ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.929

Л.Ф. РАХМАТУЛЛИНА

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В [1] изучались условия $\mathcal{P}$-сходимости последовательности $\{x_k\}$ решений линейных краевых задач

$$\mathcal{L}_k x = f_k, \quad l_k x = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

к решению x_0 "предельной" задачи

$$\mathcal{L}_0 x = f_0, \quad l_0 x = \alpha_0.$$

Здесь $\mathcal{L}_k : D_k \to B_k$ — линейные ограниченные нётеровы операторы, $\operatorname{ind}\mathcal{L}_k = N$; $l_k : D_k \to R^N$ — линейные ограниченные вектор-функционалы; $\alpha_k \in R^N$; D_k, B_k — банаховы пространства, причем D_k изоморфно $B_k \times R^N$, $k = 0, 1, \dots$, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — связывающая система изоморфизмов пространств D_0 и D_k.

Ниже общие утверждения работы [1] реализуются для краевых задач в конкретных пространствах.

Являясь продолжением работы [1], предлагаемая статья использует обозначения и терминологию этой работы.

1. Уравнение n-го порядка

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a^0$, $\lim\limits_{k\to\infty} b^k = b^0$; $W^n[a^k, b^k]$ — пространство функций $x : [a^k, b^k] \to R^1$, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Это пространство изоморфно прямому произведению $L[a^k, b^k] \times R^n$, где $L[a^k, b^k]$ — пространство суммируемых функций $z : [a^k, b^k] \to R^1$, $\|z\|_{L[a^k,b^k]} = \int_{a^k}^{b^k} |z(t)|\, dt$. Изоморфизм $\mathcal{J} = \{\Lambda_k, Y_k\} : L[a^k, b^k] \times R^n \to W^n[a^k, b^k]$ можно установить на основе представления

$$x(t) = \int_{a^k}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x^{(n)}(s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a^k)^i}{i!} x^{(i)}(a^k) \tag{1}$$

элемента $x \in W^n[a^k, b^k]$. Таким образом,

$$(\Lambda_k z)(t) = \int_{a^k}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} z(s)\, ds, \quad Y_k\beta = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a^k)^i}{i!}\beta^i, \quad \beta = \operatorname{col}\{\beta^0, \dots, \beta^{n-1}\};$$

$\mathcal{J}^{-1} = [\delta_k, r_k]$, где $(\delta_k x)(t) = x^{(n)}(t)$, $r_k x = \operatorname{col}\{x(a^k), \dots, x^{(n-1)}(a^k)\}$. Для определенности будем использовать следующую норму в пространстве R^n: $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha^i|$, $\alpha = \operatorname{col}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$. Тогда

$$\|x\|_{W^n[a^k,b^k]} = \|x^{(n)}\|_{L[a^k,b^k]} + \sum_{i=0}^{n-1} |x^{(i)}(a^k)|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96195, 99-01-01278) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

Рассмотрим последовательность краевых задач

$$\mathcal{L}_k x = f_k, \quad l_k x = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

и “предельную” задачу

$$\mathcal{L}_0 x = f_0, \quad l_0 x = \alpha_0,$$

где $\mathcal{L}_k : W^n[a^k, b^k] \to L[a^k, b^k]$ — линейные ограниченные нётеровы операторы, $\operatorname{ind} \mathcal{L}_k = n$; $l_k : W^n[a^k, b^k] \to R^n$ — линейные ограниченные вектор-функционалы, $k = 0, 1, \dots$

Положим $D_k = W^n[a^k, b^k]$, $B_k = L[a^k, b^k]$, $k = 0, 1, \dots$, $c_k = \frac{b^0 - a^0}{b^k - a^k}$,

$$w_0(t) = t, \quad w_k(t) = c_k(t - a^k) + a^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция w_k отображает отрезок $[a^k, b^k]$ на $[a^0, b^0]$; $w_k^{-1}(t) = c_k^{-1}(t - a^0) + a^k$. Определим оператор $\mathcal{H}_k : B_0 \to B_k$ равенством

$$(\mathcal{H}_k z)(t) = z[w_k(t)]. \tag{3}$$

Имеем

$$\|\mathcal{H}_k z\|_{B_k} = \int_{a^k}^{b^k} |z[w_k(t)]| \, dt = c_k^{-1} \int_{a^0}^{b^0} |z(t)| \, dt.$$

Отсюда $\lim\limits_{k \to \infty} \|\mathcal{H}_k z\|_{B_k} = \|z\|_{B_0}$, $\|\mathcal{H}_k\| = c_k^{-1}$,

$$(\mathcal{H}_k^{-1} z)(t) = z[w_k^{-1}(t)], \quad \|\mathcal{H}_k^{-1}\| = c_k.$$

Таким образом, система изоморфизмов $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ является связывающей для пространств B_0 и B_k и удовлетворяет требованию a) теоремы 1 из [1]. Сходимость $z_k \xrightarrow{\mathcal{H}} z_0$ означает, что $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{a^k}^{b^k} |z_k(t) - z_0[w_k(t)]| \, dt = 0$.

Связывающую систему $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ для пространств D_0 и D_k определим, положив

$$(\mathcal{P}_k x)(t) = x[w_k(t)], \quad k = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Тогда $(\mathcal{P}_k^{-1} x)(t) = x[w_k^{-1}(t)]$. Имеем

$$\frac{d^i}{dt^i} x[w_k(t)] = c_k^i x^{(i)}[w_k(t)], \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $x^{(i)}[w_k(t)] = \dfrac{d^i}{ds^i} x(s)\Big|_{s = w_k(t)}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
(\delta_k x[w_k(\cdot)])(t) &= c_k^n x^{(n)}[w_k(t)], \\
\|\delta_k x[w_k(\cdot)]\|_{B_k} &= c_k^n \int_{a^k}^{b^k} |x^{(n)}[w_k(t)]| \, dt = c_k^{n-1} \|x^{(n)}\|_{B_0}, \\
r_k x[w_k(\cdot)] &= \operatorname{col}\{x(a^0), c_k \dot{x}(a^0), \dots, c_k^{n-1} x^{(n-1)}(a^0)\}, \\
\|\mathcal{P}_k x\|_{D_k} &= c_k^{n-1} \|x^{(n)}\|_{B_0} + \sum_{i=0}^{n-1} c_k^i |x^{(i)}(a^0)|.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathcal{P}_k x\|_{D_k} = \|x\|_{D_0},$$
$$\|\mathcal{P}_k x\|_{D_k} \le \|x\|_{D_0} \max\{1, c_k^{n-1}\},$$

и т. к. равенство достигается, то

$$\|\mathcal{P}_k\| = \max\{1, c_k^{n-1}\}.$$

Точно так же

$$\|\mathcal{P}_k^{-1}\| = \max\{1, c_k^{n-1}\}.$$

Итак, система $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является связывающей для D_0 и D_k и удовлетворяет требованию b) теоремы 1 из [1]. Сходимость $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u_0[w_k(\cdot)]\|_{D_k} = 0$) означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a^k}^{b^k} |u_k^{(n)}(t) - c_k^n u_0^{(n)}[w_k(t)]|\, dt = 0 \tag{5}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} |u_k^{(i)}(a^k) - c_k^i u_0^{(i)}(a^0)| = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Таким образом, для последовательности задач (2) справедлива теорема 1 из [1], если $\{\mathcal{L}_k\}$ и $\{l_k\}$ удовлетворяют условию c) этой теоремы. При этом уравнение $\mathcal{H}_k^{-1}\mathcal{L}_k\mathcal{P}_k x = f$ в задаче (7) [1] имеет вид

$$(\mathcal{L}_k[x(w_k(\cdot))])(w_k^{-1}(t)) = f(t). \tag{7}$$

Замечание 1. Система операторов $\{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, определенных равенствами (3) и (4), удовлетворяет требованию (9) [1], т. к. предельные соотношения (5) и (6) эквивалентны тому, что

$$u_k^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{H}} u_0^{(n)} \ \text{ и } \ r_k u_k \longrightarrow r_0 u_0.$$

Пусть оператор $\mathcal{L}_k$ имеет вид

$$(\mathcal{L}_k x)(t) = x^{(n)}(t) + (T_k x)(t), \tag{8}$$

где $T_k : D_k \to B_k$ — вполне непрерывный оператор. Такой вид оператор $\mathcal{L}_k$ имеет для разрешенных относительно старшей производной обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с отклоняющимся аргументом, интегродифференциальных уравнений. Оператор $\dfrac{d^n}{dt^n} : D_k \to B_k$ n-кратного дифференцирования — непрерывный нётеров оператор, $\operatorname{ind} \dfrac{d^n}{dt^n} = n$. Поэтому оператор $\mathcal{L}_k : D_k \to B_k$, определенный равенством (8), нётеров, $\operatorname{ind} \mathcal{L}_k = n$ ([2], сс. 45, 60).

Как было отмечено выше, из сходимости $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$ следует $u_k^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{H}} u_0^{(n)}$. Поэтому сходимость $\mathcal{L}_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} \mathcal{L}_0$ обеспечивается сходимостью $T_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} T_0$.

Так как

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathcal{P}_k x)(t) = c_k^n x^{(n)}[w_k(t)],$$

то уравнение (7) в этом случае имеет вид

$$c_k^n x^{(n)}(t) + (T_k[x(w_k(\cdot))])(w_k^{-1}(t)) = f(t).$$

Пример. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) + p_k(t)x[h_k(t)] = f_k(t), \quad t \in [a^k, b^k], \\ x(\xi) = 0, \ \text{ если } \ \xi \notin [a^k, b^k], \\ l_k^1 x = \alpha^1, \ldots, l_k^n x = \alpha_k^n, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{9}$$

где p_k, $f_k \in B_k = L[a^k, b^k]$, функция $h_k : [a^k, b^k] \to R^1$ измерима, l_k^i, $i = 1, \ldots, n$, — линейные ограниченные функционалы на пространстве $D_k = W^n[a^k, b^k]$.

Пусть $\nu(t)$ — определенная на отрезке $[a, b]$ вещественная функция. Для функции $x : [a, b] \to R^1$ определим операцию S_ν равенством

$$(S_\nu x)(t) = \begin{cases} x[\nu(t)], & \text{если } \nu(t) \in [a, b]; \\ 0, & \text{если } \nu(t) \notin [a, b]. \end{cases}$$

Используя это обозначение и полагая $l_k = [l_k^1, \dots, l_k^n]$, $\alpha_k = \{\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^n\}$, запишем задачу (9) в виде

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{L}_k x)(t) \overset{\text{def}}{=} x^{(n)}(t) + p_k(t)(S_{h_k}x)(t) = f_k(t), \\
l_k x = \alpha_k.
\end{gathered} \tag{9$'$}
$$

Полная непрерывность оператора $T_k : D_k \to B_k$, определенного равенством

$$(T_k x)(t) = p_k(t)(S_{h_k}x)(t),$$

показана в ([3], с. 17–28).

Найдем представление оператора $\mathcal{H}_k^{-1} T_k \mathcal{P}_k : D_0 \to B_0$. Пусть $x \in D_0$. Имеем

$$(S_{h_k}\mathcal{P}_k x)(t) = (S_{h_k}x[w_k(\cdot)])(t) = \begin{cases} x[w_k(h_k(t))], & \text{если } h_k(t) \in [a^k, b^k]; \\ 0, & \text{если } h_k(t) \notin [a^k, b^k]. \end{cases}$$

Так как условие $h_k(t) \in [a^k, b^k]$ эквивалентно $w_k(h_k(t)) \in [a^0, b^0]$, то

$$(S_{h_k}\mathcal{P}_k x)(t) = \begin{cases} x[w_k(h_k(t))], & \text{если } w_k(h_k(t)) \in [a^0, b^0]; \\ 0, & \text{если } w_k(h_k(t)) \notin [a^0, b^0]. \end{cases}$$

Далее,

$$(\mathcal{H}_k^{-1} S_{h_k}\mathcal{P}_k x)(t) = \begin{cases} x[w_k(h_k(w_k^{-1}(t)))], & \text{если } w_k(h_k(w_k^{-1}(t))) \in [a^0, b^0]; \\ 0, & \text{если } w_k(h_k(w_k^{-1}(t))) \notin [a^0, b^0]. \end{cases}$$

Таким образом,

$$(\mathcal{H}_k^{-1} S_{h_k}\mathcal{P}_k\, x)(t) = (S_{g_k}x)(t),$$

где функция $g_k : [a^0, b^0] \to R^1$ определяется равенством

$$g_k(t) = w_k[h_k(w_k^{-1}(t))],$$

и, следовательно,

$$(\mathcal{H}_k^{-1} T_k \mathcal{P}_k x)(t) = (T_k[x(w_k(\cdot))])(w_k^{-1}(t)) = p_k[w_k^{-1}(t)](S_{g_k}x)(t).$$

Теорема 1 из [1] применительно к задаче (9$'$) получает следующую формулировку.

Теорема 1-*bis*. *Пусть операторы $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\mathcal{H}_k$, $k = 1, 2, \dots$, определены равенствами (4) и (3) соответственно. Пусть, далее, $T_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} T_0$ и $l_k u_k \longrightarrow l_0 u_0$, если $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$, и задача (9$'$) при $k = 0$ имеет единственное решение $x_0 \in D_0$. Для того чтобы задачи (9$'$) были однозначно разрешимы для всех достаточно больших k и для любых сходящихся последовательностей $f_k \xrightarrow{\mathcal{H}} f_0$ и $\alpha_k \longrightarrow \alpha_0$ для решений $x_k \in D_k$ этих задач имела место сходимость $x_k \xrightarrow{\mathcal{P}} x_0$, необходимо и достаточно существования такого ограниченного вектор-функционала $l : D_0 \to R^n$, что краевые задачи*

$$
\begin{gathered}
c_k^n x^{(n)}(t) + p_k[w_k^{-1}(t)](S_{g_k}x)(t) = f(t), \quad t \in [a^0, b^0], \\
lx = \alpha, \quad k = 0, 1, \dots,
\end{gathered} \tag{10}
$$

однозначно разрешимы при $k = 0$ и всех достаточно больших k, и при любых $f \in B_0$, $\alpha \in R^n$ для решений $v_k \in D_0$ задач (10) имеет место сходимость $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k - v_0\|_{D_0} = 0$.

Замечание 2. В приведенном примере было рассмотрено уравнение с отклоняющимся аргументом простейшего вида с целью избежать громоздкости в преобразованиях. Та же схема сохранится и в случае оператора $\mathcal{L}_k : W^n[a^k, b^k] \to L[a^k, b^k]$ более общего вида. Например, если

$$(\mathcal{L}_k x)(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_k^i(t)(S_{h_k^i}\, x^{(i)})(t),$$

то уравнение (7) будет иметь вид

$$c_k^n x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_k^i [w_k^{-1}(t)](S_{g_k^i}\, x^{(i)})(t) = f(t),$$

где $g_k^i(t) = w_k[h_k^i(w_k^{-1}(t))], \quad i = 0, \dots, n-1$.

2. Условия сходимости $T_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} T_0$

Обозначим $\Omega_k = \{t \in [a^k, b^k] : h_k(t) \in [a^k, b^k]\}$; $w_k(\Omega_k)$ — образ множества Ω_k при отображении w_k: $w_k(\Omega_k) = \{t \in [a^0, b^0] : h_k(w_k^{-1}(t)) \in [a^k, b^k]\}$; e_k — симметрическая разность множеств Ω_0 и $w_k(\Omega_k)$: $e_k = [\Omega_0 \setminus w_k(\Omega_k)] \cup [w_k(\Omega_k) \setminus \Omega_0]$. Таким образом, если $t \in e_k$, то либо $h_0(t) \in [a^0, b^0]$, $h_k(w_k^{-1}(t)) \notin [a^0, b^0]$, либо $h_0(t) \notin [a^0, b^0]$, $h_k(w_k^{-1}(t)) \in [a^0, b^0]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия*

a) $p_k \xrightarrow{\mathcal{H}} p_0$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes} e_k = 0$;

c) *для любых $\delta > 0$ и $\sigma > 0$ найдется такое k_0, что при $k > k_0$*

$$\operatorname{mes}\{t \in \Omega_0 \cup w_k(\Omega_k) : |w_k[h_k(w_k^{-1}(t))] - h_0(t)| \ge \delta\} < \sigma. \tag{11}$$

Тогда $T_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} T_0$.

Замечание 3. Условие c) (см. [1]) в случае, когда все пространства D_k совпадают с D_0 и $h_k(t) \in [a^0, b^0]$ для $t \in [a^0, b^0]$, $k = 0, 1, \dots$, означает сходимость по мере последовательности $\{h_k(t)\}$ к $h_0(t)$ на $[a^0, b^0]$.

Доказательство. Из представления (1) элемента x пространства D_k получим оценку

$$\max_{t\in[a^k,b^k]} |x(t)| \le \mathcal{M}\|x\|_{D_k},$$

где $\mathcal{M} = \max\left\{\frac{(b^k-a^k)^i}{i!},\ i = 0, \dots, n-1;\ k = 0, 1, \dots\right\}$. Если $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$, то

$$\sup_k \|u_k\|_{D_k} = \mathcal{M}_1 < \infty$$

и, следовательно,

$$\max_{t\in[a^k,b^k]} |u_k(t)| \le \mathcal{M}\mathcal{M}_1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Пусть $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$. Имеем

$$(S_{h_k} u_k)(t) = \begin{cases} u_k[h_k(t)], & \text{если } t \in \Omega_k; \\ 0, & \text{если } t \in [a^k, b^k] \setminus \Omega_k, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_k T_0 u_0)(t) = p_0[w_k(t)](S_{h_0} u_0)(w_k(t)).$$

Далее,

$$\|T_k u_k - \mathcal{H}_k T_0 u_0\|_{B_k} = \int_{a^k}^{b^k} |p_k(t)(S_{h_k} u_k)(t) - p_0[w_k(t)](S_{h_0} u_0)(w_k(t))|\, dt \le$$

$$\le \int_{a^k}^{b^k} |p_k(t) - p_0[w_k(t)]|\, |(S_{h_k} u_k)(t)|\, dt + \int_{a^k}^{b^k} |p_0[w_k(t)]|\, |(S_{h_k} u_k)(t) - (S_{h_0} u_0)(w_k(t))|\, dt.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства оценивается величиной

$$\mathcal{M}\mathcal{M}_1 \int_{a^k}^{b^k} |p_k(t) - p_0[w_k(t)]|\, dt,$$

следовательно, стремится к нулю при $k \to \infty$ в силу условия a).

Второе слагаемое равно

$$c_k^{-1}\int_{a^0}^{b^0}|p_0(s)||(S_{h_k}u_k)(w_k^{-1}(s))-(S_{h_0}u_0)(s)|\,ds \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_k^{-1}\mathcal{I}_{[a^0,b^0]}.$$

Интеграл $\mathcal{I}_{[a^0,b^0]}$ разобьем на два слагаемых

$$\mathcal{I}_{[a^0,b^0]}=\mathcal{I}_{\Omega_0\cap w_k(\Omega_k)}+\mathcal{I}_{e_k}.$$

Если $t\in e_k$, то либо $(S_{h_k}u_k)(w_k^{-1}(t))=u_k[h_k(w_k^{-1}(t))]$, $(S_{h_0}u_0)(t)=0$, либо $(S_{h_k}u_k)(w_k^{-1}(t))=0$, $(S_{h_0}u_0)(t)=u_0[h_0(t)]$. Поэтому имеем оценку

$$\mathcal{I}_{e_k}\le \mathcal{M}\mathcal{M}_1\int_{e_k}|p_0(s)|\,ds,$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{I}_{e_k}=0$ в силу условия b). Далее,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Omega_0\cap w_k(\Omega_k)}\le \int_{\Omega_0\cap w_k(\Omega_k)}|p_0(s)|\,\big|u_k[h_k(w_k^{-1}(s))]-u_0[w_k(h_k(w_k^{-1}(s)))]\big|\,ds+\\ +\int_{\Omega_0\cap w_k(\Omega_k)}|p_0(s)|\,\big|u_0[w_k(h_k(w_k^{-1}(s)))]-u_0[h_0(s)]\big|\,ds\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathcal{I}_{1k}+\mathcal{I}_{2k},\\ \mathcal{I}_{1k}\le \mathcal{M}\|u_k-u_0(w_k)\|_{D_k}\int_{a^0}^{b^0}|p_0(s)|\,ds,\end{aligned}$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{I}_{1k}=0$.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Найдем $\delta>0$ и $\sigma>0$ так, чтобы

$$|u_0(t_1)-u_0(t_2)|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad |t_1-t_2|<\delta,\quad t_1,t_2\in[a^0,b^0],$$

и $\displaystyle\int_e|p_0(s)|\,ds<\varepsilon$, если $\operatorname{mes}e<\sigma$. Выберем k_0 так, чтобы при $k>k_0$ выполнялось неравенство (11). Обозначим

$$\begin{aligned}&E_{1k}=\{s\in\Omega_0\cap w_k(\Omega_k):|w_k[h_k(w_k^{-1}(s))]-h_0(s)|\ge\delta\},\\ &E_{2k}=(\Omega_0\cap w_k(\Omega_k))\setminus E_{1k}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{2k}=\int_{E_{1k}}|p_0(s)|\,\big|u_0[w_k(h_k(w_k^{-1}(s)))]-u_0[h_0(s)]\big|\,ds+\\ +\int_{E_{2k}}|p_0(s)|\,\big|u_0[w_k(h_k(w_k^{-1}(s)))]-u_0[h_0(s)]\big|\,ds\le\\ \le 2\mathcal{M}\mathcal{M}_1\int_{E_{1k}}|p_0(s)|\,ds+\varepsilon\int_{a^0}^{b^0}|p_0(s)|\,ds<\varepsilon(2\mathcal{M}\mathcal{M}_1+\|p_0\|_{B_0})\end{aligned}$$

для $k>k_0$. Итак, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{I}_{2k}=0$. $\square$

Теорема для случая, когда все пространства D_k совпадают с D_0, была сформулирована в [4].

3. Уравнение n-го порядка с импульсными воздействиями

Обозначим через $WS^n[a, t_1, \dots, t_m, b]$ пространство функций $x : [a, b] \to R^1$, представимых в виде

$$x(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} z(s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} \beta_i + \sum_{j=1}^{m} \chi_{[t_j, b]}(t) \frac{(t-t_j)^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_j,$$

где $z \in L[a, b]$; $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — постоянные; $\chi_{[t_j, b]}$ — характеристическая функция отрезка $[t_j, b]$, $a < t_1 < \dots < t_m < b$. Таким образом, элементами пространства $WS^n[a, t_1, \dots, t_m, b]$ являются функции, имеющие на $[a, b]$ абсолютно непрерывные производные до $(n-2)$-го порядка включительно (если $n \geq 2$) и производную $(n-1)$-го порядка, абсолютно непрерывную на каждом из промежутков $[a, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_m, b]$.

Пространство $WS^n[a, t_1, \dots, t_m, b]$ изоморфно прямому произведению $L[a, b] \times R^{n+m}$. Изоморфизм $\{\Lambda, Y\}$ определяется равенствами

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} z(s)\, ds,$$
$$(Y\beta)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} \beta_i + \sum_{j=1}^{m} \chi_{[t_j, b]}(t) \frac{(t-t_j)^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_j,$$
$$\beta = \operatorname{col}\{\beta_0, \dots, \beta_{n-1},\ \gamma_1, \dots, \gamma_m\};$$

$\{\Lambda, Y\}^{-1} = [\delta, r]$, где

$$(\delta x)(t) = x^{(n)}(t), \quad rx = \operatorname{col}\{x(a), \dots, x^{(n-1)}(a), \Delta x^{(n-1)}(t_1), \dots, \Delta x^{(n-1)}(t_m)\},$$

$\Delta x^{(n-1)}(t_i) = x^{(n-1)}(t_i) - x^{(n-1)}(t_i - 0)$;

$$\|x\|_{WS^n[a, t_1, \dots, t_m, b]} = \|x^{(n)}\|_{L[a, b]} + |rx|.$$

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a^0$, $\lim\limits_{k\to\infty} b^k = b^0$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_i^k = t_i^0$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим

$$B_k = L[a^k, b^k], \quad D_k = WS^n[a^k, t_1^k, \dots, t_m^k, b^k], \quad k = 0, 1, \dots$$

Пространство D_k изоморфно $B_k \times R^{n+m}$. Изоморфизмы

$$\{\Lambda_k, Y_k\} : B_k \times R^{n+m} \to D_k \ \text{ и } \ [\delta_k, r_k] = \{\Lambda_k, Y_k\}^{-1} : D_k \to B_k \times R^{n+m}$$

определяются равенствами

$$(\Lambda_k z)(t) = \int_{a^k}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} z(s)\, ds,$$
$$(Y_k\beta)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a^k)^i}{i!} \beta_i + \sum_{j=1}^{m} \chi_{[t_j^k, b^k]}(t) \frac{(t-t_j^k)^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_j,$$
$$(\delta_k x)(t) = x^{(n)}(t),$$
$$r_k x = \operatorname{col}\{x(a^k), \dots, x^{(n-1)}(a^k), \Delta x^{(n-1)}(t_1^k), \dots, \Delta x^{(n-1)}(t_m^k)\}.$$

Конечномерный оператор $Y_k : R^{n+m} \to D_k$ определяется вектором

$$Y_k(t) = \left\{1,\ \frac{t-a^k}{1!}, \dots, \frac{(t-a^k)^{n-1}}{(n-1)!},\ \chi_{[t_1^k, b^k]}(t) \frac{(t-t_1^k)^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, \chi_{[t_m^k, b^k]}(t) \frac{(t-t_m^k)^{n-1}}{(n-1)!}\right\}.$$

Таким образом, элемент $x \in D_k$, $k = 0, 1, \dots$, имеет представление

$$x(t) = (\Lambda_k x^{(n)})(t) + Y_k(t) r_k x = \int_{a^k}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x^{(n)}(s)\, ds + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a^k)^i}{i!} x^{(i)}(a^k) + \sum_{j=1}^{m} \chi_{[t_j^k, b^k]}(t) \frac{(t-t_j^k)^{n-1}}{(n-1)!} \Delta x^{(n-1)}(t_j^k); \quad (12)$$

$\|x\|_{D_k} = \|\delta_k x\|_{B_k} + |r_k x|$.

Положим $w_0(t) = t$,

$$w_k(t) = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{t_{i+1}^0 - t_i^0}{t_{i+1}^k - t_i^k} (t - t_i^k) + t_i^0 \right] \chi_{[t_i^k, t_{i+1}^k]}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

(здесь $t_0^k = a^k$, $t_{m+1}^k = b^k$). Функция w_k отображает отрезок $[a^k, b^k]$ на $[a^0, b^0]$ так, что $w_k(t_i^k) = t_i^0$, $i = 0, \dots, m+1$.

Функции $w_k(t)$, определяемые равенством (13), были использованы А.В. Анохиным при изучении последовательности краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений первого порядка с импульсными воздействиями. Соответствующий результат опубликован без доказательства в ([3], теорема 6.3.2).

Определим оператор $\mathcal{H}_k : B_0 \to B_k$, $k = 0, 1, \dots$, равенством

$$(\mathcal{H}_k z)(t) = z[w_k(t)]. \quad (14)$$

Тогда $(\mathcal{H}_k^{-1} z)(t) = z[w_k^{-1}(t)]$,

$$w_k^{-1}(t) = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{t_{i+1}^k - t_i^k}{t_{i+1}^0 - t_i^0} (t - t_i^0) + t_i^k \right] \chi_{[t_i^0, t_{i+1}^0]}(t).$$

Для $z \in D_0$ имеем

$$\|\mathcal{H}_k z\|_{B_k} = \int_{a^k}^{b^k} |z[w_k(t)]|\, dt = \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |z[w_k(t)]|\, dt = \sum_{i=0}^{m} \frac{t_{i+1}^k - t_i^k}{t_{i+1}^0 - t_i^0} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} |z(\tau)|\, d\tau.$$

Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathcal{H}_k z\|_{B_k} = \|z\|_{B_0}$, $\|\mathcal{H}_k z\|_{B_k} \le \max\limits_i \dfrac{t_{i+1}^k - t_i^k}{t_{i+1}^0 - t_i^0} \|z\|_{B_0}$. Так как равенство достигается, то

$$\|\mathcal{H}_k\| = \max_i \frac{t_{i+1}^k - t_i^k}{t_{i+1}^0 - t_i^0}.$$

Аналогично

$$\|\mathcal{H}_k^{-1}\| = \max_i \frac{t_{i+1}^0 - t_i^0}{t_{i+1}^k - t_i^k}.$$

Итак, система изоморфизмов $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является связывающей для B_0 и B_k, причем $\sup\limits_k \|\mathcal{H}_k^{-1}\| < \infty$. Сходимость $z_k \xrightarrow{\mathcal{H}} z_0$ означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a^k}^{b^k} |z_k(t) - z_0[w_k(t)]|\, dt = 0.$$

Связывающую систему $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ изоморфизмов для пространств D_0 и D_k построим так, как это было сделано в § 4 из [1]. А именно, положим

$$\mathcal{P}_k = \Lambda_k \mathcal{H}_k \delta_0 + Y_k r_0. \quad (15)$$

Таким образом,

$$(\mathcal{P}_k x)(t) = \int_{a^k}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x^{(n)}[w_k(s)]\,ds + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a^k)^i}{i!} x^{(i)}(a^0) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \frac{(t-t_j^k)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[t_j^k, b^k]}(t) \Delta x^{(n-1)}(t_j^0), \quad x \in D_0. \quad (16)$$

Для $u_k \in D_k$, $k = 0, 1, \ldots$, имеем

$$\|u_k - \mathcal{P}_k u_0\|_{D_k} = \int_{a^k}^{b^k} |u_k^{(n)}(s) - u_0^{(n)}[w_k(s)]|\,ds + \sum_{i=0}^{n-1} |u_k^{(i)}(a^k) - u_0^{(i)}(a^0)| + \sum_{j=1}^{m} |\Delta u_k^{(n-1)}(t_j^k) - \Delta u_0^{(n-1)}(t_j^0)|.$$

Поэтому сходимость $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$ означает, что $u_k^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{H}} u_0^{(n)}$ и $r_k u_k \to r_0 u_0$.

Пусть $\mathcal{L}_k : D_k \to B_k$ — линейный ограниченный нётеров оператор, $\operatorname{ind} \mathcal{L}_k = n+m$. Применяя $\mathcal{L}_k$ к обеим частям равенства (16), получим $(\mathcal{L}_k \mathcal{P}_k x)(t) = (Q_k x^{(n)}[w_k(\cdot)])(t) + A_k(t) r_0 x$, где $Q_k = \mathcal{L}_k \Lambda_k$ — "главная часть" оператора $\mathcal{L}_k$ ([3], с. 103), $A_k(t) = \{A_0^k(t), \ldots, A_{n-1}^k(t), B_1^k(t), \ldots, B_m^k(t)\} = (\mathcal{L}_k Y_k(\cdot))(t)$.

Связывающие системы изоморфизмов пространств B_0, B_k и D_0, D_k, определенные равенствами (14) и (15) соответственно, удовлетворяют требованиям теоремы 1. Поэтому для краевых задач

$$\mathcal{L}_k x = f_k, \quad l_k x = \alpha_k \in R^{n+m}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

в предположении, что $\mathcal{L}_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} \mathcal{L}_0$ и $l_k u_k \to l_0 u_0$, если $u_k \xrightarrow{\mathcal{P}} u_0$, справедлива теорема 1. При этом уравнение $\mathcal{H}^{-1} \mathcal{L}_k \mathcal{P}_k x = f$ в задаче (7) из [1] имеет вид

$$(Q_k x^{(n)}[w_k(\cdot)])(w_k^{-1}(t)) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i^k(w_k^{-1}(t)) x^{(i)}(a^0) + \sum_{j=1}^{m} B_j^k(w_k^{-1}(t)) \Delta x^{(n-1)}(t_j^0) = f(t).$$

Применяя оператор $\mathcal{L}_k$ к обеим частям равенства (12), получим $(\mathcal{L}_k x)(t) = (Q_k x^{(n)})(t) + A_k(t) r_k x$. Из равенства $\mathcal{L}_k u_k - \mathcal{H}_k \mathcal{L}_0 u_0 = Q_k u_k^{(n)} - \mathcal{H}_k Q_0 u_0^{(n)} + A_k r_k u_k - \mathcal{H}_k A_0 r_0 u_0$ и оценки $\|\mathcal{L}_k u_k - \mathcal{H}_k \mathcal{L}_0 u_0\|_{B_k} \le \|Q_k u_k^{(n)} - \mathcal{H}_k Q_0 u_0^{(n)}\|_{B_k} + \|\,|A_k - \mathcal{H}_k A_0|\,\|_{B_k} |r_k u_k| + \|\,|\mathcal{H}_k A_0|\,\|_{B_k} |r_k u_k - r_0 u_0|$ следует, что сходимость $\mathcal{L}_k \xrightarrow{\mathcal{PH}} \mathcal{L}_0$ эквивалентна тому, что $Q_k \xrightarrow{\mathcal{HH}} Q_0$ и $A_i^k \xrightarrow{\mathcal{H}} A_i^0$, $i = 0, \ldots, n-1$, $B_j^k \xrightarrow{\mathcal{H}} B_j^0$, $j = 1, \ldots, m$.

Замечание 4. В случае уравнения первого порядка ($n = 1$) можно связывающую систему для D_0 и D_k определить равенством $(\mathcal{P}_k x)(t) = x[w_k(t)]$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда уравнение $\mathcal{H}_k^{-1} \mathcal{L}_k \mathcal{P}_k x = f$ будет иметь такой же вид, как (7), причем w_k определено равенством (13).

Литература

1. Анохин А.В., Рахматуллина Л.Ф. *Непрерывная зависимость от параметров решения линейной краевой задачи.* I // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 29–38.
2. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1971. – 104 с.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
4. Рахматуллина Л.Ф. *О последовательности краевых задач для линейных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Краев. задачи. – Пермь, 1982. – С. 18–22.

Пермский государственный технический университет

Поступила 30.04.1999