leq \Delta_1$, получаем

$$|\mathrm{I}_2| \leq \Delta_1\Delta_2\Delta_3 A_n.$$

Аналогично приходим к оценке $|\mathrm{I}_3| \leq \Delta_1\Delta_2\Delta_3 A_n$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Gamma_1[F_\xi^{(n)}u^n]$ в областях M_0, M_1 и M_2 мажорируется сходящимся числовым положительным рядом $3\Delta_1\Delta_2\Delta_3\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ и потому сходится там равномерно и абсолютно.

Из того, что

$$u^n = \left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} w \exp it_2(x_2) + \frac{b_1 - x_1}{b_1 - a_1} z \exp it_3(x_3)\right)^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\frac{n!(x_1 - a_1)^m (b_1 - x_1)^{n-m}\exp\{it(x_2, x_3)\}}{m!(n-m)!(b_1 - a_1)^n} w^m z^{n-m},$$

где $t(x_2, x_3) = nt_3(x_3) - m(t_3(x_3) - t_2(x_2))$, следует формула (4). $\square$

В теореме 7 установлено, что функции, представимые обобщенным интегралом типа Темлякова, в областях неаналитичности обладают свойством, близким свойству аналитических функций. Таким образом, разложение функций, представимых интегралом (1), в двойной степенной ряд можно отнести к так называемым (напр., [6]) квазианалитическим свойствам обобщенного интеграла типа Темлякова.

Литература

1. Темляков А.А. *Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных* // Ученые записки Московск. обл. пед. ин-та. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1954. – Т. 21. – С. 7–22.
2. Темляков А.А. *Интегральное представление функций двух комплексных переменных* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 21. – С. 89–92.
3. Айзенберг Л.А. *Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных* // Ученые записки Московск. обл. пед. ин-та. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1959. – Т. 77. – Вып. 5. – С. 13–35.
4. Боганов В.И. *О поведении интеграла типа Темлякова* 1 *рода вне области аналитичности* // Ученые записки Московск. обл. пед. ин-та. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1966. – Т. 166. – С. 61–80.
5. Милованов В.Ф. *Интегралы типа Темлякова–Баврина* 1 *рода* 1 *порядка в случае бицилиндра* // Респ. сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1978. – Вып. 9. – С. 65–75.
6. Нелаев А.В. *К теории квазианалитических функций* // Респ. сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1974. – Вып. 4. – С. 49–55.

Московский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 26.12.2003
окончательный вариант 25.07.2005