ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763

Г.А. ТОЛСТИХИНА, А.М. ШЕЛЕХОВ

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИМИ ТРИ-ТКАНИ

Введение. Три-ткани, образованные слоениями разных размерностей, впервые рассматривались в [1]. Структурная теория таких тканей была построена в [2]. В [3] рассмотрены также некоторые специальные классы тканей, определяемые специальными соотношениями на тензоры, входящие в структурные уравнения тканей. В [4]–[6] удалось обобщить для тканей $W(p,q,p+q-1)$ основные понятия классической теории, т. е. ввести аналог координатной лупы ткани, обобщить конфигурацию Рейдемейстера и т. д. Класс тканей, на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера R, является геометрическим эквивалентом так называемых бинарных физических структур [7]. Ткани WR характеризуются наличием специального соотношения, связывающего параметры слоев третьего слоения, входящих в произвольную обобщенную конфигурацию R. В [4] это соотношение названо сердцевиной, поскольку оно обобщает введенное в [8] соответствующее понятие в теории классических тканей Бола. (В теории физических структур сердцевина называется феноменологически инвариантной формой физического закона.) В работах, посвященных теории физических структур (см. [9], а также список работ в [10]), сердцевина найдена только для некоторых физических структур, соответствующих три-тканям, третье слоение которых состоит из гиперподмногообразий. При этом геометрический смысл сердцевины оставался неясным. В [6] было показано, что сердцевина ткани, определяемая группой преобразований, представляет собой равенство двух инвариантов группы. В данной работе найдены сердцевины тканей, определяемых аффинной и проективной группами.

1. Найдем точечные инварианты группы аффинных преобразований плоскости. С тремя точками плоскости, не лежащими на одной прямой, невозможно связать никакого аффинного инварианта. Зафиксируем на плоскости четыре точки y_1, y_2, y_3 и y_4, и пусть y_5 — точка пересечения диагоналей y_1y_3 и y_2y_4 четырехугольника $y_1y_2y_3y_4$. Обозначим через S_{123} площадь треугольника с вершинами y_1, y_2, y_3, через S_{124} — площадь треугольника с вершинами y_1, y_2, y_4 и т. д. Отношение площадей S_{125} и S_{123} этих треугольников является аффинным инвариантом, т. к. оно равно отношению их оснований:

$$\frac{S_{125}}{S_{123}} = \frac{y_1y_5}{y_1y_3}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, найдем еще три аффинных инварианта:

$$\frac{S_{125}}{S_{124}}, \quad \frac{S_{345}}{S_{234}}, \quad \frac{S_{345}}{S_{134}}.$$

Исключая из этих выражений площади S_{125} и S_{345}, получим два следующих инварианта:

$$\frac{S_{123}}{S_{124}}, \quad \frac{S_{134}}{S_{234}}.$$

Таким образом, аффинная группа на плоскости имеет два четырехточечных инварианта.

2. Найдем далее точечные инварианты группы проективных преобразований плоскости. С четырьмя точками плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, невозможно связать никакой проективный инвариант, не равный -1. Зафиксируем на плоскости пять точек y_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$. Пусть h_1 и h_3 — перпендикуляры, опущенные из точки y_1 на прямые y_2y_3 и y_2y_5 соответственно, h_2 и h_4 — перпендикуляры, опущенные на те же прямые из точки y_4 (см. рис. 1).

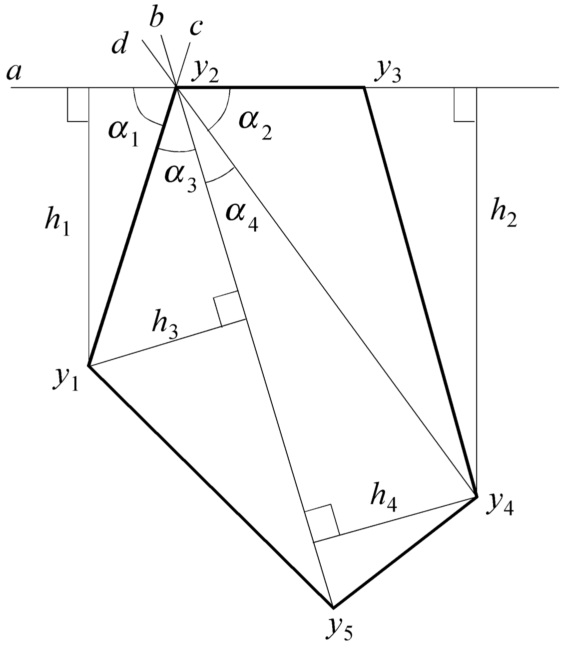

Рис. 1

Пусть, как и выше, S_{ijk} — площадь треугольника с вершинами y_i, y_j, y_k. Покажем, что выражение

$$\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}}$$

является проективным инвариантом. Как видно из рисунка 1, справедливо равенство

$$\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}} = \frac{h_1h_4}{h_2h_3}.$$

Обозначим через α_1, α_2, α_3, α_4 углы при вершине y_2: $\alpha_1 = (c, a)$, $\alpha_2 = (d, a)$, $\alpha_3 = (c, b)$, $\alpha_4 = (d, b)$ (см. рис. 1). Находя высоты h_1, h_2, h_3, h_4 из соответствующих прямоугольных треугольников и подставляя их в последнее равенство, получим

$$\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}} = \frac{\sin(c, a)\sin(d, b)}{\sin(d, a)\sin(c, b)}.$$

Выражение справа, как известно, является проективным инвариантом — сложным отношением четверки прямых a, b, c, d. Аналогичным образом найдем еще один проективный инвариант

$$\frac{S_{123}S_{524}}{S_{523}S_{124}}.$$

Можно показать, что другие инварианты, связанные с рассматриваемыми пятью точками, выражаются через найденные два. Таким образом, проективная группа преобразований плоскости имеет всего два пятиточечных инварианта.

Нам понадобится аналитическое доказательство этого факта. При проективном преобразовании $\rho z^i = a^i_j y^j$, $i, j, \ldots = 1, 2, 3$, точки $y_\alpha(y^j_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$, перейдут в точки $z_\alpha(z^i_\alpha)$: $\rho_\alpha z^i_\alpha = a^i_j y^j_\alpha$.

Пусть S'_{ijk} — площадь треугольника с вершинами z_i, z_j, z_k. Тогда справедливы равенства $\rho_1\rho_2\rho_3 S'_{123} = AS_{123}$, $\rho_1\rho_2\rho_4 S'_{124} = AS_{124}$, где

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Для других наборов индексов получаем

$$\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}\rho_{\alpha_3} S'_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = AS_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \tag{1}$$

$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$. В силу (1) выражения

$$\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}}, \quad \frac{S_{123}S_{524}}{S_{523}S_{124}}$$

являются проективными инвариантами.

3. Полученные результаты можно обобщить на многомерный случай.

Теорема 1 ([11]). *$p(p+1)$-мерная аффинная группа $A_p z^i = a^i_j y^j + a^i$ имеет ровно p независимых $(p+2)$-точечных инварианта*

$$\frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})},$$
$$\frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})},$$

где $V(y_i, y_j, \dots, y_t)$ — объем полиэдра с вершинами $y_i, y_j, \dots, y_t$.

Теперь найдем точечные инварианты группы проективных преобразований P_p:

$$\rho z^i = a^i_j y^j, \quad i, j, \ldots = 1, 2, \dots, p+1.$$

Пусть при этом преобразовании точки $y_\alpha(y^1_\alpha, y^2_\alpha, \dots, y^{p+1}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, 2p+1$, переходят в точки $z_\alpha(z^1_\alpha, z^2_\alpha, \dots, z^{p+1}_\alpha)$, тогда $\rho_\alpha z^i_\alpha = a^i_j y^j_\alpha$. Обозначим, как и выше, через $V_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}$ объем полиэдра с вершинами $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha_{p+1}}$, а через $V'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}$ — объем полиэдра с вершинами $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \dots, z_{\alpha_{p+1}}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_{p+1}$. Тогда справедливы равенства

$$\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}\dots\rho_{\alpha_{p+1}} V'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}} = AV_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}, \tag{2}$$

где $A = \det(a^i_j)$. Отношение

$$\frac{V'_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V'_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}{V'_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V'_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}$$

в силу (2) является проективным инвариантом:

$$\frac{V'_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V'_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}{V'_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V'_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}} = \frac{V_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}{V_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}} V_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}. \tag{3}$$

Можно показать, что независимых инвариантов такого вида будет ровно p. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Группа проективных преобразований P_p имеет ровно p независимых $(2p+1)$-точечных инварианта.*

4. Как показано в [6], с произвольной группой преобразований G можно связать три-ткань многомерных поверхностей. Напомним определение такой ткани.

Пусть группа Ли G размерности q действует на гладком p-мерном многообразии Y, т. е. задана гладкая функция

$$f : G \times Y \to Y, \quad z = f(a, y), \tag{4}$$

удовлетворяющая условиям $f(e, y) = y$, $f(a, f(b, y)) = f(\phi(a, b), y)$, где e — единица группы G, а $\phi(a, b)$ — операция в группе G. Уравнения (4) определяют три-ткань, образованную слоениями $\lambda_1 : a = \mathrm{const}$, $\lambda_2 : y = \mathrm{const}$, $\lambda_3 : z = f(a, y) = \mathrm{const}$ соответственно размерностей p, q и q на прямом произведении $M = G \times Y$. Обозначим эту ткань, как и в [6], через $GW(p, q, q)$. На рисунках слоения ткани $GW(p, q, q)$ будем изображать соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями. Переменные a, y и z, входящие в уравнение (4), можно считать также параметрами на вертикальном, горизонтальном и наклонном слоениях. Равенство (4), связывающее параметры слоев, проходящих через одну точку многообразия M, будем рассматривать как бинарную операцию. Назовем ее, следуя [6], координатным группоидом ткани $GW(p, q, q)$.

Как показано в [6], три-ткани $GW(p, q, q)$ характеризуются тем, что на них и только на них замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера $R(1, m)$, $m = [q/p]$. Произвольная конфигурация $R(1, m)$ на три-ткани $GW(p, q, q)$ содержит $2(m+1)$ наклонных слоев с параметрами $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1m+1}$; $z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2m+1}$ (см. рис. 2). Замыкание конфигураций $R(1, m)$ означает, что эти параметры связаны некоторым соотношением

$$\Phi^{\xi}(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1m+1}; z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2m+1}) = 0, \quad \xi = 1, 2, \ldots, p,$$

которое назовем сердцевиной три-ткани $GW(p, q, q)$ [6].

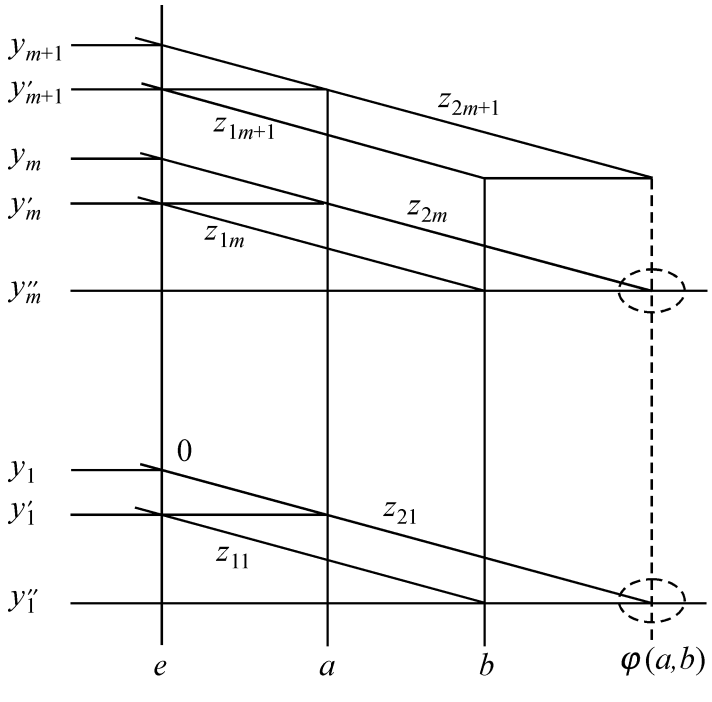

Рис. 2

Теорема 3 ([6]). *Сердцевина три-ткани $GW(p, q, q)$ может быть записана в виде*

$$F^{\xi}(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1m+1}) = F^{\xi}(z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2m+1}),$$

где $\xi = 1, 2, \ldots, p$, $m = [q/p]$, а F^{ξ} — инварианты группы G.

Найдем сердцевины три-тканей , определяемых аффинной и проективной группами преобразований. Сначала рассмотрим три-ткань, определяемую аффинной группой A_p на многообразии $M = A_p \times Y$ размерности $p(p+2)$. Обозначим такую ткань через A_pW. Она образована тремя слоениями λ_1, λ_2 и λ_3 размерностей $p, p(p+1)$ и $p(p+1)$ соответственно. Найдем сердцевину этой ткани.

Для этого рассмотрим уравнения, связывающие координаты точек y_α многообразия Y и их образов z_α при аффинном преобразовании с некоторым набором параметров [11]

$$\begin{gathered}\frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})},\\ \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-2}, z_p, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_{p+1}, z_{p+2})}.\end{gathered} \tag{5}$$

Пусть $\overline{z}_\alpha(\overline{z}_\alpha^1, \overline{z}_\alpha^2, \dots, \overline{z}_\alpha^p)$ — образы точек y_α при другом наборе параметров. Тогда получим аналогичные равенства

$$\begin{gathered}\frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p+1})}{V(\overline{z}_2, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})},\\ \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_2, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}{V(\overline{z}_1, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})},\\ \dots\dots\dots\\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p-2}, \overline{z}_p, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p-1}, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}.\end{gathered} \tag{6}$$

Исключая из уравнений (5) и (6) переменные y_α, найдем сердцевину рассматриваемой три-ткани A_pW

$$\begin{gathered}\frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p+1})}{V(\overline{z}_2, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})},\\ \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_2, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}{V(\overline{z}_1, \overline{z}_3, \dots, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})},\\ \dots\dots\dots\\ \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-2}, z_p, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_{p+1}, z_{p+2})} = \frac{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p-2}, \overline{z}_p, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}{V(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \dots, \overline{z}_{p-1}, \overline{z}_{p+1}, \overline{z}_{p+2})}.\end{gathered}$$

Теперь найдем сердцевину три-ткани P_pW, определяемой проективной группой P_p на многообразии Y. Пусть z_α — образы точек y_α при проективном преобразовании с некоторым набором параметров и, как и выше, $V'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}$ — объем полиэдра с вершинами $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \dots, z_{\alpha_{p+1}}$ (см. уравнения (3)). Далее, пусть $\overline{z}_\alpha$ — образы точек y_α при другом наборе параметров, а $\overline{V}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p+1}}$ — объем полиэдра с вершинами $\overline{z}_{\alpha_1}, \overline{z}_{\alpha_2}, \dots, \overline{z}_{\alpha_{p+1}}$. Тогда получим уравнения, аналогичные уравнениям (3)

$$\frac{\overline{V}_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}}\overline{V}_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}{\overline{V}_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}}\overline{V}_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}} = \frac{V_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}}V_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}{V_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\dots\beta_{p-1}}V_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{p-1}}}. \tag{7}$$

Исключая из уравнений (3) и (7) переменные y_α, получим уравнения сердцевины рассматриваемой три-ткани P_pW

$$\frac{\overline{V}_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}}\overline{V}_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{p-1}}}{\overline{V}_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}}\overline{V}_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{p-1}}}=\frac{V'_{\delta\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}}V'_{\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{p-1}}}{V'_{\gamma\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}}V'_{\delta\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{p-1}}}.$$

Найденные сердцевины вполне определяют рассмотренные выше три-ткани.

Литература

1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей.* – М.: Изд-во физ.-матем. литературы, 1959. – 144 с.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей* // Тр. геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1973. – Т. 4. – С. 179–204.
3. Гольдберг В.В. *Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей* // Сб. статей по дифференц. геометрии. – Калинин: Калининск. ун-т, 1974. – С. 52–69.
4. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О три-тканях $W(p,q,p+q-1)$, на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера.* – М., 2001. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.08.01, № 1869-В2001.
5. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383. – № 1. – С. 32–33.
6. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Три-ткани, определяемые группами преобразований* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385. – № 4. – С. 1–3.
7. Кулаков Ю.И. *О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201. – № 3. – С. 570–572.
8. Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* – М., 1967. – 223 с.
9. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.* – М., 1992. – 182 с.
10. Михайличенко Г.Г. *Групповые свойства физических структур*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1990. – 25 с.
11. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Три-ткань, определяемая аффинной группой преобразований* // Ткани и квазигруппы. Межвуз. темат. сб. научн. тр. – Тверск. ун-т, 2002. – С. 46–49.

Тверской государственный университет

Поступила
19.06.2002