ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.853

Е.В. АПЕКИНА, О.В. ХАМИСОВ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СИМПЛЕКСНЫХ ПОГРУЖЕНИЙ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ВВЕДЕНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Введение

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f_0(x) \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \le 0, \tag{2}$$

где $x \in E^n$, $f_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, — выпуклые функции.

В настоящей статье рассматриваются некоторые модификации метода симплексных погружений [1], который является современным эффективным полиномиальным методом для решения задач вида (1), (2) и отличается от известного метода эллипсоидов [2] классом вспомогательных множеств, локализующих решение задачи. Вместо эллипсоидов использованы n-мерные симплексы.

Модификации основаны на одновременном введении на каждой итерации метода $l \le m$ секущих плоскостей вместо одной, рассматриваемой в [1]. В дальнейшем метод с одной секущей плоскостью будем называть базовым. Состав секущих плоскостей определяется набором нарушаемых ограничений в центре текущего симплекса. Аналогичный подход, связанный с методом эллипсоидов, рассматривался в [3].

Эффективность метода симплексных погружений определяется сокращениями объемов двух последовательных симплексов. В разделе 2 приводятся некоторые способы улучшения оценки этих сокращений и ускорения работы алгоритма в целом. В разделе 3 предлагается двухэтапный метод симплексных погружений для решения задач выпуклого программирования.

1. Основная идея метода симплексных погружений и оценка сокращения объема

Приведен некоторые необходимые определения и обозначения

Определение 1. Симплексом $S \subset E^n$ с вершиной в точке x^0 и ребрами $(x^1 - x^0, \dots, x^n - x^0)$, образующими базис в E^n, $x^i \in E^n$, назовем множество

$$S = \Big\{x \in E^n : x = x^0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i(x^i - x^0),\ \sum_{i=1}^n \sigma_i \le 1,\ \sigma_i \ge 0\Big\}.$$

Далее, не ограничивая общности, будем полагать $x^0 = 0$.

Объем симплекса S определяется формулой

$$V(S) = \frac{1}{n!}|\det(\overline{X})|,$$

где $\overline{X}$ — матрица размеров $n \times n$, столбцы которой суть векторы $x^1, \dots, x^n$.

Определение 2. Если в определении 1 $x^0 = 0$, $x^1 = (x_1, 0, \dots, 0), \dots, x^n = (0, \dots, 0, x_n)$; $x_i \in E^1$, $i = 1, 2, \dots, n$, то симплекс S будем называть ортогональным симплексом.

Определение 3. Центр симплекса S определим формулой $x^c = \frac{1}{n+1}(x^1 + \dots + x^n)$.

Скалярное произведение векторов $x, y \in E^n$ будем обозначать через $x^T y$, т.е. $x^T y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Определение 4. Любую плоскость вида $L = \{x : g^T(x - x^c) = 0\}$, проходящую через центр x^c симплекса S будем называть секущей плоскостью.

Определение 5. Будем говорить, что вершина x^i симплекса S не отсекается плоскостью L, если $\alpha_i = g^T(x^i - x^c) < 0$, и отсекается, если $\alpha_i \geq 0$.

Идея метода состоит в следующем. Пусть имеется начальный симплекс S^0 и точка $x^* \in S^0$ — одно из решений задачи (1), (2). Находим центр симплекса $x^{c,0}$ и строим полупространство, отсекающее неперспективную (не содержащую точку x^*) часть симплекса S^0. Часть симплекса, содержащую точку x^*, погружаем в новый симплекс S^1 минимально возможного объема. Находим точку $x^{c,1}$ — центр S^1 и повторяем процедуру. Так последовательно локализуем искомое решение до тех пор, пока объем симплекса, полученного на данной итерации, не станет достаточно малым.

В [1] получена оценка отношения объемов

$$\frac{V(S^l)}{V(S^{l-1})} \leq \begin{cases} \frac{1}{2}, & k_l = 1; \\ \left(\frac{k_l}{k_l+1}\right)^{k_l} \left(\frac{k_l}{k_l-1}\right)^{k_l-1}, & 2 \leq k_l \leq n, \end{cases} \tag{3}$$

где $V(S^l)$ — объем симплекса на итерации l, а k_l — число сохраненных при отсечении вершин симплекса S^{l-1}.

Из оценки видно, что при $k_l = n$ имеем худший случай, а при $k_l = 1$ — самый эффективный. Также из оценки видно, что величина сокращения объема (скорость сходимости) зависит только от числа отсеченных вершин, т.е. адаптируется к ситуации, возникающей на каждой итерации. Именно на этом свойстве оценки и основаны все модификации метода.

2. Модификации метода симплексных погружений

Эти модификации вводятся в случае, когда центр симплекса, полученного на данной итерации, не является допустимым решением задачи (1), (2), и состоят в следующем. Если в текущем центре симплекса нарушаются $l \leq m$ ограничений задачи, то строим l секущих плоскостей, соответствующих нарушаемым ограничениям. Для улучшения скорости сходимости метода необходимо симплекс, усеченный плоскостями, погрузить в новый симплекс минимального объема. Такая задача является далеко нетривиальной, и в настоящее время нет каких-либо методов ее решения.

В данной статье эта задача решена для двух частных случаев (в теоремах 1 и 2), которые являются наиболее неблагоприятными для базового метода. В общем случае данная задача приближенно решается с помощью специального минимаксного подхода.

Постановка задачи. Будем рассматривать ортогональный симплекс с вершинами $0, h^1, h^2, \dots, h^n$. Заметим, что любой симплекс можно линейным преобразованием свести к ортогональному, а отношение объемов двух последовательных симплексов инвариантно относительно линейного преобразования координат.

Рассмотрим наихудший случай базового метода: каждое отсекающее полупространство отсекает только одну вершину из неотсеченных другими полупространствами и каждая секущая плоскость параллельна $(n-1)$-мерной грани симплекса, содержащей n неотсеченных вершин.

В базовом методе оценка отношения объемов (скорость сходимости) в этом случае близка к единице, т.е. при $k_l = n$ из (3) следует

$$\frac{V(S^l)}{V(S^{l-1})} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \approx 1 - \frac{1}{2n^2}.$$

Рассматриваемые модификации позволяют существенно улучшить оценку (3) для этого случая.

Теорема 1. *Пусть на каждой итерации метода симплексных погружений можно провести n секущих плоскостей с нормалями*

$$a^i = e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0). \tag{4}$$

Тогда справедлива оценка

$$\frac{V(S^l)}{V(S^{l-1})} \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \approx \frac{1}{e}, \tag{5}$$

где e — основание натурального логарифма.

Доказательство. Чтобы получить оценку отношения объемов (5), нужно уметь определять объем $V(S^l)$ симплекса S^l, содержащего часть симплекса S^{l-1}, полученную в результате усечения симплекса S^{l-1} n секущими плоскостями. В [1] описана методика построения нового симплекса минимального объема, содержащего часть симплекса, усеченного одной плоскостью. Поэтому заменим совокупность из n секущих плоскостей одной результирующей так, чтобы она отсекала то же количество вершин, а затем применим методику из [1].

Будем искать нормаль результирующей плоскости b в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a^i$ нормалей $a^i = e^i$.

Если существует вектор $\bar\lambda = (\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_n)$, который является решением системы

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a^i)^T (h^j - x^c) > 0, \quad j = 1, \dots, r, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \tag{7}$$

$$\lambda_i \ge 0, \tag{8}$$

где x^c — центр текущего симплекса, r — число отсеченных вершин, то отсекающее полупространство

$$b^T(x - x^c) \le 0, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \bar\lambda_i a^i,$$

отсекает то же число вершин, что и совокупность отсекающих полупространств. Заметим, что при условиях теоремы система (6)–(8) всегда совместна.

Условия (6), (8) образуют некоторый конус, а условие (7) есть стандартное условие нормировки, необходимое лишь для того, чтобы сделать множество, определяемое условиями (6), (8), ограниченным.

В нашем случае система (6)–(8) будет иметь вид

$$\lambda^T (h^j - x^c) > 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{9}$$

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \tag{11}$$

а уравнением секущей плоскости будет

$$\lambda^T(x - x^c) \le 0.$$

Так как $h^j = (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0)$, то система (9)–(11) эквивалентна системе

$$\lambda_j h_j > \lambda^T x^c = 1, \tag{9$'$}$$

$$\lambda \ge 0, \tag{10$'$}$$

$$\lambda^T x^c = 1. \tag{11$'$}$$

Здесь вместо условия нормировки (11) используется условие (11$'$).

Известно, что объем начального ортогонального симплекса S^0 определяется формулой

$$V(S^0) = \frac{1}{n!} h_1 h_2 \cdots h_n. \tag{12}$$

Из уравнения секущей плоскости и в силу (11$'$) имеем $\lambda^T x \le \lambda^T x^c = 1$. Следовательно, объем симплекса $S^1 = \{x : \lambda^T x \le 1,\ x \ge 0\}$ будет выражаться формулой

$$V(S^1) = v(\lambda) = \frac{1}{n!} \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}. \tag{13}$$

Так как $V(S^1)$ должен быть минимальным, решим задачу

$$v(\lambda) \to \inf \tag{14}$$

при ограничениях

$$\lambda_j h_j > 1, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$\lambda \ge 0, \tag{16}$$

$$\lambda^T x^c = 1. \tag{17}$$

Она эквивалентна задаче

$$-\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i \to \inf \tag{18}$$

при условиях (15)–(17). Из условия (15) следует, что $\lambda_i > 1/h_j$.

Решим задачу (18), (17), используя метод множителей Лагранжа, затем проверим условия (15), (16). Получим

$$L(\lambda, \mu) = -\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i + \mu(\lambda^T x^c - 1), \quad L'_\lambda = -\frac{1}{\lambda_i} + \mu x_i^c = 0, \quad \frac{1}{\mu} = \lambda_i x_i^c, \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^c = \frac{n}{\mu},$$

следовательно, $\mu = n$. Отсюда $\lambda_i^* = \frac{1}{n x_i^c}$, и, учитывая $(x^c)^T = \left(\frac{h_1}{n+1}, \ldots, \frac{h_n}{n+1}\right)$, имеем $\lambda_i^* = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right) h_i}$. Так как $\frac{n}{n+1} \le 1$, то $\lambda_i^* > 1/h_j > 0$.

Из (13) при $\lambda = \lambda^*$ имеем $V(S^1) = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n h_1 h_2 \cdots h_n$, поэтому

$$\frac{V(S^1)}{V(S^0)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \approx \frac{1}{e}. \quad \square$$

Теорема 2. *Пусть на каждой итерации метода симплексных погружений можно провести $l < n$ секущих плоскостей, нормали которых имеют вид (4). Тогда справедлива оценка отношения объемов*

$$\frac{V(S^l)}{V(S^{l-1})} \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{k_l}{k_l - 1}\right)^{k_l - 1}, \tag{19}$$

где k_l — число сохраненных при отсечении вершин симплекса S^{l-1}.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, будем искать нормаль "результирующей" плоскости в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i a^i$, $l < n$, нормалей a_i, т.е.

$$\lambda_1(1,0,\ldots,0)^T + \lambda_2(0,1,\ldots,0)^T + \cdots + \lambda_l(0,\ldots,1,\ldots,0)^T = (\lambda_1,\ldots,\lambda_l,0,\ldots,0)^T. \tag{20}$$

Множество $S^1 = \{x : \lambda^T x \le 1,\ x \ge 0\}$ должно быть ограничено, поэтому к (20) добавим

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_l,0,\ldots,0)^T + \lambda_{l+1}\left(\frac{1}{h_1},\ldots,\frac{1}{h_n}\right)^T = \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_{l+1}}{h_1},\ldots,\lambda_l + \frac{\lambda_{l+1}}{h_l},\ \frac{\lambda_{l+1}}{h_{l+1}},\ldots,\frac{\lambda_{l+1}}{h_n}\right)^T = \bar\lambda.$$

Систему (6)–(8) для нашего случая перепишем в виде

$$\bar\lambda(h - \bar x) > 0, \quad \lambda \ge 0, \quad \lambda^T \bar x = 1, \tag{21}$$

где $\bar x$ должно удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{x_i^c}{h_i} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\bar x_i}{h_i} = 1. \tag{22}$$

Заметим, что при условиях теоремы система (21) всегда совместна. Объем симплекса $\{\bar\lambda x \le 1,\ x \ge 0\}$ определяется формулой

$$V(S^1) = v(\bar\lambda) = (n!\,\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_n)^{-1} = \left[n!\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_{l+1}}{h_1}\right)\cdots\left(\lambda_l + \frac{\lambda_{l+1}}{h_l}\right)\lambda_{l+1}^{n-l}\left(\frac{1}{h_{l+1}\cdots h_n}\right)\right]^{-1}.$$

Прологарифмируем функцию $v(\bar\lambda)$ и рассмотрим задачу оптимизации

$$w(\lambda) = -\sum_{i=1}^{l} \ln\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right) - (n-l)\ln(\lambda_{l+1}) \to \min \tag{23}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right)\bar x_i + \lambda_{l+1}\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar x_i}{h_i} = 1, \quad \lambda \ge 0. \tag{24}$$

Решим (23)–(24), используя метод множителей Лагранжа

$$L(\lambda,\mu) = w(\lambda) + \mu\left(\sum_{i=1}^{l}\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right)\bar x_i + \lambda_{l+1}\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar x_i}{h_i} - 1\right),$$

$$L'_{\lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}} + \mu\bar x_i = 0, \quad i = 1,\ldots,l,$$

$$L'_{\lambda_{l+1}} = -\sum_{i=1}^{l}\left[\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right)x_i\right]^{-1} - \frac{n-l}{\lambda_{l+1}} + \mu\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{\bar x_i}{h_i} + \sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar x_i}{h_i}\right] = 0.$$

После преобразований имеем

$$\mu = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_{l+1}/h_i)\,\bar x_i}, \quad i = 1,\ldots,l; \quad \frac{l}{\mu} + \lambda_{l+1}\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar x_i}{h_i} = 1, \quad \lambda_{l+1} = \left(1 - \frac{l}{\mu}\right)\Big/\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar x_i}{h_i}.$$

Так как $\bar x_i = x_i^c = \frac{h_i}{n+1}$ при $i = 1,\ldots,l$, то

$$\left[\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right)h_i\right]^{-1} = \frac{\mu}{n+1}.$$

Подставим найденное μ в производные от функции Лагранжа

$$-\frac{l\mu}{n+1} - (n-l)\frac{\mu}{\mu - l}\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar{x}_i}{h_i} + \mu = 0$$

и в силу (22) имеем

$$\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\bar{x}_i}{h_i} = 1 - \sum_{i=1}^{l}\frac{h_i}{h_i(n+1)} = 1 - \frac{l}{n+1},$$

$$1 - \frac{l}{n+1} - \frac{n-l}{\mu-l}\left(1 - \frac{l}{n+1}\right) = 0, \quad 1 - \frac{n-l}{\mu-l} = 0 \implies \mu = n.$$

Далее получим

$$n = \left[\left(\lambda_i + \frac{\lambda_{l+1}}{h_i}\right)\frac{h_i}{n+1}\right]^{-1}; \qquad \frac{1}{\lambda_i + \lambda_{l+1}/h_i} = \frac{n}{n+1}h_i, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Отсюда определим оптимальное

$$\lambda^*_{l+1} = \frac{n-l}{n}\Big/\frac{n+1-l}{n+1}$$

и подставим найденное λ^* в функцию объема. Тогда

$$V(S^1) = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^l h_1 \cdots h_l \left(\frac{n}{n-l}\right)^{n-l}\left(\frac{n+1-l}{n+1}\right)^{n-l} h_{l+1}\cdots h_n, \quad V(S^0) = \frac{1}{n!}h_1\cdots h_n.$$

Поэтому

$$\frac{V(S^1)}{V(S^0)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^l \left(\frac{n}{n-l}\right)^{n-l}\left(\frac{n+1-l}{n+1}\right)^{n-l} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1-l}{n-l}\right)^{n-l}.$$

Так как число сохраненных при отсечении вершин симплекса $k_l = n + 1 - l$, то

$$\frac{V(S^1)}{V(S^0)} \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{k_l}{k_l - 1}\right)^{k_l - 1}. \quad \square$$

Система (6)–(8) не всегда имеет решение, поэтому не всегда можно построить "результирующую" секущую плоскость, которая отсекала бы столько же вершин текущего симплекса, что и вся совокупность плоскостей. В общем случае рассматриваем специальную задачу, чтобы соответствующее результирующей плоскости полупространство отсекало наибольшее число вершин,

$$\min_{\lambda}\max_{1\le j\le r}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(a^i)^T(h^j - x^c), \quad \sum_{i=1}^{l}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0, \tag{25}$$

где r — число отсеченных вершин.

Задача (25) является задачей выпуклого программирования с кусочно-линейной целевой функцией. Очевидно, она эквивалентна задаче линейного программирования

$$\lambda_{l+1} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{l} d_{ji}\lambda_i - \lambda_{l+1} \le 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \sum_{i=1}^{l}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0, \tag{26}$$

где $d_{ji} = (a^i)^T(h^j - x^c)$.

Для решения задачи (26) можно использовать один из известных методов линейного программирования. При учете специфики задачи (25) число линейных кусков у целевой функции

$$\psi(\lambda) = \max_{1\le j\le r}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(a^i)^T(h_j - x^c)$$

равно числу отсеченных вершин r. Как показывают практические расчеты, $r \approx \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor a \rfloor$ — наибольшее целое, не превосходящее a. Поэтому для решения вспомогательной задачи разумно использовать метод опорных плоскостей.

Опишем основные шаги модифицированного метода симплексных погружений.

Обозначим: φ_0 — минимальное, найденное до начала k-й итерации, значение функции $f_0(x)$; δ_k — длина интервала неопределенности, содержащего минимальное значение $f_0^*(x)$ минимизируемой функции; матрица X размеров $(n+1) \times n$, строка i которой соответствует i-й вершине симплекса S.

Полагаем при $k = 0$, $V = 1$, $\varphi_k = \delta_k = +\infty$. Для решения задачи (1), (2) модифицированным алгоритмом симплексных погружений на k-й итерации необходимо выполнить следующие действия.

Шаг 1. Найти центр симплекса S^k.

Шаг 2. Проверить, является ли центр x_k^c допустимым, т.е. выполняется ли условие $f_i(x_k^c) \le 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Шаг 3. Если x_k^c является допустимым, то вычислить нормаль секущей плоскости $b = \partial f_0(x_k^c)$, где $\partial f_0(x_k^c)$ — субградиент целевой функции в центре текущего симплекса, и перейти на шаг 9. В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Выбрать l ограничений задачи, для которых $f_i(x_k^c) > 0$. При необходимости с помощью перенумерации ставим эти ограничения на первые l мест.

Для отсекающих плоскостей найти нормали $a^i = \partial f_i(x_k^c)$, $i = 1, \ldots, l$, где ∂f_i — субградиент выпуклой функции $f_i(x)$.

Шаг 5. Проверить, какие из вершин симплекса S^k отсекаются совокупностью полупространств, т.е. где выполняется неравенство $(a^i)^T(h - x_k^c) \ge 0$, $i = 1, \ldots, l$. Считаем, что отсекаются первые l вершин симплекса, иначе проведем перенумерацию вершин. Пусть k_v — число отсеченных вершин.

Шаг 6. Для поиска нормали результирующей плоскости в виде линейной комбинации нормалей a^i сформировать специальную минимаксную задачу

$$\min_{\lambda} \max_{1 \le j \le k_v} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (a^i)^T (h^j - x_k^c), \quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0. \tag{27}$$

Шаг 7. Для решения задачи (27) использовать метод опорных плоскостей.

Шаг 8. Найденный методом опорных плоскостей вектор $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_l)$ подставить в $b = \sum\limits_{i=1}^{l} \bar{\lambda}_i a^i$.

Шаг 9. Найти величины $\alpha_i = b^T(x^i - x^c)$, $i = \overline{1, n+1}$, определить индекс p из условия $\alpha_p = \min\limits_{1 \le i \le n+1} \alpha_i$, величины $\beta_i = -\alpha_i / \alpha_p$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, и целое число k, равное числу сохраняемых вершин симплекса S^k.

Шаг 10. Найти параметр $t \in [0, 1]$. Для этого достаточно решить задачу одномерной выпуклой минимизации

$$q^* = \min_{0 \le t \le -\frac{1}{\alpha_0}} \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i t)^{-1}.$$

Шаг 11. Найти вектор коэффициентов растяжения $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}, \tau_{p+1}, \ldots, \tau_n)$ ребер симплекса S, исходящих из опорной вершины x^p по формуле $\tau_i = (1 + \beta_i t)^{-1}$.

Шаг 12. Перейти от симплекса S^k с матрицей X^k к симплексу S^{k+1} с матрицей X^{k+1}, имеющей элементы

$$X_{ij}^{k+1} = \begin{cases} X_{pj}^k + \tau_i (X_{ij}^k - X_{pj}^k), & i = \overline{1, n+1}, \quad i \ne p; \\ X_{ij}^k, & i = \overline{1, n}, \quad i = p. \end{cases}$$

Шаг 13. Пересчитать объем симплекса, содержащего решение, по формуле $V_{k+1} = V_k q_k^*$, где

$$q_k^* = \min_{0 \le t \le 1} \prod_{i=1}^{n} (1 + \beta_i t)^{-1} = \min_{0 \le t \le 1} q(\beta, t).$$

Шаг 14. Пересчитать длину интервала неопределенности по формуле

$$\delta_k = \frac{\gamma}{1 - \gamma} [f_{0_{\max}} - \varphi_k], \quad \gamma = (V)^{1/n}, \quad f_{0_{\max}} = \max_{x \in S^0} f_0(x).$$

Шаг 15. Если длина интервала неопределенности $\delta_k < \varepsilon$, где ε — величина, задающая точность вычислений, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае перейти к шагу 1, заменив k на $k+1$.

Как показали практические расчеты, наибольшей эффективности предложенная модификация достигает при решении задач минимизации выпуклой функции с двусторонними (параллелепипедными) ограничениями на переменные. Этот факт и замеченная возможность отбрасывать неактивные ограничения привели к разработке двухэтапного метода симплексных погружений.

3. Двухэтапный метод симплексных погружений

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \quad Ax \le b, \tag{28}$$

где A — $(m \times n)$-матрица. Допустим, что $m = n$. Предположим, что A — невырожденная матрица и существует A^{-1}. Сделаем замену переменных

$$y = Ax \tag{29}$$

и от задачи (28) перейдем к задаче

$$\tilde{f}(y) \to \min, \quad y \le b, \tag{30}$$

где $\tilde{f}(y) = f(A^{-1}y)$. В задаче (30) допустимое множество имеет простую структуру.

Если $m > n$, то предлагается разбить работу алгоритма на два этапа.

I этап. Модифицированным методом симплексных погружений решаем задачу (28) и на каждой итерации отбрасываем неактивные ограничения, если они есть.

Идентификация неактивных ограничений проводится следующим образом. Рассматривается задача

$$f(x) \to \min, \quad x \in R, \tag{31}$$

где $R = \{x : (a^i)^T x \le b_i, \ \ i = 1, \dots, m\}$. Пусть S — симплекс с вершинами $x^1, \dots, x^{n+1}$, содержащий оптимальное решение x^* задачи (31). Обозначим

$$\gamma_i = \max_{1 \le j \le n+1} (a^i)^T x^j,$$

где a^i — нормали плоскостей, соответствующих ограничениям задачи. Очевидно, что ограничение $(a^i)^T x \le b_i$ будет неактивным в точке x^* симплекса S, если $\gamma_i < b_i$.

Обозначим через $I = \{i : \gamma_i \ge b_i\}$ множество индексов всех оставшихся ограничений. Тогда вместо задачи (31) можно рассматривать задачу

$$f(x) \to \min, \quad (a^i)^T x \le b_i, \quad i \in I, \tag{32}$$

с меньшим числом ограничений. Этим можно добиться сокращения объема вычислений.

Как только число оставшихся ограничений станет равным n, то переходим ко второму этапу.

II этап. Производим замену переменных (29) и формируем задачу вида (30), для которой используется упрощенный вариант модифицированного метода симплексных погружений.

Для проверки эффективности предложенных модификаций моделировался тест вида

$$\|x - a\|^2 \to \min, \quad Ax \le b, \quad \alpha \le x \le \beta,$$

где n-мерные векторы a, x, $(m \times n)$-матрица A, а также α, β генерировались случайным образом с помощью процедуры *randomize* языка Паскаль. Размерность n пространства и количество ограничений m задавались произвольно.

Использование двухэтапного подхода позволяет ускорить работу базового алгоритма симплексных погружений в среднем в 2,5 раза.

Литература

1. Анциферов Е.Г., Булатов В.П. *Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – Т. 23. – № 3. – С. 377–384.
2. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Шор Н.З., Гершович В.И. *Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования* // Кибернетика. – 1979. – Т. 4. – С. 62–67.

Сибирский энергетический институт
Сибирского отделения
Российской Академии Наук

Поступила
22.01.1996