И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.929

Е.С. ЖУКОВСКИЙ

ФУНКЦИЯ КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть R^m — конечномерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$; $L_p([a,b],R^m)$ — пространство суммируемых в p-й ($1 \le p < \infty$) степени функций $y:[a,b]\to R^m$, $\|y\|_{L_p} = \Big(\int\limits_a^b |y(s)|^p ds\Big)^{1/p}$; $L_\infty([a,b],R^m)$ — пространство измеримых ограниченных в существенном функций $y:[a,b]\to R^m$, $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in[a,b]} |y(t)|$; $AC_p([a,b],R^m)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^m$, $1\le p\le\infty$, производная которых $x'\in L_p([a,b],R^m)$, $\|x\|_{AC_p} = \|x'\|_{L_p} + |x(a)|$. В перечисленных обозначениях будем опускать индексы $m=1$, $p=1$. Кроме того, в обозначениях функциональных пространств не будем писать, где определены и в каких множествах имеют значения функции — элементы пространств, если это не вызовет недоразумений.

Многочисленные классы уравнений относительно неизвестной дифференцируемой функции одной переменной $x(\cdot)$ можно представить в виде уравнения $Fx = 0$ с оператором $F: AC_p([a,b],R^m)\to L_p([a,b],R^m)$. Это уравнение, названное функционально-дифференциальным, исследовано в работах участников Пермского семинара профессора Н.В. Азбелева [1]. В восьмидесятых годах на семинаре возникла идея исследования абстрактного аналога функционально-дифференциального уравнения с операторами, действующими в произвольных банаховых пространствах. За прошедшие годы была разработана теория таких уравнений и найдены конкретные содержательные реализации общих утверждений [1]–[4]. Теория объединила "классических" представителей функционально-дифференциальных уравнений с менее изученными сингулярными уравнениями, импульсными системами, гибридными системами и т. д.

Здесь предлагаются элементы теории линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения с вольтерровыми операторами. Несмотря на достаточную общность, рассматриваемое уравнение сохраняет специфику уравнений с последействием и является их естественным обобщением. Важнейшим инструментом исследования линейного абстрактного уравнения, как и "обычных" функционально-дифференциальных уравнений, считаем функцию Коши, определению, свойствам и приближенному нахождению которой посвящена эта работа.

1. Краевая задача. Функция Грина

Пусть D, B — банаховы пространства, причем D изоморфно и изометрично прямому произведению $B\times R^n$. Система уравнений

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}: D\to B$, $l: D\to R^n$ — линейные ограниченные операторы, называется *краевой задачей* [3], [4]. Предполагается, что оператор $\mathcal{L}$ нетеров, $\operatorname{ind}\mathcal{L} = n$. Если задача (1) имеет единственное решение при каждой паре $(f,\alpha)\in B\times R^n$, то это решение представимо [3] в виде $x = Gf + X\alpha$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00140), Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU) (проект № PRO 06/2002).

Конечномерный оператор $X : R^n \to D$ определяется фундаментальной системой решений X однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Линейный ограниченный оператор $G : B \to D$ называют *оператором Грина.* В "классическом" случае, когда $B = L_p$ — пространство суммируемых функций, $D = AC_p$ — пространство абсолютно непрерывных функций, оператор Грина является интегральным, т. е. записывается в виде $(Gf)(t) = \int\limits_a^b G(t,s)f(s)ds$. Ядро $G(t,s)$, называемое матрицей или функцией Грина, играет заметную роль в теории функционально-дифференциальных уравнений. Оказывается, и в случае произвольных функциональных банаховых пространств D, B можно предложить аналог функции Грина.

Итак, в дальнейшем рассматриваются банаховы пространства D, B функций $y : [a,b] \to R^m$, для которых имеет место изоморфизм $D \cong B \times R^n$. Предполагается, что для любой последовательности $\{y_i\} \subset D$ из $\|y_i\|_D \to 0$ при $i \to \infty$ следует $|y_i(t)| \to 0$ для всех $t \in [a,b]$. Тогда при каждом фиксированном $t \in [a,b]$ вследствие ограниченности оператора Грина $G : B \to D$ линейный вектор-функционал $f \mapsto (Gf)(t)$, определенный на B, непрерывен. Обозначим этот вектор-функционал через $g(t)$, а его значение $g(t)f = (Gf)(t)$ на элементе $f \in B$ — символом $\langle g(t), f\rangle$. Компоненты m-мерного вектора $g(t)$ являются элементами сопряженного пространства B^*. Построенное таким образом отображение $g : [a,b] \to B^{*m}$ будем называть *функцией* (*матрицей*) *Грина.*

Приведенное определение позволяет сохранить многие "привычные" свойства матрицы Грина абстрактного уравнения. Приведем некоторые утверждения, основанные на результатах [1].

Теорема 1. *Функции Грина g и g_1 двух краевых задач для уравнения $\mathcal{L}x = f$ с вектор-функционалами l и l_1 связаны соотношением $g(t) = g_1(t) - X(t)(lX)^{-1}V$, где X — фундаментальная матрица решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$, вектор-функционал $V : B \to R^n$ определяется равенством $Vf = lg_1(\cdot)f$.*

Доказательство утверждения следует из формулы ([1], с. 105) $G = G_1 - X(lX)^{-1}lG_1$, связывающей операторы Грина этих краевых задач.

Пусть изоморфизм $D \cong B \times R^n$ задан операторами

$$\begin{pmatrix}\delta\\ r\end{pmatrix} : D \to B \times R^n, \quad (\Lambda, Y) = \begin{pmatrix}\delta\\ r\end{pmatrix}^{-1} : B \times R^n \to D. \tag{2}$$

Тогда краевую задачу (1) можно записать [3] в виде

$$\mathcal{L}x \equiv Q\delta x + Arx = f, \quad lx \equiv \Phi\delta x + \Psi rx = \alpha, \tag{3}$$

где $Q = \mathcal{L}\Lambda : B \to B$, $A = \mathcal{L}Y : R^n \to B$, $\Phi = l\Lambda : B \to R^n$, $\Psi = lY : R^n \to R^n$. Согласно ([1], с. 104) *главная краевая задача*

$$\mathcal{L}x \equiv Q\delta x + Arx = f, \quad rx = \alpha, \tag{4}$$

однозначно разрешима тогда и только тогда, когда оператор Q имеет ограниченный обратный, решение задачи (4) имеет представление $x = \Lambda Q^{-1}f + (Y - \Lambda Q^{-1}A)\alpha$. Пусть функционал $\lambda(t) : B \to R^m$ определен равенством $\langle\lambda(t), f\rangle = (\Lambda f)(t)$. Тогда функция Грина $c : [a,b] \to B^{*m}$ задачи (4) находится по формуле $c(t) = \lambda(t)Q^{-1}$. Теперь на основании теоремы 1 получаем представление функции Грина задачи (3)

$$g(t) = \lambda(t)Q^{-1} - X(t)(lX)^{-1}l\Lambda Q^{-1}. \tag{5}$$

При выводе формулы (5) использовалась вспомогательная краевая задача (4), отличавшаяся от исходной задачи (3) краевым условием. Для решения многих вопросов удобно в качестве вспомогательной выбрать краевую задачу для другого уравнения, но с таким же функционалом, что и исходная. Такая краевая задача используется, например, в известной "W-подстановке" Н.В. Азбелева. Элементарный оператор Грина, который эффективно строится по краевым условиям, предложен в [1]. Для построения функции Грина этого оператора выберем вектор $U \in D^n$, удовлетворяющий условию $\det rU \neq 0$, $lU = E$. Согласно ([1], сс. 52, 106) для любого вектор-функционала l с линейно независимыми компонентами такой вектор существует.

Теорема 2. *Для каждой пары* $(f, \alpha) \in B \times R^n$ *краевая задача*

$$\mathcal{L}_l x \equiv \delta x - \delta U (rU)^{-1} rx = f, \quad lx = \alpha, \tag{6}$$

однозначно разрешима, ее функция Грина определяется формулой

$$w_l(t) = \lambda(t) - U(t)\Phi.$$

Доказательство. Согласно ([1], с. 106) краевая задача (6) однозначно разрешима, оператор Грина определяется равенством $W_l = \Lambda - U\Phi$. Таким образом, $\langle w_l(t), f\rangle = (W_l f)(t) = (\Lambda f)(t) - (U\Phi f)(t) = \langle \lambda(t), f\rangle - U(t)\langle \Phi, f\rangle = \langle \lambda(t) - U(t)\Phi, f\rangle$. $\square$

При исследовании задач управления "классическими" функционально-дифференциальными уравнениями широко используется уравнение для функции Грина по второму аргументу [5]. Завершая краткое описание свойств функции Грина "абстрактной" краевой задачи (1), приведем аналог такого уравнения.

Теорема 3. *При каждом* $t \in [a, b]$ *пара* $(g(t), X(t))$ *является решением системы*

$$Q^* g(t) + X(t)\Phi = \lambda(t), \tag{7}$$

$$g(t)A + X(t)\Psi = Y(t). \tag{8}$$

Здесь $Q^* : B^* \to B^*$ *— оператор, сопряженный к оператору* Q.

Доказательство во многом повторяет вывод соответствующего свойства классической функции Грина [1] и так же основано на "W-подстановке" $x = W_l z$, приводящей задачу (3) к уравнению $\mathcal{L} W_l z = f$. Подставляя $W_l = \Lambda - U\Phi$, получаем $(\mathcal{L}\Lambda - \mathcal{L}U\Phi)z = f$. Далее, $x = Gf = G(Q - \mathcal{L}U\Phi)z = W_l z$, т. е. $GQ - G\mathcal{L}U\Phi = \Lambda - U\Phi$. Так как $U - G\mathcal{L}U = X$, то $GQ + X\Phi = \Lambda$. Отсюда на основании определения функции Грина имеем $\langle Q^* g(t), z\rangle + \langle X(t)\Phi, z\rangle = \langle \lambda(t), z\rangle$. Таким образом, функция Грина действительно удовлетворяет уравнению (7).

Теперь заметим, что $Z = Y - X\Psi$ является решением задачи $\mathcal{L}Z = A, lz = 0$. Отсюда $Z = GA$ и получаем формулу (8). $\square$

2. Начальная задача. Функция Коши

Рассмотрим более подробно главную краевую задачу (4). Ее граничное условие определяется изоморфизмом (2) пространств D и $B \times R^n$. В теориях обыкновенного дифференциального уравнения, уравнения с сосредоточенным и распределенным запаздыванием, других уравнений с последействием обычно используется изоморфизм, определяемый вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором $\delta x = \dot{x}$ и функционалом $rx = x(a)$. В этом случае главной является задача Коши, наиболее естественная для уравнений с последействием. Специфические особенности вольтерровых операторов и их многочисленные приложения определяют центральную роль задачи Коши в ряду краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Предположение, что пространства B, D являются функциональными, позволяет распространить идеи и методы теории уравнений Вольтерра на абстрактные уравнения. В таких пространствах можно исследовать класс абстрактных функционально-дифференциальных уравнений, являющихся аналогами уравнений с последействием, для которых задача Коши по праву, а не формально, занимает место главной задачи.

Приведем определение вольтеррового оператора, которое используется в данной работе. Пусть каждому $\gamma \in [0, 1]$ поставлено в соответствие некоторое подмножество $e_\gamma \subset [a, b]$ таким образом, что

$$\gamma = 1 \mapsto e_1 = [a, b] \quad \forall \gamma, \eta \in [0, 1], \quad \gamma < \eta \Rightarrow e_\gamma \subset e_\eta.$$

Обозначим $v = \{e_\gamma\}$. Пусть Y, B — линейные пространства функций $f : [a,b] \to R^m$. Линейное отображение $F : Y \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* v, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любого $y \in Y$ из $y(s) = 0$ на e_γ следует $(Fy)(s) = 0$ на e_γ. Это определение расширяет понятие вольтерровости по А.Н. Тихонову. Для вольтеррового по А.Н. Тихонову оператора имеем $e_\gamma = [a, a+\gamma(b-a)]$. Отметим, что различные обобщения понятия вольтерровости предложены в работах М.С. Бродского, А.Л. Бухгейма, И.Ц. Гохберга, С.А. Гусаренко, Ю.А. Дядченко, П.П. Забрейко, М.С. Крейна, В.Г. Курбатова, М.С. Лившица, В.И. Сумина, T. Ando, C. Corduneanu, D.C. Youla, H.L. Carlin, L.J. Castriota и других авторов. Большинство современных трактовок свойства вольтерровости операторов возникло в связи с решением конкретных теоретических и прикладных задач в различных разделах математики. Предложенное здесь определение позволяет охватить широкий класс операторов, для которых возможно построение содержательной теории и ее применение к функционально-дифференциальным уравнениям.

Линейный вектор-функционал $r : Y \to R^n$ назовем *функционалом Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in Y\ \{y(t) = 0,\ t \in e_\varepsilon \Rightarrow ry = 0\}.$$

Краевую задачу (4) назовем *начальной задачей* (*задачей Коши*) в том случае, когда $\mathcal{L} : D \to B$ — вольтерровый на v оператор, $r : D \to R^n$ — функционал Коши.

Будем предполагать, что оператор $\Lambda : B \to D$ является вольтерровым на v оператором. В этом случае "главная часть" оператора $\mathcal{L}$ — оператор $Q = \mathcal{L}\Lambda : B \to B$ будет также вольтерровым. Для однозначной разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы оператор Q имел ограниченный обратный. Предположим, что оператор $Q^{-1} : B \to B$ существует и является вольтерровым на системе v. Условия обратимости оператора Q и вольтерровости обратного оператора в пространстве суммируемых функций получены в [7], [8], в произвольных банаховых функциональных пространствах в [9], [10].

Решение однозначно разрешимой задачи Коши представимо в виде $x = X\alpha + Cf$. Линейный ограниченный оператор $C = \Lambda Q^{-1} : B \to D$ — оператор Грина начальной задачи — будем называть *оператором Коши*. В наших предположениях оператор Коши является вольтерровым на системе v. Запишем оператор Коши в виде $(Cf)(t) = \langle c(t), f \rangle$, где компоненты m-мерного вектора $c(t) = \lambda(t)Q^{-1}$ являются элементами сопряженного пространства B^*. Построенное таким образом отображение $c : [a,b] \to B^{*m}$, являющееся функцией Грина задачи Коши, будем называть *функцией* (*матрицей*) *Коши*. Если $B = L_p$ — пространство суммируемых функций, $D = AC_p$ — пространство абсолютно непрерывных функций, система v состоит из отрезков $[a, a+\gamma(b-a)]$, то это определение эквивалентно известному определению функции Коши функционально-дифференциального уравнения. "Классическая" функция Коши функционально-дифференциального уравнения подробно изучена в [10]. Приведем несколько утверждений, позволяющих говорить, что "абстрактная" функция Коши имеет аналогичные свойства. Воспользуемся теоремой 3 для нахождения уравнения, которому удовлетворяет функция Коши.

Теорема 4. *При каждом $t \in [a,b]$ функция Коши является решением уравнения*

$$Q^* c(t) = \lambda(t), \tag{9}$$

фундаментальная матрица решений однородного уравнения определяется равенством

$$X(t) = Y(t) - c(t)A.$$

Для доказательства достаточно в формулах (7), (8) в качестве Ψ взять единичную матрицу и положить функционал $\Phi = 0$.

Пусть сопряженное пространство B^* является пространством функций, определенных на $[a,b]$ и имеющих значения в R^m. Для любого $\gamma \in [0,1]$ определим подпространства $B_\gamma \subset B$,

$B^*_\gamma \subset B^*$, $B^\perp_\gamma \subset B^*$ равенствами

$$B_\gamma = \{y \in B \mid y(s) = 0 \text{ при всех } s \in e_\gamma\},$$
$$B^*_\gamma = \{g \in B^* \mid g(s) = 0 \text{ при всех } s \in [a,b] \setminus e_\gamma\},$$
$$B^\perp_\gamma = \{g \in B^* \mid gy = 0 \text{ при всех } y \in B_\gamma\}.$$

Обозначим значение функции $c(t) : [a,b] \to R^{m\times m}$ при $s \in [a,b]$ через $c(t,s)$. Следствием вольтерровости оператора Коши является

Теорема 5. *Пусть при каждом $\gamma \in [0,1]$ имеет место включение $B^\perp_\gamma \subset B^*_\gamma$. Тогда для вольтеррового на v оператора Коши $C : B \to D$ при любом $e_\gamma \in v$ и всех $t \in e_\gamma$, $s \in [a,b] \setminus e_\gamma$ выполнено равенство $c(t,s) = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $t \in e_\gamma$. Возьмем произвольно $y \in B_\gamma$, т. е. $y(s) = 0$ при $s \in e_\gamma$. Вследствие вольтерровости оператора C получим $\langle c(t), y\rangle = 0$. Поэтому компоненты вектора $c(t)$ принадлежат подпространству $B^\perp_\gamma$ и, следовательно, подпространству B^*_γ. Таким образом, $c(t,s) = 0$ для всех $s \in [a,b] \setminus e_\gamma$. $\square$

В завершение этого параграфа приведем утверждение о вольтерровости оператора, определяющего уравнение (9) для функции Коши.

Теорема 6. *Если при каждом $\gamma \in [0,1]$ выполнено равенство $B^\perp_\gamma = B^*_\gamma$, то для любого вольтеррового на v линейного оператора $Q : B \to B$ сопряженный оператор $Q^* : B^* \to B^*$ является вольтерровым на системе $\overline{v} = \{[a,b] \setminus e_\gamma\}$.*

Доказательство. Возьмем любой $y \in B$ такой, что $y(s) = 0$ на e_γ. Вследствие вольтерровости оператора $Q : B \to B$ имеем равенство $(Qy)(s) = 0$, $s \in e_\gamma$. Пусть $g \in B^*$ при всех $s \in [a,b] \setminus e_\gamma$ удовлетворяет равенству $g(s) = 0$, т. е. $g \in B^*_\gamma$. Тогда $g \in B^\perp_\gamma$, и поэтому $\langle g, Qy\rangle = 0$. Отсюда $\langle Q^*g, y\rangle = 0$. Вследствие произвольности $y \in B_\gamma$ получим $Q^*g \in B^\perp_\gamma$. Следовательно, $Q^*g \in B^*_\gamma$. Это означает, что $(Q^*g)(s) = 0$, $s \in [a,b] \setminus e_\gamma$. $\square$

3. Приближенное нахождение функции Коши

Функцию Коши или ее приближения необходимо знать, когда требуется находить реакции систем на многочисленные различные входные воздействия. Такие задачи возникают, например, при расчетах траекторий движения небесных тел ([11], с. 450), в теории управления [12], в теории устойчивости [1]. Методы численного нахождения функции Коши интегродифференциального уравнения, уравнения нейтрального типа предложены в работах [13]–[15]. Ниже рассматривается достаточно общий метод построения функции Коши абстрактного уравнения, частными случаями которого можно считать методы из [13], [14].

Везде далее будем считать, что D, B — банаховы пространства скалярных функций $y : [a,b] \to R$. В пространстве B будем предполагать выполненным следующее условие: для любого множества $e_\gamma \in v$ и для любой сходящейся последовательности $\{y_i\} \subset B$, $\|y_i - y\|_B \to 0$, из равенства $y_i(t) = 0$ при всех $t \in e_\gamma$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что и предельная функция $y(t) = 0$ при $t \in e_\gamma$. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}x \equiv (I - W)\delta x + Arx = f, \tag{10}$$

где оператор $W : B \to B$ вольтерров на системе v и его спектральный радиус $\rho(W) < 1$. Согласно [8], [9] существует и является вольтерровым на системе v оператор Коши $C = \Lambda(I - W)^{-1} : B \to D$. Функция Коши $c : [a,b] \to B^*$, задается равенством $c(t) = \lambda(t)(I - W)^{-1}$.

Каждому $t \in [a,b]$ поставим в соответствие число $\varsigma(t) = \inf\{\gamma \mid t \in e_\gamma\}$. Введем на $[a,b]$ бинарное отношение ϱ_v следующим образом:

$$(t,s) \in \varrho_v \Leftrightarrow \varsigma(t) = \varsigma(s).$$

Бинарное отношение ϱ_v является эквивалентностью, фактор-множество состоит из классов $T(\gamma) = \{t \in [a,b] \mid \varsigma(t) = \gamma\}$, $\gamma \in [0,1]$. Всюду ниже предполагается, что при любом $\gamma \in [0,1]$ множество $T(\gamma)$ не пусто и конечно.

Возьмем некоторое натуральное число k и выберем числа γ_i^k, $i = \overline{0,k}$, так, чтобы $0 = \gamma_0^k < \gamma_1^k < \cdots < \gamma_k^k = b - a$. Зададим вектор[1] $\overline{t}^k =^t (\overline{t}_1^k, \overline{t}_2^k, \ldots, \overline{t}_k^k)$, компоненты которого сами являются векторами $\overline{t}_i^k =^t (t_{i1}^k, t_{i2}^k, \ldots, t_{il_i^k}^k)$, $i = \overline{1,k}$, с компонентами — элементами класса эквивалентности $T(\gamma_i^k)$. Пусть для каждого $j = \overline{1,k}$ вектор $\overline{E}_j^k = (E_{1j}^k, E_{2j}^k, \ldots, E_{l_j^k j}^k)$ имеет компонентами такие функции $E_{pj}^k \in B$, что $E_{pj}^k(s) = 0$ при всех $s \in e_{\gamma_{j-1}^k}$, и пусть вектор $\overline{E}^k$ определен равенством $\overline{E}^k = (\overline{E}_1^k, \overline{E}_2^k, \cdots, \overline{E}_k^k)$. Обозначим через $\overline{\tau}_{ij}^k = \langle \lambda(\overline{t}_i^k), \overline{E}_j^k \rangle$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \langle \lambda(t_{i1}^k), E_{1j}^k \rangle & \langle \lambda(t_{i1}^k), E_{2j}^k \rangle & \cdots & \langle \lambda(t_{i1}^k), E_{l_j^k j}^k \rangle \\ \langle \lambda(t_{i2}^k), E_{1j}^k \rangle & \langle \lambda(t_{i2}^k), E_{2j}^k \rangle & \cdots & \langle \lambda(t_{i2}^k), E_{l_j^k j}^k \rangle \\ . & . & \cdots & . \\ \langle \lambda(t_{il_i^k}^k), E_{1j}^k \rangle & \langle \lambda(t_{il_i^k}^k), E_{2j}^k \rangle & \cdots & \langle \lambda(t_{il_i^k}^k), E_{l_j^k j}^k \rangle \end{pmatrix}$$

размерности $l_i^k \times l_j^k$. Составим квадратную матрицу $\overline{\tau}^k = (\overline{\tau}_{ij}^k)_{k \times k}$. В дальнейшем, если число k фиксировано, то будем опускать верхний индекс k в перечисленных выше обозначениях.

Вследствие вольтерровости на v оператора Λ выполнено $\overline{\tau}_{ij} = 0$ при $j > i$. Будем предполагать, что $\det \overline{\tau}_{ii} \neq 0$ при всех $i = \overline{1,k}$. Тогда существует матрица $\overline{\eta} = \overline{\tau}^{-1}$, $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_{ij})$, $i,j = \overline{1,k}$, где $\overline{\eta}_{ij}$ — матрица размерности $l_i \times l_j$. Для матрицы $\overline{\eta}$ также выполнено $\overline{\eta}_{ij} = 0$ при $j > i$. Здесь следует отметить, что если брать большое количество разбиений k, то задача нахождения обратной матрицы $\eta = \tau^{-1}$ становится трудоемкой. Однако элементы матрицы τ определяются лишь узлами интерполяции, т. е. в конкретных пространствах B, D для заданной системы функций $\{\overline{E}_j^k\}$, $j = \overline{1,k}$, можно один раз вычислить матрицу η, и эту матрицу использовать для построения функций Коши любых уравнений.

Обозначим $\Im_k : B \to B$ — отображение, ставящее в соответствие каждому $y \in B$ такой элемент $\mathbf{y} = \overline{E}\,\overline{\xi} = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{p=1}^{l_j} E_{pj}\xi_{pj}$, что $\langle \lambda(t_{iq}), y \rangle = \langle \lambda(t_{iq}), \mathbf{y} \rangle$ при всех $q = \overline{1,l_i}$, $i = \overline{1,k}$. Найдем коэффициенты $\overline{\xi} = (\xi_{pj})$ в линейной комбинации $\mathbf{y}$ функций $\overline{E} = (E_{pj})$. Пусть $\overline{x} = \langle \lambda(\overline{t}), y \rangle$. Тогда $\langle \lambda(\overline{t}), \overline{E\xi} \rangle = \overline{\tau\xi} = \overline{x}$. Следовательно, $\overline{\xi} = \overline{\eta}\,\overline{x}$. Итак, $\Im_k y = \overline{E\eta}\,\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\overline{E}_i \sum\limits_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{ij}\overline{x}_j \right) = \sum\limits_{i \geq j} \overline{E}_i \overline{\eta}_{ij} \overline{x}_j$.

Рассматриваемый метод построения функции Коши основан на замене уравнения (10) уравнением

$$(I - W\Im_k)\delta x^k + Arx^k = f. \tag{11}$$

Построим решение "приближенного" уравнения (11), удовлетворяющее начальному условию $rx^k = 0$. Подействуем вектор-функционалом $\lambda(\overline{t})$ на обе части этого уравнения. Получим

$$\overline{x} - \overline{g}\,\overline{\eta}\,\overline{x} = \langle \lambda(\overline{t}), f \rangle, \tag{12}$$

где $\overline{x} = \langle \lambda(\overline{t}), \delta x^k \rangle$, $\overline{g}_{ij} = \langle \lambda(\overline{t}_i), W\overline{E}_j \rangle$, $\overline{g} = (\overline{g}_{ij})_{k \times k}$. Из вольтерровости на системе v операторов Λ, W следует $\overline{g}_{ij} = 0$ при всех $j > i$. Таким образом, $\overline{x}_1 - \overline{g}_{11}\overline{\eta}_{11}\overline{x}_1 = \langle \lambda(\overline{t}_1), f \rangle$. Отсюда $\overline{x}_1 = (e - \overline{g}_{11}\overline{\eta}_{11})^{-1} \langle \lambda(\overline{t}_1), f \rangle$, где e — единичная $l_1 \times l_1$-матрица. Согласно определению функции Коши получаем

$$c^k(\overline{t}_1) = (e - \overline{g}_{11}\overline{\eta}_{11})^{-1} \lambda(\overline{t}_1). \tag{13}$$

[1]Здесь и далее символом $^t(\cdot)$ обозначена транспонированная матрица.

Аналогично, на m-м шаге имеем уравнение

$$\overline{x}_m - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=i}^{m}\overline{g}_{ml}\overline{\eta}_{li}\overline{x}_i = \langle\lambda(\overline{t}_m), f\rangle,$$

которое удобно записать в виде

$$\overline{x}_m - \overline{g}_{mm}\overline{\eta}_{mm}\overline{x}_m = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=i}^{m}\overline{g}_{ml}\overline{\eta}_{li}\overline{x}_i + \langle\lambda(\overline{t}_m), f\rangle.$$

Поэтому

$$\overline{x}_m = (e - \overline{g}_{mm}\overline{\eta}_{mm})^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=i}^{m}\overline{g}_{ml}\overline{\eta}_{li}\overline{x}_i + \langle\lambda(\overline{t}_m), f\rangle\Big).$$

Здесь e — единичная $l_m \times l_m$-матрица. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение для вычисления функции Коши

$$c^k(\overline{t}_m) = (e - \overline{g}_{mm}\overline{\eta}_{mm})^{-1}\Big(\lambda(\overline{t}_m) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=i}^{m}\overline{g}_{ml}\overline{\eta}_{li}c^k(\overline{t}_i)\Big). \tag{14}$$

Отметим, что частным случаем формул (13), (14) является алгоритм, предложенный в [13], [14] для уравнения (10) в случае, когда оператор W действует в пространстве L суммируемых функций и является вольтерровым по А.Н. Тихонову.

Рассмотрим свойства, которыми должно обладать пространство B, и требования, которым должна отвечать система $\{E_{pj}^k\}$ "узлов интерполяции", чтобы с увеличением числа k последовательность функций Коши, построенных по формулам (13), (14), сходилась к функции Коши исходного уравнения (10).

Пусть при любом $\gamma \in [0,1]$ множества $T(\gamma)$ не только не пусты и конечны, но и состоят из одинакового количества $l < \infty$ элементов. Пронумеруем элементы множества $T(\gamma)$, образовав тем самым вектор $\overline{T}(\gamma) = (t_1(\gamma), t_2(\gamma), \dots, t_l(\gamma)) \in R^l$.

Обозначим через $B(e_\gamma)$ пространство сужений функций из B на множество e_γ с нормой $\|y_\gamma\|_{B(e_\gamma)} = \inf\|y\|_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$. Пусть оператор $\Pi_\gamma : B \to B(e_\gamma)$ задан равенством $(\Pi_\gamma y)(t) = y(t)$ при всех $t \in e_\gamma$. Предположим, что для каждой функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$ существует такое продолжение $\widetilde{y}_\gamma$ на $[a,b]$, что $\|\widetilde{y}_\gamma\|_B = \|y_\gamma\|_{B(e_\gamma)}$. Например, в пространстве суммируемых функций таким продолжением является $\widetilde{y}_\gamma(t) = \begin{cases} y_\gamma(t), & \text{если } t \in e_\gamma; \\ 0, & \text{если } t \in [a,b]\setminus e_\gamma. \end{cases}$ Продолжения, не увеличивающие норму функций, существуют также в пространстве непрерывных функций, пространстве измеримых ограниченных в существенном функций и т. д. Определим оператор $P_\gamma : B(e_\gamma) \to B$, ставящий в соответствие функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$ ее продолжение $\widetilde{y}_\gamma$. Вычислим $\widehat{y}_\gamma = y - \widetilde{y}_\gamma = (I - P_\gamma\Pi_\gamma)y$. Заметим, что $\widehat{y}_\gamma(t) = 0$, если $t \in e_\gamma$. Будем говорить, что в паре пространств (B, D) относительно системы v выполнено *условие* L, если для любых $\gamma, \delta \in [0,1]$, $\gamma < \delta$, существует такое число $\mu(\gamma,\delta)$, что для всех $y \in B$ выполнено $\langle\lambda(\overline{T}(0)), y\rangle = 0$ и

$$|\langle\lambda(\overline{T}(\delta)), y\rangle - \langle\lambda(\overline{T}(\gamma)), y\rangle|_{R^l} \le \mu(\gamma,\delta)\|\Pi_\delta(I - P_\gamma\Pi_\gamma)y\|_{B(e_\delta)}.$$

В пространствах L_p, AC_p, $1 \le p \le \infty$, с системой $v = \{[a, a + \gamma(b-a)]\}$ и оператором $(\Lambda y)(t) = \int\limits_a^t y(s)ds$ выполнено условие L с коэффициентом

$$\mu(\gamma,\delta) = (\delta - \gamma)^{1-1/p}.$$

Будем говорить, что в пространстве B норма *полуаддитивна относительно системы* v, если для любых $y, z \in B$ и всех таких $\gamma, \delta \in [0,1]$, что $\gamma < \delta$, из условий

$$\|\Pi_\gamma y\|_{B(e_\gamma)} \geq \|\Pi_\gamma z\|_{B(e_\gamma)}, \quad \|\Pi_\delta(I - P_\gamma \Pi_\gamma)y\|_{B(e_\delta)} \geq \|\Pi_\delta(I - P_\gamma \Pi_\gamma)z\|_{B(e_\delta)}$$

следует неравенство $\|\Pi_\delta y\|_{B(e_\delta)} \geq \|\Pi_\delta z\|_{B(e_\delta)}$. Таким свойством, например, обладает норма в пространствах L_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Возьмем любую возрастающую последовательность N_0 натуральных чисел и для каждого $k \in N_0$ выберем числа $\gamma_i^k \in [0,1]$, $i = \overline{1,k}$. При каждом $k \in N_0$ составим линейные комбинации E'^k_{pj}, $p = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,k}$, функций из системы $\{E^k_{pj}\}$ так, чтобы квадратная порядка kl матрица

$$\Delta\, \tau'^k = (\Delta\, \overline{\tau}'^k_{ij})_{k\times k} = (\Delta\, \tau'^k_{ij})_{kl\times kl}, \quad \Delta\, \overline{\tau}'^k_{ij} = \langle \lambda(\overline{t}^k_i) - \lambda(\overline{t}^k_{i-1}), \overline{E}'^k_j \rangle,$$

была диагональной. Совокупность $E = \{E^k_{pj}\} \subset B$ назовем *полным интерполяционным множеством*, если

1. линейная оболочка функций E^k_{pj}, $p = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,k}$, $k \in N_0$, является плотным множеством в пространстве B;
2. если $k < m$ для чисел $k, m \in N_0$, то каждая из функций E^k_{pj}, $p = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,k}$, является линейной комбинацией функций $E^m_{11}, E^m_{21}, \ldots, E^m_{l1}, E^m_{12}, E^m_{22}, \ldots, E^m_{l2}, \ldots, E^m_{1m}, E^m_{2m}, \ldots, E^m_{lm}$;
3. пара пространств (B, D) удовлетворяет относительно системы v условию L, и существует такое число $M > 0$, что для всех $k \in N_0$, $i = \overline{1,k}$, $p = \overline{1,l}$ имеет место неравенство

$$|\langle \lambda(\overline{t}^k_i), E'^k_{pi} \rangle - \langle \lambda(\overline{t}^k_{i-1}), E'^k_{pi} \rangle|_{R^l} \geq \mu(\gamma^k_{i-1}, \gamma^k_i) M \|(I - P_{\gamma^k_{i-1}} \Pi_{\gamma^k_{i-1}}) E'^k_{pi}\|_B; \tag{15}$$

4. для всех $i = \overline{1,k}$, $p = \overline{1,l}$ выполнено $P_{\gamma^k_i} \Pi_{\gamma^k_i} E'^k_{pi} = E'^k_{pi}$.

В [13], [14] для построения функции Коши уравнения нейтрального типа в пространстве L с вольтерровыми по А.Н. Тихонову операторами выбирались функции

$$E^k_j = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (t_{j-1}, b]; \\ 0, & \text{если } t \in [a, t_{j-1}], \end{cases} \qquad E'^k_j = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (t_{j-1}, t_j]; \\ 0, & \text{если } t \in [a, t_{j-1}] \cup (t_j, b]. \end{cases}$$

Эти системы являются полными интерполяционными множествами.

Для того чтобы сформулировать утверждение о сходимости метода, потребуется дополнительно определить некоторые свойства операторов в пространстве B. Пусть $\tau > 0$. Линейный оператор $T : B \to B$ будем называть *τ-вольтерровым на системе* v, если для любого $x \in B$ выполнено $(Tx)(t) = 0$ при $t \in e_\tau$ и для всех $\gamma \in (\tau, 1]$ из равенства $x(t) = 0$, $t \in e_{\gamma-\tau}$, следует $(Tx)(t) = 0$, $t \in e_\gamma$. Зададим отображение $Z : (0,1] \times B \to R$ формулой $Z(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma y\|_{B(e_\gamma)}$. При каждом фиксированном $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ не убывает, и поэтому существует $\lim\limits_{\gamma \to 0+0} Z(\gamma, y) = z_0(y)$. Доопределим отображение Z значением $Z(0, y) = z_0(y)$. Линейный оператор $K : B \to B$ назовем *улучшающим на системе* v, если образом единичной сферы Ω является множество элементов с равностепенно непрерывными нормами, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ $\forall x \in \Omega$, $\ \forall \tau, \gamma \in [0,1]$

$$|\tau - \gamma| < \delta \Rightarrow |Z(\tau, Kx) - Z(\gamma, Kx)| < \varepsilon,$$

и, кроме того, при всех $x \in \Omega$ выполнено $Z(0, Kx) = 0$.

Теорема 7. *Пусть норма в пространстве B полуаддитивна; в паре пространств (B, D) имеет место L-условие; совокупность E является полным интерполяционным множеством. Пусть, далее, оператор $W : B \to B$ представим суммой $W = U + K + T$, где линейные ограниченные операторы $U, K, T : B \to B$ являются вольтерровыми на системе v, причем, оператор K улучшающий, оператор T τ-вольтерров на v и для оператора U имеет место неравенство*

$\|U\| < M$, где M удовлетворяет условию (15)*. Тогда последовательность C^k операторов Коши уравнений* (11) *поточечно сходится при $\Delta\gamma_k = \max\limits_{i=\overline{1,k}}\{\gamma_i^k - \gamma_{i-1}^k\} \to 0$ к оператору Коши C уравнения* (10)*.*

Можно продемонстрировать применение изложенных выше результатов на примере скалярного уравнения “нейтрального типа”

$$x'(t) - \frac{1}{2}x'(h(t)) = f(t), \quad t \in [-1,1], \tag{16}$$

где правая часть $f \in L([-1,1],R)$, а функция $h : [-1,1] \to R$ задана равенством

$$h(t) = \begin{cases} t + 0{,}5, & \text{если } t \in [-1; -0{,}5); \\ -t, & \text{если } t \in [-0{,}5; 0{,}5]; \\ t - 0{,}5, & \text{если} t \in (0{,}5; 1]. \end{cases}$$

Решением считаем функцию $x \in AC([-1,1],R)$, удовлетворяющую (16) при почти всех $t \in [-1,1]$.

При таком задании функции h оператор внутренней суперпозиции $(Wy)(t) = \frac{1}{2}y(h(t))$ непрерывно действует в пространстве L и является вольтерровым на системе $v = \{e_\gamma = [-\gamma,\gamma] \mid \gamma \in [0,1]\}$. Определим функционал $r : AC \to R$, $rx = x(0)$, являющийся функционалом Коши на системе v. Пара отображений $(y,\alpha) \in L \times R \overset{(\Lambda,Y)}{\longmapsto} \alpha + \int\limits_0^t y(s)ds \in AC$ задает изоморфизм, причем оператор $\Lambda : L \to AC$, $(\Lambda y)(t) = \int\limits_0^t y(s)ds$, обладает свойством вольтерровости на системе v. Уравнение (16) интегрируется. Процедуру приближенного отыскания функции Коши для уравнения (16) приводить не будем. Отметим только, что найденные значения совпали с точными значениями функции Коши.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В. *К вопросу о регуляризуемости сингулярных уравнений* // Вестн. ПТГУ. Матем. и прикл. матем. – Пермь: Изд-во Пермск. техн. ун-та, 1996. – № 1. – С. 5–27.
3. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения* // Функционально-дифференц. уравнения. – Пермь: Изд-во Пермского политехн. ин-та, 1987. – С. 3–11.
4. Анохин А.В. *К общей теории линейных функционально-дифференциальных уравнений.* – Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1981. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.03.81, № 1389-81.
5. Култышев С.Ю., Тонков Е.Л. *Управляемость линейной нестационарной системы* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 7. – С. 1206–1216.
6. Максимов В.П. *О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 4. – С. 601–606.
7. Жуковский Е.С. *К теории уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1599–1605.
8. Жуковский Е.С. *Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 2. – С. 250–255.
9. Жуковский Е.С. *Об операторах Вольтерра в банаховых функциональных пространствах* // Вестн. ТГУ. – 2001. – Т.6. – Вып. 2. – С. 147–149.
10. Жуковский Е.С. *Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – Тамбов: Изд-во Тамбовск. ун-та им. Г.Р. Державина, 2003. – 148 с.
11. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* Ч. 1. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

12. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1972. – 476 с.
13. Ефремов А.А. *Приближенное решение линейных уравнений с запаздывающим аргументом*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Пермь, 1983. – 114 с.
14. Жуковская Т.В. *Вольтерровость операторов и численное решение функционально-дифференциальных уравнений*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Пермь, 1990. – 140 с.
15. Юганова С.А. *К вопросу о приближенном построении оператора Коши.* – Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1981. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3820-81.

Тамбовский государственный университет

Поступила 20.12.2004