ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 511.56

А.А. ВЬЯЛИЦИН

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ГРУПП

Рассматривается система линейных диофантовых неравенств

$$\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}\rangle \le b_i, \quad i = 1, \dots, l; \tag{1}$$

$$\mathbf{x} \in Z^n, \tag{2}$$

где Z^n — множество целочисленных векторов арифметического пространства R^n, $\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}\rangle$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}^i$, $\mathbf{x}$.

Предполагается, что множество решений системы неравенств (1) непусто и ограничено. Условие (2) — это инвариант группы движений целочисленной решетки Z^n. Поэтому есть смысл применить методы теории групп при исследовании системы (1), (2).

Пусть Λ^0 — группа подстановок на множестве $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через $\mathbf{x}\lambda = (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n)})$ результат действия подстановки $\lambda = (\lambda(1), \dots, \lambda(n))$ на вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. В этом смысле группа Λ^0 — это конечная подгруппа группы движений целочисленной решетки и одновременно конечная подгруппа ортогональной группы.

Вначале симметризуем систему (1). Положим $C = \{\mathbf{a}^i\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda^0,\ i = 1, \dots, l\} = \{\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^m\}$; $\mathbf{c}^i = \mathbf{a}^i$, $i = 1, \dots, l$. Определим числа d_i следующим образом. Если $i = 1, \dots, l$, то $d_i = b_i$; если $i = l+1, \dots, m$, то $d_i = \max\{\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{x}\rangle \mid \langle \mathbf{a}^k, \mathbf{x}\rangle \le b_k,\ k = 1, \dots, l\}$. Система

$$\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{x}\rangle \le d_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

эквивалентна системе (1). По определению множество C симметрично по группе Λ^0, т.е. $C\Lambda^0 = \{\mathbf{c}^i\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda^0,\ i = 1, \dots, m\} = C$. Будем говорить, что системы (3) и (2), (3) симметричны по группе Λ^0. Если система симметрична по группе Λ^0, то она симметрична по любой ее подгруппе.

Действие группы Λ^0 переставляет векторы $\mathbf{c}^i$. Подстановке $\lambda \in \Lambda^0$ соответствует подстановка $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(m))$ такая, что $\mathbf{c}^i\lambda = \mathbf{c}^{\pi(i)}$. Множество таких подстановок образует группу Π^0 подстановок на множестве $\{1, \dots, m\}$, порожденную группой Λ^0 и множеством C.

Лемма 1. *Группы Λ^0, Π^0 изоморфны.*

Доказательство. Так как множество решений системы (3) непусто и ограничено, то множество C содержит n линейно независимых векторов. Пусть это будут векторы $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^n$. Отображение Λ^0 на Π^0 — это гомоморфизм. Пусть λ принадлежит ядру гомоморфизма. Представляя любой вектор $\mathbf{x} \in R^n$ линейной комбинацией векторов $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^n$, получим

$$\mathbf{x}\lambda = \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{c}^i\Big)\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathbf{c}^i\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{c}^i = \mathbf{x}.$$

Следовательно, ядро гомоморфизма содержит лишь единицу группы Λ^0. Поэтому группы Λ^0, Π^0 изоморфны. □

Пусть $\Lambda \le \Lambda^0$; Π — группа подстановок, порожденная подгруппой Λ и множеством C. Обозначим: P_k, $k = 1, \ldots, p$, — орбиты группы Λ в множестве $\{1, \ldots, n\}$; Q_r, $r = 1, \ldots, q$, — орбиты группы Π в множестве $\{1, \ldots, m\}$; $j(k) = \min\{j \mid j \in P_k\}$; $f_k^r = \sum\limits_{i \in Q_r} c_{j(k)}^i$; $\mathbf{f}^r = (f_1^r, \ldots, f_p^r)$; $g_r = \sum\limits_{i \in Q_r} d_i$.

Запишем следующую систему линейных диофантовых неравенств:

$$\langle \mathbf{f}^r, \mathbf{y} \rangle \le g_r \quad r = 1, \ldots, q; \tag{4}$$

$$\mathbf{y} \in Z^p. \tag{5}$$

Лемма 2. *Множество решений системы* (4) *непусто и ограничено.*

Доказательство. Введем в рассмотрение систему

$$|Q_r| \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{x} \rangle \le g_r, \quad i \in Q_r, \quad r = 1, \ldots, q; \tag{6}$$

$$x_j = x_s \ \forall j, s \in P_k; \quad k = 1, \ldots, p. \tag{7}$$

Условия (7) определяют в R^n множество неподвижных по группе Λ векторов: $\mathbf{x}\lambda = \mathbf{x}$ $\forall \lambda \in \Lambda$, если и только если выполняются условия (7).

Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — множества решений систем (3), (4), (6) и (6), (7) соответственно. Множество X_3 ограничено, поскольку множество X_1 непусто и ограничено ([1], с.114).

Пусть $\mathbf{v} \in X_1$. Докажем, что вектор

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{v}\lambda$$

принадлежит множеству X_4. Так как $\Lambda\lambda = \Lambda$ $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\mathbf{u}\lambda = \mathbf{u}$ $\forall \lambda \in \Lambda$. Следовательно, вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям (7). Имеем $\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{u}\lambda \rangle = \langle \mathbf{c}^i \lambda^{-1}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{c}^s, \mathbf{u} \rangle$ $\forall i \in Q_r, \forall \lambda \in \Lambda$, где $s \in Q_r$, λ^{-1} — подстановка, обратная подстановке λ. Поэтому $\forall s \in Q_r$ получим

$$|Q_r| \langle \mathbf{c}^s, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i \in Q_r} \left\langle \mathbf{c}^i, \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{v}\lambda \right\rangle = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in Q_r} \langle \mathbf{c}^i \lambda^{-1}, \mathbf{v} \rangle \le \frac{1}{|\Lambda|} |\Lambda| \sum_{i \in Q_r} d_i = g_r, \quad r = 1, \ldots, q. \tag{8}$$

Таким образом, $\mathbf{u} \in X_4$. Теперь из ограниченности множества X_3 следует, что множество X_4 непусто и ограничено.

Пусть $i \in Q_r$, $j \in P_k$. Выполняется равенство $c_{\lambda(j)}^i = c_j^{\pi(i)}$ $\forall \lambda \in \Lambda$, где π — образ подстановки λ в группе Π. Так как $\{\pi(i) \mid \forall i \in Q_r\} = Q_r$, то

$$\begin{gathered} \sum_{i \in Q_r} c_j^i = \sum_{i \in Q_r} c_s^i \quad \forall j, s \in P_k; \\ \sum_{i \in Q_r} c_{j(k)}^i = \frac{1}{|P_k|} \sum_{j \in P_k} \sum_{i \in Q_r} c_j^i. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in X_4$. Положим $w_k = |P_k| u_j$, если $j \in P_k$; $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_p)$. Так как $\mathbf{u}$ — неподвижный по группе Λ вектор, то с учетом (9) получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^r, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{|P_k|} \sum_{j \in P_k} \sum_{i \in Q_r} c_j^i \right) w_k = \\ &= \sum_{i \in Q_r} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in P_k} c_j^i u_j = \sum_{i \in Q_r} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{u} \rangle = |Q_r| \langle \mathbf{c}^s, \mathbf{u} \rangle \le g_r, \quad s \in Q_r, \quad r = 1, \ldots, q. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{w} \in X_2$.

Пусть $\mathbf{w} \in X_2$. Вектору $\mathbf{w}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ такой, что $|P_k|u_j = w_k$, если $j \in P_k$, $k = 1, \ldots, p$. Вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям (7). Для всех $i \in Q_r$ имеем

$$
\begin{aligned}
|Q_r|\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{u}\rangle &= \sum_{s\in Q_r} \langle \mathbf{c}^s, \mathbf{u}\rangle = \sum_{s\in Q_r} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\in P_k} c_j^s \frac{w_k}{|P_k|} = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{|P_k|} \sum_{s\in Q_r} \sum_{j\in P_k} c_j^s \right) w_k = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i\in Q_r} c_{j(k)}^i \right) w_k = \langle \mathbf{f}^r, \mathbf{w}\rangle \le g_r, \quad r = 1, \ldots, q.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\mathbf{u} \in X_4$. Из установленного взаимно однозначного отображения множества X_2 на множество X_4 следует, что множество X_2 непусто и ограничено. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *— решение системы* (2), (3), $w_k = \sum\limits_{j\in P_k} v_j$. *Тогда* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_p)$ *— это решение системы* (4), (5).

Доказательство. Из (2) следует (5). Так как $\mathbf{v} \in X_1$, то согласно формуле (8)

$$
\sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i\in Q_r} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{v}\lambda\rangle \le |\Lambda| g_r, \quad r = 1, \ldots, q. \tag{10}
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i\in Q_r} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{v}\lambda\rangle &= \sum_{i\in Q_r} \Big\langle \mathbf{c}^i, \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{v}\lambda \Big\rangle = \\
&= \sum_{i\in Q_r} \sum_{j=1}^{n} c_j^i \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} v_{\lambda(j)} \Big) = \sum_{i\in Q_r} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\in P_k} c_j^i \frac{|\Lambda|}{|P_k|} \sum_{j\in P_k} v_{\lambda(j)} = \\
&= |\Lambda| \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{|P_k|} \sum_{j\in P_k} \sum_{i\in Q_r} c_j^i \right) w_k = |\Lambda| \langle \mathbf{f}^r, \mathbf{w}\rangle, \quad r = 1, \ldots, q.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Из (10), (11) следует, что условия (4) выполняются. $\square$

Совместность системы (4), (5) является необходимым условием совместности системы (2), (3). Пусть X, Y — множества решений систем (2), (3) и (4), (5) соответственно. Согласно теореме 1

$$
X = \bigcup_{\mathbf{y}\in Y} X(\mathbf{y}),
$$

где $X(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in X \,|\, \sum\limits_{j\in P_k} x_j = y_k,\ k = 1, \ldots, p\}$.

Дополнительные условия на переменные x_j, записываемые в виде линейных уравнений, позволяют упростить решение системы (2), (3). Например, если в системе (3) есть неравенства $x_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$, и если $y_k = 0$ для некоторого $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p) \in Y$, то $x_j = 0$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X(\mathbf{y})$, $j \in P_k$.

Если группа Λ^0 содержит две различные собственные подгруппы Ψ, Φ, то может оказаться целесообразным следующий метод расчета. Пусть V, W — множества решений системы (4), (5) при $\Lambda = \Psi$, $\Lambda = \Phi$ соответственно; G_k, $k = 1, \ldots, s$, — орбиты группы Ψ в множестве $\{1, \ldots, n\}$; H_k, $k = 1, \ldots, t$, — орбиты группы Φ; $X(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ — множество решений системы (2), (3) при дополнительных условиях

$$
\sum_{j\in G_k} x_j = v_k, \quad k = 1, \ldots, s; \qquad \sum_{j\in H_k} x_j = w_k, \quad k = 1, \ldots, t. \tag{12}
$$

В соответствии с теоремой 1

$$X = \bigcup_{\mathbf{v}\in V} \bigcup_{\mathbf{w}\in W} X(\mathbf{v},\mathbf{w}). \tag{13}$$

Возникает вопрос о ранге матрицы системы линейных уравнений (12).

Теорема 2. *Если $\Psi\Phi$ — группа, то ранг матрицы системы* (12) *равен $s+t-p_1$, где p_1 — число орбит группы $\Psi\Phi$.*

Доказательство. Группы Ψ, Φ — это подгруппы группы $\Psi\Phi$. Так как любая орбита группы является объединением некоторых орбит подгруппы, то система (12) распадается на p_1 независимых систем уравнений. Выделим одну из таких систем, соответствующую некоторой орбите P группы $\Psi\Phi$ и запишем ее в виде $\langle \mathbf{e}^k, \mathbf{x}\rangle = v_k$, $k \in I = \{i \mid G_i \subseteq P\}$; $\langle \mathbf{h}^k, \mathbf{x}\rangle = w_k$, $k \in J = \{i \mid H_i \subseteq P\}$. Орбиты G_k, так же, как и орбиты H_k, образуют разбиение орбиты P. Поэтому

$$\sum_{k\in I} \mathbf{e}^k = \sum_{k\in J} \mathbf{h}^k.$$

Следовательно, ранг матрицы системы, соответствующей орбите P, не превышает $|I| + |J| - 1$.

Предположим, что для некоторого $i \in I$ существуют такие числа α_k, β_k, что $\alpha_i = 0$,

$$\sum_{k\in I} \alpha_k \mathbf{e}^k = \sum_{k\in J} \beta_k \mathbf{h}^k = \mathbf{z}.$$

Так как векторы $\mathbf{e}^k$ неподвижны по группе Ψ, $\mathbf{h}^k$ — по группе Φ, а $\Psi\Phi$ — группа, то вектор $\mathbf{z}$ неподвижен по группе $\Psi\Phi$. Это значит, что его компоненты z_j, $j \in P$, равны некоторому числу γ. Если $\gamma \neq 0$, то $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k \in I$. Но поскольку $\alpha_i = 0$, то вектор $\mathbf{z}$ не является неподвижным по группе $\Psi\Phi$. Из этого противоречия следует, что $\gamma = 0$; $\alpha_k = 0$, $k \in I$; $\beta_k = 0$, $k \in J$. Таким образом, ранг матрицы системы, соответствующей орбите P, не меньше $|I|+|J|-1$, следовательно, он равен $|I| + |J| - 1$. Ранг матрицы системы (12) равен сумме рангов матриц независимых систем. Эта сумма равна $s + t - p_1$. $\square$

По поводу теоремы 2 заметим, что $\Psi\Phi$ — группа, если и только если $\Psi\Phi = \Phi\Psi$ ([2], с.23).

Нет смысла применять формулу (13), если одна из групп Ψ, Φ является подгруппой другой, т.к. в этом случае либо $s = p_1$, либо $t = p_1$.

Представляет интерес определение условий, при которых система (4), (5) оказывается симметричной.

Теорема 3. *Если Λ — нормальная собственная подгруппа группы Λ^0 и если не существует группы Λ^1, удовлетворяющей условиям:* 1) $\Lambda < \Lambda^1 \leq \Lambda^0$, 2) *орбиты групп Λ, Λ^1 совпадают, то множество $F = \{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^q\}$ симметрично по некоторой группе Ψ^0 подстановок, изоморфной фактор-группе Λ^0/Λ.*

Доказательство. Пусть орбита P^0 группы Λ^0 является объединением орбит P_k, $k \in I \subseteq \{1, \ldots, p\}$, группы Λ. Действие фактор-группы Λ^0/Λ переставляет равномощные орбиты P_k, $k \in I$, внутри орбиты P^0. Действительно, т.к. $\Lambda(P_k) = \{\lambda(j) \mid \forall\lambda \in \Lambda,\ \forall j \in P_k\} = P_k$ и подгруппа Λ нормальна, то $\mu(\Lambda(P_k)) = \Lambda(\mu(P_k)) = \mu(P_k)$ $\forall\mu \in \Lambda^0$. Последнее равенство означает, что $\mu(P_k) = \{\mu(j) \mid \ \forall j \in P_k\}$ — это орбита группы Λ, $\mu(P_k) \subseteq P^0$, $|\mu(P_k)| = |P_k|$. Отсюда следует, что фактор-группа Λ^0/Λ порождает некоторую группу Ψ^0 подстановок на множестве $\{1, \ldots, p\}$ номеров орбит группы Λ. Элементу $\mu\Lambda \in \Lambda^0/\Lambda$ соответствует подстановка $\psi \in \Psi^0$ такая, что $\mu\Lambda(P_k) = P_{\psi(k)}$.

Положим $\Lambda^1 = \{\lambda \in \Lambda^0 \mid \lambda(P_k) = P_k,\ k = 1, \ldots, p\}$. Непосредственно проверяется, что Λ^1 — группа, $\Lambda \leq \Lambda^1 \leq \Lambda^0$. Группы Ψ^0, Λ^0/Λ изоморфны, если и только если $\Lambda^1 = \Lambda$. Следовательно, группы Ψ^0, Λ^0/Λ изоморфны, если не существует группы Λ^1, удовлетворяющей условиям: 1) $\Lambda < \Lambda^1 \leq \Lambda^0$, 2) орбиты групп Λ, Λ^1 совпадают.

Осталось доказать, что множество F симметрично по группе Ψ^0. Пусть $\psi \in \Psi^0$; $\mu\Lambda$ — прообраз подстановки ψ в фактор-группе Λ^0/Λ. Учитывая формулу (9), получим

$$\begin{aligned} f^r_{\psi(k)} &= \frac{1}{|P_{\psi(k)}|} \sum_{j \in P_{\psi(k)}} \sum_{i \in Q_r} c^i_j = \\ &= \frac{1}{|P_k|} \sum_{j \in P_k} \sum_{i \in Q_r} c^i_{\mu(j)} = \frac{1}{|P_k|} \sum_{j \in P_k} \sum_{i \in Q_r} c^{\nu(i)}_j, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\nu = (\nu(1), \ldots, \nu(m))$ — образ подстановки $\mu \in \Lambda^0$ в группе Π^0. Согласно лемме 1 группа Λ и группа Π, порождаемая группой Λ и множеством C, изоморфны. Следовательно, подгруппа Π нормальна в Π^0, а фактор-группы Π^0/Π, Λ^0/Λ изоморфны. Действие фактор-группы Π^0/Π переставляет орбиты Q_r. Фактор-группа Π^0/Π порождает некоторую группу Φ^0 подстановок на множестве $\{1, \ldots, q\}$ номеров орбит группы Π. Элементу $\nu\Pi \in \Pi^0/\Pi$ соответствует подстановка $\varphi \in \Phi^0$ такая, что $\nu\Pi(Q_r) = \nu(Q_r) = Q_{\varphi(r)}$. Поэтому

$$\sum_{i \in Q_r} c^{\nu(i)}_j = \sum_{i \in Q_{\varphi(r)}} c^i_j. \tag{15}$$

Из (14), (15) следует $f^r_{\psi(k)} = f^{\varphi(r)}_k$, $\mathbf{f}^r\psi = \mathbf{f}^{\varphi(r)}$, $r = 1, \ldots, q$. Таким образом, множество F симметрично по группе Ψ^0, а группа Φ^0, порождаемая группой Ψ^0 и множеством F, изоморфна группе Ψ^0 согласно леммам 1, 2. $\square$

Для произвольной группы Ψ подстановок на множестве $\{1, \ldots, p\}$ введем бинарное отношение на пространстве R^p равенством $\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}^2\psi$ для некоторой подстановки $\psi \in \Psi$. Это отношение является отношением эквивалентности. Пусть $Y(\Psi)$ — множество представителей всех классов эквивалентности множества Y решений системы (4), (5) относительно группы Ψ.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 3 *и если* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ — *неподвижный по группе* Π^0 *вектор, то*

$$X = \Big(\bigcup_{\mathbf{y} \in Y(\Psi^0)} X(\mathbf{y}) \Big) \theta, \tag{16}$$

где θ — *множество представителей смежных классов группы* Λ^0 *по подгруппе* Λ.

Доказательство. Если $\mathbf{v} \in X$, $\lambda \in \Lambda^0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то $\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{v}\lambda \rangle = \langle \mathbf{c}^i\lambda^{-1}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{c}^s, \mathbf{v} \rangle \le d_s$, где i, s принадлежат одной и той же орбите группы Π^0. По условию теоремы $d_i = d_s$, поэтому $\langle \mathbf{c}^i, \mathbf{v}\lambda \rangle \le d_i$ и, следовательно, $\mathbf{v}\lambda \in X$. Это значит, что множество X симметрично по группе Λ^0.

При $\varphi \in \Phi^0$, $r \in \{1, \ldots, q\}$ орбиты Q_r, $Q_{\varphi(r)}$ группы Π содержатся в одной и той же орбите группы Π^0. Поэтому $g_r = g_{\varphi(r)}$ и, следовательно, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_q)$ — неподвижный по группе Φ^0 вектор. Теперь симметрия множества Y по группе Ψ^0 устанавливается точно так же, как и симметрия множества X по группе Λ^0.

Пусть $\mathbf{v} \in X(w)$, $\mathbf{w} \in Y$, $\psi \in \Psi^0$; $\mu\Lambda$ — прообраз подстановки ψ в фактор-группе Λ^0/Λ. По определению множества $X(y)$

$$\sum_{j \in P_k} v_{\mu(j)} = \sum_{j \in P_{\psi(k)}} v_j = w_{\psi(k)}, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{17}$$

Так как $\mathbf{v}\mu \in X$, $\mathbf{w}\psi \in Y$, то из (17) следует $\mathbf{v}\mu \in X(\mathbf{w}\psi)$. По определению множества $Y(\Psi^0)$ существует такая подстановка $\psi_0 \in \Psi^0$, что $\mathbf{w}\psi_0 \in Y(\Psi^0)$. Тогда $\mathbf{v}\mu_0 \in X(\mathbf{w}\psi_0)$, где $\mu_0\Lambda$ — прообраз подстановки ψ_0 в фактор-группе Λ^0/Λ, $\mu_0 \in \Lambda^0$. Существует такая подстановка $\nu \in \theta$, что $\Lambda\mu_0^{-1} = \Lambda\nu$. Из определения множества $X(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in Y$, следует, что это множество симметрично по группе Λ. Поэтому $\mathbf{v} \in (X(\mathbf{w}\psi_0))\mu_0^{-1} = (X(\mathbf{w}\psi_0))\nu$. Это значит, что любой вектор $\mathbf{v} \in X$ может быть определен по формуле (16). $\square$

Симметричные по группе Λ^0 системы (2) и (2), (3) назовем строго симметричными, если $\mathbf{d}$ — неподвижный по группе Π^0 вектор. Некоторые прикладные задачи формализуются симметричными или строго симметричными системами линейных диофантовых неравенств, не требующими предварительной симметризации. Такая ситуация имеет место в рассматриваемом ниже примере.

Задача определения гамильтонова цикла в неориентированном графе (V,E), где $V=\{1,\ldots,n\}$, формализуется следующей системой [3]:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^i = 1, \quad i=1,\ldots,n; \quad \sum_{i=1}^{n} x_j^i = 1, \quad j=1,\ldots,n; \tag{18}$$

$$\langle \mathbf{a}^p, \mathbf{x}^i\rangle + \sum_{k\in N_i} \langle \mathbf{b}^p, \mathbf{x}^k\rangle \le 1, \quad i=1,\ldots,n, \quad p=0,1,\ldots,n-1; \tag{19}$$

$$x_j^i \in \{0,1\}, \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,n. \tag{20}$$

Здесь $N_i=\{j\in V \mid \{i,j\}\notin E,\ i\ne j\}$, $\mathbf{x}^i=(x_1^i,\ldots,x_n^i)$, $\mathbf{a}^0=(1,1,0,\ldots,0,1)$, $\mathbf{b}^0=(1,0,\ldots,0)$. Векторы $\mathbf{a}^p$, $\mathbf{b}^p$ образованы циклическим сдвигом на p позиций вправо компонент векторов $\mathbf{a}^0$, $\mathbf{b}^0$ соответственно.

Заметим, что систему (18)–(20) можно записать в точном соответствии с записью системы (2), (3).

Система (18)–(20) строго симметрична по группе $\Omega\Delta_1$, где Δ_1 — циклическая группа порядка n с порождающим элементом $(n,1,2,\ldots,n-1)$, $\Omega=\{(1,\ldots,n),(n,n-1,\ldots,2,1)\}$. Действие группы $\Omega\Delta_1$ на R^{n^2} определено следующим образом: $\mathbf{x}\lambda=(x^1_{\lambda(1)},\ldots,x^1_{\lambda(n)},\ldots,x^n_{\lambda(1)},\ldots,x^n_{\lambda(n)})$, где $\mathbf{x}=(x_1^1,\ldots,x_n^1,\ldots,x_1^n,\ldots,x_n^n)$, $\lambda=(\lambda(1),\ldots,\lambda(n))\in\Omega\Delta_1$. Запишем систему (4), (5) для случая, когда n — четное число, $\Lambda=\Delta_2$ — циклическая подгруппа порядка $\frac{n}{2}$ группы Δ_1:

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^i = \frac{n}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} y_2^i = \frac{n}{2}; \tag{21}$$

$$2y_1^i + y_2^i + \sum_{k\in N_i} y_2^k \le \frac{n}{2}; \quad 2y_2^i + y_1^i + \sum_{k\in N_i} y_1^k \le \frac{n}{2}; \tag{22}$$

$$y_1^i + y_2^i = 1; \quad y_1^i, y_2^i \in \{0,1\}; \quad i=1,\ldots,n. \tag{23}$$

Подгруппа Δ_2 нормальна в группе Δ_1. В соответствии с теоремами 3, 4 (при $\Lambda^0=\Delta_1$, $\Lambda=\Delta_2$) система (21)–(23) строго симметрична по группе подстановок порядка 2.

Систему (21)–(23) можно упростить, полагая $M_i=\{j \mid \{i,j\}\in E\}$. С учетом того, что $|M_i\cup N_i|=n-1$, получим эквивалентную систему:

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^i = \frac{n}{2}; \quad 2 \le 3y_1^i + \sum_{k\in M_i} y_1^k \le |M_i|+1; \tag{24}$$

$$y_1^i \in \{0,1\}; \quad y_2^i = 1-y_1^i; \quad i=1,\ldots,n. \tag{25}$$

Любое решение системы (24), (25) содержит n нулевых компонент. Поэтому согласно теореме 1 при расчетах по формуле (16) число переменных в системе (18)–(20) сокращается в два раза.

Рассмотрим случай, когда n делится на 3, $\Lambda=\Omega\Delta_3$, Δ_3 — циклическая подгруппа порядка $\frac{n}{3}$ группы Δ_1. Пусть P_k^1, P_k^2, $k=1,\ldots,n$, — орбиты группы $\Omega\Delta_3$. В данном случае орбите P_k^1 соответствуют переменные x_j^k, $j=2+3i$, $i=0,1,\ldots,\frac{n-3}{3}$; орбите P_k^2 соответствуют остальные переменные x_j^k; $|P_k^2| = 2|P_k^1| = \frac{2n}{3}$. Система (4), (5) запишется в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^i = \frac{n}{3}; \quad \sum_{i-1}^{n} y_2^i = \frac{2n}{3};$$

$$y_2^i + \sum_{k \in N_i} y_1^k \le \frac{n}{3}; \quad y_2^i + 2y_1^i + \sum_{k \in N_i} y_2^k \le \frac{2n}{3};$$

$$y_1^i + y_2^i = 1; \quad y_1^i, y_2^i \in \{0,1\}; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Упрощая эту систему, получим

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^i = \frac{n}{3}; \quad 1 \le 2y_1^i + \sum_{k \in M_i} y_1^k \le |M_i|;$$

$$y_1^i \in \{0,1\}; \quad y_2^i = 1 - y_1^i; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для подгрупп Δ_2, $\Omega\Delta_3$ группы $\Omega\Delta_1$ выполняется условие теоремы 2, т.к. $\Delta_2(\Omega\Delta_3) = (\Omega\Delta_3)\Delta_2 = \Omega\Delta_1$.

Литература

1. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
3. Вьялицин А.А. *О перечислении гамильтоновых циклов* // Дискретная математика. – 1992. – Т.3. – Вып.3. – С.46–49.

Северо-Казахстанский университет

Поступила
03.05.1995