ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 519.216:519.218

М.А. АЛЬШАНСКИЙ

МОДЕЛЬ БЕЛОГО ШУМА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Математическая модель белого шума является центральным элементом теории стохастических дифференциальных уравнений. В $\mathbb{R}^d$-значном случае белый шум моделируется с помощью интеграла Ито (см., напр., [1]) или как обобщенный случайный процесс (см., напр., [2]). При рассмотрении дифференциально-операторных уравнений в бесконечномерных векторных пространствах возникает необходимость в построении модели белого шума как случайного процесса со значениями в соответствующем пространстве.

Обобщения интеграла Ито на бесконечномерный случай начали появляться еще в 60-х годах (см. обзор результатов и библиографию в [3]). В данной работе рассмотрено построение модели белого шума со значениями в гильбертовом пространстве как обобщенного случайного процесса. Центральным элементом конструкции является вероятностное пространство, в котором в качестве пространства элементарных исходов выступает $E'(H)$ — пространство H-значных распределений над некоторым счетно-гильбертовым ядерным основным пространством E, где H — некоторое гильбертово пространство.

В первой части работы приведены определения и факты из теории $\mathbb{R}^d$-значных обобщенных случайных процессов. Основным результатом работы является содержащаяся во второй части теорема 2 о продолжении вероятностной меры, заданной на алгебре цилиндрических подмножеств $E'(H)$, на порожденную ею σ-алгебру.

1. Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — некоторое вероятностное пространство, E_0 — некоторое гильбертово пространство, E — счетно-гильбертово ядерное пространство такое, что

$$E \subseteq E_0 \subseteq E',$$

где E' — пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на E. Элементы E обычно называют основными функциями, а элементы E' — обобщенными функциями или распределениями над E. Будем обозначать через $|\cdot|_p$ норму, связанную с p-м скалярным произведением в E, через E_p — пополнение E по этой норме, а через E_{-p} — сопряженное к E_p пространство. Пусть для любого $\xi \in E$ выполнено неравенство $|\xi|_1 \leq |\xi|_2 \leq |\xi|_3 \leq \cdots$, тогда

$$\cdots \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 \subset E_{-1} \subset E_{-2} \subset \cdots .$$

При этом $E = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} E_p$, $E' = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} E_{-p}$. Действие функционала $x \in E'$ на $\xi \in E$ будем обозначать через $\langle x, \xi \rangle$, а скалярное произведение в E_0 — через $(\cdot,\cdot)$. Если $x \in E_0$, то $\langle x, \xi \rangle = (x, \xi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00310.

Определение 1. Обобщенным случайным процессом называется совокупность случайных величин $\{X(\xi) = X(\xi, \omega),\ \xi \in E\}$, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, таких, что

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\cdot, \omega) \in E'.$$

Распределения $X(\cdot, \omega)$ при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ называются траекториями или реализациями обобщенного случайного процесса X.

Пусть обобщенный случайный процесс X задан. Будем отождествлять каждый исход $\omega \in \Omega$ с соответствующей траекторией $X(\omega, \cdot)$, положив для любого $\xi \in E \quad \langle \omega, \xi \rangle := X(\omega, \xi)$. Тогда $\Omega \subseteq E'$.

Обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathbb{R}^k$ через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра цилиндрических подмножеств E', т. е. множеств вида

$$A_{\xi_1, \ldots, \xi_k}(B) = \{x \in E' \mid (\langle x, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle x, \xi_k \rangle) \in B\},$$

где $\xi_j \in E$, $j = 1, \ldots, k$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Тогда σ-алгебра $\mathcal{F}$ содержит $\mathfrak{B}$ — минимальную σ-алгебру подмножеств E', содержащую $\mathfrak{A}$. Пусть на измеримом пространстве $(E', \mathfrak{B})$ определена мера

$$\mu_X(B) = \mathrm{P}(\{\omega \mid \omega = X(\omega, \cdot) \in B\}), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Таким образом, с каждым обобщенным случайным процессом X на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ связано новое вероятностное пространство $(E', \mathfrak{B}, \mu_X)$. Задание обобщенного случайного процесса эквивалентно заданию вероятностной меры на измеримом пространстве $(E', \mathfrak{B})$.

Распределение вероятностей обобщенного случайного процесса однозначно определяется его характеристическим функционалом $C_X : E \to \mathbb{R}$, где $C_X(\xi) := \int\limits_{\Omega} e^{iX(\xi,\omega)} d\mathrm{P}(\omega)$, $\xi \in E$. В силу равенства $C_X(\xi) = \int\limits_{E'} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu_X(x)$, $\xi \in E$, C_X является характеристическим функционалом меры μ_X.

Характеристический функционал обобщенного случайного процесса удовлетворяет следующим условиям (см., напр., [4], с. 115):
(C-I) C_X непрерывен по $\xi \in E$;
(C-II) C_X положительно-определенный, т. е. $\sum\limits_{i,j} C_X(\xi_i - \xi_j)\lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E$;
(C-III) $C_X(0) = 1$.

Пусть F — некоторое конечномерное подпространство E, $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — базис в F, $\nu_F : F \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм. Через $\mathfrak{A}_F$ будем обозначать σ-алгебру подмножеств E' вида

$$A = \{x \in E' \mid (\langle x, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle x, \xi_n \rangle) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $\bigcup\limits_{F \subset E} \mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}$ (объединение берется по всем конечномерным подпространствам пространства E). Подмножество пространства E' вида

$$F^a = \{x \in E' \mid \forall \xi \in F \ \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

называют аннигилятором F. Пусть ρ_F — канонический проектор E' на $E'|_{F^a}$, а $\tau_F : E'|_{F^a} \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм.

Пусть C — функционал на E, удовлетворяющий условиям (C-I), (C-II) и (C-III), тогда функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, определенная равенством $\varphi(z) := C(\nu_F^{-1}(z))$, удовлетворяет условиям теоремы Бохнера, следовательно, является характеристической функцией некоторой вероятностной меры $\widetilde{m}_F$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, т. е.

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,z)_{\mathbb{R}^n}} d\widetilde{m}_F(x).$$

Положим $m(A) := \widetilde{m}_F(\tau_F \rho_F(A))$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, где F таково, что $A \in \mathfrak{A}_F$. Легко проверить, что значение $m(A)$ не зависит от выбора F. Определенная таким образом мера m является конечно-аддитивной на $(E', \mathfrak{A})$ (см. детали в [4], с. 118). Известна

Теорема 1 (Бохнер–Минлос) ([4], с. 120). *Пусть C — характеристический функционал, определенный на E, т. е. функционал, удовлетворяющий условиям* (C-I), (C-II) *и* (C-III). *Тогда существует единственная вероятностная мера μ на $(E', \mathfrak{B})$ такая, что*

$$C(\xi) := \int_{E'} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x).$$

Если при этом вложение $T_p^n : E_n \to E_p$ является оператором Гильберта–Шмидта для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(E'_{-n}) = 1$.

Пример 1. Пусть $T = \mathbb{R}$, $E = S$ — пространство быстроубывающих основных функций. Тогда $E' = S'$ — пространство медленноубывающих распределений (Шварца) над S. Пусть $C_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2 \|\xi\|^2}{2}}$. Этот функционал удовлетворяет условиям теоремы Бохнера–Минлоса (см. [4], с. 122). Пусть μ_σ — соответствующая мера. Тройка $(S', \mathfrak{B}(S'), \mu_\sigma)$ называется вероятностным пространством белого шума с отклонением σ, а обобщенный случайный процесс $W_\sigma(\omega, \xi) := \langle \omega, \xi \rangle$ — белым шумом с отклонением σ.

В доказательстве теоремы Бохнера–Минлоса ключевую роль играет

Лемма 1 (Минлос) ([4], с 119). *Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{E} = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \;\Big|\; \sum_{i=1}^n a_i^2 z_i^2 \le \gamma^2 \right\}.$$

Если характеристическая функция $\varphi(z)$ меры μ удовлетворяет условию

$$|\varphi(z) - 1| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad z \in \mathcal{E},$$

то для шара $S(t) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса t выполняется неравенство

$$\mu(S(t)^c) < \beta^2 \left(\varepsilon + \frac{2}{\gamma^2 t^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \right),$$

где $S(t)^c = \mathbb{R}^n \setminus S(t)$, а β — положительная константа, не зависящая от n и t.

Доказательство следующей леммы является частью доказательства теоремы Бохнера–Минлоса. Оценка, которую дает эта лемма, будет играть центральную роль в дальнейшем построении, поэтому мы выделим ее в самостоятельное предложение.

Лемма 2. *Пусть $C(\xi)$ — характеристический функционал некоторой меры μ на $(E', \mathfrak{B})$, т. е. функционал на E, удовлетворяющий условиям* (C-I), (C-II), (C-III). *Если вложение $T_p^n : E_n \to E_p$ для некоторого n $(> p)$ является оператором Гильберта–Шмидта, то для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\mu(U_n(r)) \ge 1 - \varepsilon$, где $U_n(r)$ — шар в E_{-n} радиуса $r = \frac{2\beta \|T_p^n\|_2}{(\gamma^2 \varepsilon)^{1/2}}$, β — константа из леммы Минлоса, а $\gamma > 0$ таково, что для любого $\xi \in E$ из неравенства $\|\xi\|_{L^2(T)} < \gamma$ следует $|C(\xi) - 1| < \frac{\varepsilon}{2\beta^2}$.*

Доказательство. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ $U_n(r) \in \mathfrak{B}$. Действительно, пусть L — некоторое счетное всюду плотное подмножество в $L^2(T)$, тогда $\{x \in E' \,|\, |\langle x, \xi \rangle| \le r\} \in \mathfrak{A}$ для любого $\xi \in E$ и, следовательно,

$$U_n(r) = \bigcap_{\xi \in L,\ |\xi|_p \le 1} \{x \in E' \,|\, |\langle x, \xi \rangle| \le r\} \in \mathfrak{B}.$$

Далее, пусть r удовлетворяет условию леммы, A — некоторое цилиндрическое множество такое, что $A \supset U_n(r)$, F таково, что $A \in \mathfrak{A}_F$. Тогда $A^c \in \mathfrak{A}_F$, $A^c \cap U_n(r) = \emptyset$ и, следовательно, для борелевского множества $B = \tau_F \rho_F(A^c)$ верно $B \cap S_n = \emptyset$, где $S_n = \tau_F \rho_F(U_n(r))$.

Пусть $u = \{\xi \in E \,|\, |\xi|_p < \gamma\}$. Найдется окрестность нуля в $V \subset E_n$ такая, что $T_p^n V \subseteq U$. Так как $V \cap F$ — конечномерный эллипсоид по норме $|\cdot|_n$, он может быть записан в декартовых координатах в форме $\sum\limits_i a_i^2 z_i^2 \leq \gamma^2$, при этом $\sum\limits_i a_i^2 \leq \|T_p^n\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — норма пространства операторов Гильберта–Шмидта.

По лемме 1 получим

$$m(A^c) = \widetilde{m}_F(\tau_F \rho_F(A^c)) = \widetilde{m}_F(B) \leq \widetilde{m}_F(S_n^c) \leq \beta^2 \left(\frac{\varepsilon}{2\beta^2} + \frac{2}{\gamma^2 r^2} \sum_i a_i^2 \right) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\beta^2}{\gamma^2 r^2} \|T_p^n\|_2^2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

отсюда $m(A) > 1 - \varepsilon$.

Мы доказали, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ такого, что $A \supset U_n(r)$, $m(A) > 1 - \varepsilon$, но тогда для продолжения меры m получим $\mu(U_n(r)) \geq 1 - \varepsilon$. $\square$

2. Векторнозначные обобщенные случайные процессы

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и связанной с ним нормой $\|\cdot\|_H$. Обозначим через $E'(H)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в H, и назовем $E'(H)$ пространством распределений (обобщенных функций) над E со значениями в H. Действие $\omega \in E'(H)$ на $\xi \in E$ обозначим через $\omega(\xi)$. Справедливо следующее

Предложение 1. *Для любого $\omega \in E'(H)$ существуют $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $C > 0$ такие, что для любого $\xi \in E$ верно равенство $\|\omega(\xi)\|_H \leq C\|\xi\|_p$.*

Здесь число p называют порядком распределения ω.

Если $\omega \in E'(H)$ имеет порядок p, то $\omega \in E_{-p}(H) := \mathcal{L}(E_p; H)$. Обозначим через $\|\cdot\|_{-p}$ норму этого пространства. Из неравенств $|\xi|_1 \leq |\xi|_2 \leq |\xi|_3 \leq \cdots$ и предложения 1 следуют вложения

$$\mathcal{L}(L^2(T); H) \subset E_{-1}(H) \subset E_{-2}(H) \subset \cdots \subset E_{-p}(H) \subset E'(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_{-p}(H).$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H. Для любого $\omega \in E'(H)$ положим $\langle \omega_i, \xi \rangle = (\omega(\xi), e_i)_H$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда $\omega_i \in E'$. Любое распределение $\omega \in E'(H)$ однозначно представимо в виде $\omega = \sum\limits_{i=1}^\infty \omega_i \otimes e_i$.[1] При этом, если ω имеет порядок p, то $\omega_i \in E_{-p}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Действительно, если существуют $C > 0$ и $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что

$$\forall \xi \in E \quad \|\omega(\xi)\|_H^2 = \sum_{i=1}^\infty |\langle \omega_i, \xi \rangle|^2 \leq C^2 |\xi|_p^2,$$

то $|\langle \omega_i, \xi \rangle| \leq C|\xi|_p$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{N}_m = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 < \cdots < \alpha_m\}$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{m=1}^\infty \mathcal{N}_m$. Положим $H_\alpha = \mathrm{Sp}\,\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_m}\}$ и пусть $E'(H_\alpha)$ — подпространство пространства $E'(H)$, элементами которого являются распределения со значениями в H_α. Обозначим через P_α ортогональный проектор $E'(H)$ на $E'(H_\alpha)$. Так как любой элемент $E'(H_\alpha)$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^m \omega_{\alpha_i} \otimes e_{\alpha_i}$, то $E'(H_\alpha)$ изоморфно $E'^m = E' \times E' \times \cdots \times E'$. Пусть $T_\alpha : E'(H_\alpha) \to E'^m$ — изоморфизм.

[1] $\forall x \in E'$, $y \in H$ $\;x \otimes y \in E'(H) : \forall \xi \in E \;(x \otimes y)(\xi) := \langle x, \xi \rangle y$.

Пусть $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность функционалов на E, для которых выполнены условия (C-I), (C-II) и (C-III). Обозначим через μ_i, $i = 1, 2, \ldots$, вероятностную меру на измеримом пространстве $(E', \mathfrak{B})$, удовлетворяющую условию

$$\int_{E'} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\mu_i(x) = C_i(\xi),$$

существование которой устанавливает теорема Бохнера–Минлоса. Пусть $\mathfrak{B}^{\otimes m}$ — прямое произведение σ-алгебр, $m_\alpha = \mu_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{\alpha_m}$ — прямое произведение мер, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{B}^{\otimes m}$. Таким образом, последовательность $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ порождает семейство пространств с мерой $\{(E'^m, \mathfrak{B}^{\otimes m}, m_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{N}\}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\alpha$ систему подмножеств A пространства $E'(H)$, имеющих вид

$$A = A_\alpha(D) = P_\alpha^{-1} T_\alpha^{-1}(D), \quad \alpha \in \mathcal{N}, \quad D \in \mathfrak{B}^{\otimes m}. \tag{1}$$

Положим $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{N}} \mathcal{A}_\alpha$. В силу того, что $\mathcal{A}_\alpha$ является σ-алгеброй для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, $\mathcal{A}$ является алгеброй подмножеств $E'(H)$. Однако $\mathcal{A}$ не является, вообще говоря, σ-алгеброй.

Определим на $\mathcal{A}$ меру m, положив $m(A) = m_\alpha(D)$ для любого $A \in \mathcal{A}$, где $\alpha \in \mathcal{N}$, так, что $A \in \mathcal{A}_\alpha$ и имеет место (1). Легко проверить, что $m(A)$ не зависит от выбора α в представлении (1) и что m конечно-аддитивна.

Обозначим через $\mathcal{B}$ минимальную σ-алгебру подмножеств $E'(H)$, содержащую $\mathcal{A}$. Ниже докажем, что при определенных условиях на последовательность $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ существует единственное продолжение m с $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Для этого достаточно доказать, что при этих условиях m σ-аддитивна, причем на самом деле достаточно доказать σ-аддитивность сужения m на более узкий класс подмножеств $E'(H)$, чем $\mathcal{A}$. Опишем его.

Пусть $\mathcal{A}_{\alpha,F}$ — система подмножеств пространства $E'(H)$, имеющих вид (1). Здесь D — множество специального вида, а именно, $D = D_1 \times \cdots \times D_m$, где $D_i \in \mathfrak{A}_F$, F — конечномерное подпространство пространства E. Из определения $\mathfrak{A}_F$ следует, что такое множество представимо в виде

$$A = \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\middle|\, (\langle \omega_{\alpha_i}, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle \omega_{\alpha_i}, \xi_n \rangle) \in B_i, \ i = 1, \ldots, m \right\}, \tag{2}$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ — базис F, а $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, m$.

Положим

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcup_{\substack{F \subset E, \\ \dim F < \infty}} \mathcal{A}_F^\alpha.$$

Очевидно, $\widetilde{\mathcal{A}}$ является полукольцом с единицей. Обозначим через $\widehat{\mathcal{A}}$ минимальную алгебру подмножеств $E'(H)$, содержащую $\widetilde{\mathcal{A}}$. Ее элементами являются всевозможные конечные объединения множеств из $\widetilde{\mathcal{A}}$. При этом минимальная σ-алгебра, содержащая $\widehat{\mathcal{A}}$, включает $\mathcal{A}$ и, значит, совпадает с минимальной σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$, поэтому для доказательства существования продолжения меры m на $\mathcal{B}$ достаточно доказать σ-аддитивность сужения m на $\widehat{\mathcal{A}}$.

Заметим, что система подмножеств $E'(H)$ вида (2), где B_i, $i = 1, \ldots, m$, — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, определяет в $E'(H)$ топологию. Легко проверить, что последовательность $\{\omega^{(k)}(\xi)\}_{k=1}^{\infty} \subset E'(H)$ сходится к $\omega \in E'(H)$ в смысле этой топологии тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in E$ последовательность $\{\omega^{(k)}(\xi)\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится в H. Договоримся называть топологию, определяемую окрестностями вида (2), топологией поточечной слабой сходимости.

Лемма 3. *Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность в $\mathbb{R}$ такая, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$. Тогда множество*

$$M_p = \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\middle|\, |\omega_i|_{-p} \le \sqrt{\lambda_i}, \ i = 1, 2, \ldots \right\},$$

где $p \in \mathbb{N}$, компактно в топологии поточечной слабой сходимости.

Доказательство. Пусть $\{\omega^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset M_p$, $\omega^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i^{(k)} \otimes e_i$. Докажем, что из $\{\omega^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, поточечно слабо сходящуюся к некоторому элементу $\omega \in M_p$.

Рассмотрим $\{\omega_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Шар $U_{-p}(\sqrt{\lambda_i}) = \{x \in E' \,|\, |x|_{-p} \le \sqrt{\lambda_1}\}$ слабо компактен в E', поэтому существует подпоследовательность $\{\omega_1^{(k_i^{(1)})}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{\omega_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к некоторому $\omega_1 \in U_{-p}(\sqrt{\lambda_1})$. Далее рассмотрим $\{\omega_2^{(k_i^{(1)})}\}_{i=1}^{\infty}$. Аналогичным образом из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{\omega_2^{(k_i^{(2)})}\}_{i=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся в E' к некоторому $\omega_2 \in U_{-p}(\sqrt{\lambda_2})$. На n-м шаге этого процесса получим подпоследовательность $\{\omega_n^{(k_i^{(n)})}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{\omega_n^{(k_i^{(n-1)})}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся в E' слабо к некоторому $\omega_n \in U_{-p}(\sqrt{\lambda_n})$.

В силу оценки $|\langle \omega_i, \xi\rangle|^2 \le (\|\omega_i\|_{-p}\|\xi\|_p)^2 \le \lambda_i \|\xi\|_p^2$ для любого $\xi \in E$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle \omega_i, \xi\rangle|^2 < \infty$. Значит, оператор $\omega = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i$ определен на всем E. При этом $\|\omega(\xi)\|_H^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle \omega_i, \xi\rangle|^2 \le (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i)\|\xi\|_p^2$, следовательно, ω — непрерывный оператор, а значит, $\omega \in E'_{-p}(H) \subset E'(H)$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{\omega^{(k_1^{(i)})}\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{\omega^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем, что она поточечно слабо сходится к ω. Пусть $\xi \in E$, $x \in H$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle| \le |\langle \omega_j^{(k_1^i)}, \xi\rangle| + |\langle \omega_j, \xi\rangle| \le 2\sqrt{\lambda_j}\|\xi\|_p, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle|^2$, а значит, найдется $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{j=N_1+1}^{\infty} |\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|_H^2}.$$

Пусть теперь $N \in \mathbb{N}$, $N > N_1$, такое, что

$$|\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N_1}\|x\|_H} \quad \forall j = 1, \ldots, N_1, \quad i > N.$$

Тогда для любого $i > N$ получим

$$\begin{aligned}
|(\omega^{(k_1^i)}(\xi), x)_H - (\omega(\xi), x)_H| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle (x, e_j)_H\right| \le \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)_H|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N_1} |\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle|^2 + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} |\langle \omega_j^{(k_1^i)} - \omega_j, \xi\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_H \le \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N_1}\|x\|_H} + \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|_H^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_H = \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 4. *Для того чтобы конечно-аддитивная мера m, заданная на алгебре $\widehat{\mathcal{A}}$, была σ-аддитивной, достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое множество*

$$M_\gamma = \left\{\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\Big|\, |\omega_i|_{-p} \le \gamma\sqrt{\lambda_i}, \ i = 1, 2, \ldots\right\},$$

что для любого $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ такого, что $A \cap M_\gamma = \emptyset$, выполнялось $m(A) < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \widehat{\mathcal{A}}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = E'(H)$. Так как $m(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i) \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq 1$. Предположим, мера m не является σ-аддитивной, тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) = 1 - 3\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Для любого A_i справедливо разложение $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} A_{ij}$, где $A_{ij} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Для любого множества A_{ij} возьмем открытое (в смысле топологии поточечной слабой сходимости) множество $A'_{ij} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ такое, что $m(A'_{ij} \setminus A_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i n_i}$. Для этого достаточно подходящим образом изменить борелевские множества B_i в представлении A_{ij} вида (2). Пусть $\gamma > 0$ таково, что для любого $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ из $A \cap M_\gamma = \emptyset$ следует $m(A) < \varepsilon$. Множества A'_{ij}, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots$, образуют открытое покрытие M_γ. Из компактности M_γ в топологии поточечной слабой сходимости следует существование конечного подпокрытия. Без ограничения общности можно считать, что оно имеет вид $\{A'_{ij} \mid j = 1, \dots, n_i,\ i = 1, \dots n\}$. Но это означает $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i \supset M_\gamma$. Обозначим $A' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i$. Имеем $A' \in \widehat{\mathcal{A}}$, при этом

$$m(A') = m(\bigcup_{i=1}^{n} A'_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A'_i) < \sum_{i=1}^{\infty} m(A'_i) = \sum_{i=1}^{n} (m(A_i) + m(A'_i \setminus A_i)) < 1 + 2\varepsilon.$$

Пусть $A = \Omega \setminus A'$. Имеем $A \in \widehat{\mathcal{A}}$, $A \cap M_\gamma = \emptyset$. Значит, $m(A) < \varepsilon$. Получаем $1 = m(E') = m(A) + m(A') < \varepsilon + 1 - 2\varepsilon = 1 + \varepsilon$. Противоречие. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность функционалов на E, удовлетворяющих условиям* (C-I), (C-II) *и* (C-III), *причем все C_i непрерывны по одной норме $|\cdot|_p$. Пусть последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$ и выполнено условие*

$$\|\xi\|_{E_0} < \frac{\delta}{\lambda_i} \ \Rightarrow\ |C_i(\xi) - 1| < \varepsilon\lambda_i \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\xi \in E,\ i \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Если для некоторого n ($> p$) вложение $T_p^n : E_n \to E_p$ является оператором Гильберта–Шмидта, то существует единственное продолжение μ меры m с $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию теоремы найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\|\xi\|_{E_0} < \frac{\delta}{\lambda_i} \ \Rightarrow\ |C_i(\xi) - 1| < \frac{\varepsilon\lambda_i}{2\beta^2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i} \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\xi \in E,\ i \in \mathbb{N}.$$

Тогда по лемме 2 для шара $U_n(r_i)$ в пространстве E_{-n} с $r_i = 2\beta\|T_p^n\|_2 (\frac{\lambda_i \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i}{\delta^2\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$ справедливо неравенство $\mu_i(U_n(r_i)) \geq 1 - \frac{\varepsilon\lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i}$, а значит, $\mu_i(U_n(r_i)^c) \leq \frac{\varepsilon\lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i}$. Пусть $\gamma = 2\beta\|T_p^n\|_2 (\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i}{\delta^2\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$. Рассмотрим соответствующее множество

$$M_\gamma = \Big\{\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\Big|\, |\omega_i|_{-p} \leq \gamma\sqrt{\lambda_i},\ i = 1, 2, \dots\Big\}.$$

Пусть $A \in \widehat{\mathcal{A}}$, $A \cap M_\gamma = \emptyset$. Тогда A представимо в виде конечного объединения $A = \bigcup\limits_{j=1}^{q} A_j$, где $A_j \in \widetilde{\mathcal{A}}$ ($A_j \cap M_\gamma = \emptyset$), $j = 1, \dots, q$, при этом найдутся такой $\alpha \in \mathcal{N}$ и конечномерное подпространство $F \subset E$, что $A_j \in \mathcal{A}_{\alpha,F}$, $j = 1, \dots, q$. Таким образом, множества A_j могут быть представлены в виде

$$A_j = \Big\{\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\Big|\, (\langle\omega_{\alpha_i}, \xi_1\rangle, \dots, \langle\omega_{\alpha_i}, \xi_n\rangle) \in B_{ij},\ i = 1, \dots, m\Big\},$$

где $B_{ij} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ — базис F. Для любого A_j справедливо вложение $A_j \subset \bigcup\limits_{i=1}^m M_{\alpha_i,\gamma}$, где

$$M_{\alpha_i,\gamma} = \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \otimes e_i \in E'(H) \,\Big|\, |\omega_{\alpha_i}|_{-p} > \gamma\sqrt{\lambda_{\alpha_i}} \right\}, \quad M_{\alpha_i,\gamma} \in \mathcal{A}.$$

Действительно, если это не так, то найдется $\omega \in A_j$ такой, что для всех $i = 1, \ldots, m$ будем иметь $|\omega_{\alpha_i}|_{-p} \le \gamma\sqrt{\lambda_{\alpha_i}}$. Так как при этом выполнены включения $(\langle \omega_{\alpha_i}, \xi_1\rangle, \ldots, \langle \omega_{\alpha_i}, \xi_n\rangle) \in B_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, то, положив, например,

$$\omega'_k = \begin{cases} \omega_{\alpha_i}, & \text{при } k = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m; \\ 0, & \text{при } k \ne \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

получим $\omega' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega'_k \otimes e_k \in A_j \cap M_\gamma$. Противоречие.

Таким образом, имеем $A = \bigcup\limits_{j=1}^q A_j \subset \bigcup\limits_{i=1}^m M_{\alpha_i,\gamma}$, следовательно, $m(A) \le \sum\limits_{i=1}^m m(M_{\alpha_i,\gamma}) \le \sum\limits_{i=1}^m m_{\alpha_i}(U_n(r_{\alpha_i})^c) \le \sum\limits_{i=1}^m \frac{\varepsilon\lambda_{\alpha_i}}{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j} < \varepsilon$. $\square$

Пример 2. Пусть $E = S$, где S — пространство Шварца быстро убывающих функций. Тогда $E_0 = L^2(\mathbb{R})$, $E' = S'$, $E'(H) = S'(H)$. Пусть последовательность $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2/3} < \infty. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность функционалов на S вида $C_i(\xi) = e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}$. Каждый из них является характеристическим функционалом вероятностной меры μ_i на σ-алгебре $\mathfrak{B}(S')$ (см. пример 1).

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $\xi \in S$ так, что $\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \dfrac{\sqrt{2\varepsilon}}{\sigma_i^{2/3}}$. Тогда $\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon\sigma_i^{2/3}$. Так как при $0 < x < 1$ верно неравенство $x < -\ln(1-x)$, имеем $\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < -\ln(1-\varepsilon\sigma_i^{2/3})$. Отсюда получим $\ln(1-\varepsilon\sigma_i^{2/3}) < -\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le 0 < \ln(1+\varepsilon\sigma_i^{2/3})$ и, окончательно, $1-\varepsilon\sigma_i^{2/3} < e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} < 1+\varepsilon\sigma_i^{2/3}$, т. е. $|e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} - 1| < \varepsilon\sigma_i^{2/3}$.

Условие (3) для последовательности $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ выполнено с $\lambda_i = \sigma_i^{2/3}$.

Пусть μ_Σ — вероятностная мера на $\mathcal{B}$, соответствующая данной последовательности $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$. Рассмотрим вероятностное пространство $(S'(H), \mathcal{B}, \mu_\Sigma)$. Пусть Σ — оператор в H, заданный равенством $\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 e_i \otimes e_i$. Из (4) следует $\operatorname{Tr}\Sigma < \infty$.

Заметим, что для любых $\xi \in S$ и $h \in H$ и произвольного мультииндекса $\alpha^{(n)} = (1, \ldots, n)$ справедливо равенство

$$\int_{S'(H)} E(e^{i(\omega(\xi),h)_H} \mid \mathcal{A}_{\alpha^{(n)}})d\mu(\omega) = \int_{S'(H)} e^{i\left(\sum\limits_{i=1}^n \langle \omega_i, \xi\rangle e_i, h\right)_H} dm_{\alpha^{(n)}}(\omega) =$$

$$= \prod_{i=1}^n \int_{S'} e^{i\langle \omega_i, h_i\xi\rangle} dm_i(\omega_i) = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^2 h_i^2 \|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\sum\limits_{i=1}^n \sigma_i^2 h_i^2}.$$

Так как σ-алгебры $\mathcal{A}_{\alpha^{(n)}}$ монотонно расширяются при $n \to \infty$, а $\mathcal{B}$ — минимальная содержащая их σ-алгебра, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_{S'(H)} e^{i(\omega(\xi),h)_H} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}(\Sigma h,h)_H}.$$

Отсюда следует, что для любого $\xi \in S$ функция $\overline{\xi} : S'(H) \to H$, определенная равенством $\overline{\xi}(\omega) = \omega(\xi)$, $\omega \in S'(H)$, является H-значной гауссовской случайной величиной с $E(\overline{\xi}) = 0$ и ковариационным оператором $\mathrm{Cov}\,(\overline{\xi}) = \|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\Sigma$. При этом, если ξ_1 и $\xi_2 \in S$ ортогональны, в частности, если $\mathrm{Supp}\,\xi_1 \cap \mathrm{Supp}\,\xi_2 = \emptyset$, то соответствующие $\overline{\xi}_1$ и $\overline{\xi}_2$ независимы. Поэтому естественно назвать $(S'(H), \mathcal{B}, \mu_\Sigma)$ пространством H-значного белого шума, а обобщенный случайный процесс, определенный на нем равенством $\mathbb{W}(\xi, \omega) := \omega(\xi)$, — белым шумом со значениями в H.

Литература

1. Oksendal B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications.* – Springer-Verlag, 1991. – 224 p.
2. Виленкин Н.Я., Гельфанд И.М. *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции.* Вып. 4. – М.: Физматгиз, 1961. – 388 с.
3. Zabczyk J. DaPrato G. *Stochastic equations in infinite dimentions.* – Cambridge Univ. Press, 1992. – 451 p.
4. Hida T. *Brownian motion* // Appl. Math. – New York: Springer-Verlag, 1980. – V. 11. – 326 p.

Уральский государственный технический университет

Поступила 26.12.2000