ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.958

*С.Л. ТОНКОНОГ*

# ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

**1.** В данной работе с помощью методов приближенного группового анализа, развитых в [1]–[3], исследуется уравнение динамики свободной поверхности неньютоновской жидкости с реологическим законом Рейнера–Ривлина, которое удобно записать в виде системы [4]

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon F(t,x,u,\varepsilon), \quad \sigma = uu_x. \tag{1.1}$$

Здесь $t$ — время, $x$ — продольная координата, неизвестная функция $u(t,x)$ задает свободную поверхность жидкости, $\Phi$ — произвольная функция, определяемая реологией жидкости (в приложениях $\Phi$ — нечетная монотонно возрастающая непрерывная функция), $\varepsilon F$ баланс массы жидкости (поверхностный источник), $\varepsilon$ — малый параметр.

При $\varepsilon = 0$ невозмущенное уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x, \quad \sigma = uu_x, \tag{1.2}$$

допускает группу сдвигов по независимым переменным $t$ и $x$ с инфинитезимальными операторами $X_1^0 = \partial_t$ и $X_2^0 = \partial_x$ соответственно и группу растяжений с оператором $X_3^0 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u$.

Отметим, что ранее в [5] были полностью исследованы приближенные симметрии уравнения (1.1) со степенной функцией $\Phi$, что соответствует реологическому закону Оствальда–Ли для неньютоновской жидкости, являющемуся частным случаем общего реологического закона Рейнера–Ривлина, в [5] построены и приближенные инвариантные решения найденных приближенно-инвариантных уравнений. Условия точности приближенных симметрий уравнений (1.1) со степенной функцией $\Phi$ детально рассмотрены в [6], [7], где также были построены и точные инвариантные решения. Методы и приемы, развитые в [5]–[7], широко используются в в данной работе.

**2.** Мы будем использовать результаты работ [1]–[3], поэтому удобны следующие обозначения, приведенные в таблице

$$\begin{array}{cccccccc} t & x & u & \sigma & u_t & u_x & \sigma_t & \sigma_x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8. \end{array}$$

В новых обозначениях система (1.1) принимает вид

$$F_0^1 + \varepsilon F_1^1 = 0, \quad F_0^2 + \varepsilon F_1^2 = 0, \tag{2.1}$$

где

$$F_0^1 = \frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^2\Phi(y_4)) - y_5, \quad F_1^1 = F(y_1,y_2,y_3,y_4), \quad F_0^2 = y_4 - y_3y_6, \quad F_1^2 = 0.$$

Согласно [1] инфинитезимальный оператор однопараметрической группы приближенных с точностью $O(\varepsilon^2)$ симметрий уравнения (1.1) порождается оператором группы точных симметрий

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-01-00346а и 00-01-00128).

невозмущенного уравнения (1.2) и имеет вид $X = X^0 + \varepsilon X^1$, где $X^1 = \xi_k \frac{\partial}{\partial y_k}$ (суммирование по индексу $k$) — подлежащий определению оператор первого приближения.

В этом пункте найдем оператор $X_1 = \partial_t + \varepsilon X^1$ и соответствующее ему возмущение $F_1^1$, при котором уравнение (2.1) оказывается приближенно-инвариантным относительно группы с оператором $X_1$. Как показано в [1]–[2], для неизвестных коэффициентов $\xi_k$ и возмущения $F_1^1$ должны удовлетворяться определяющие уравнения, которые в случае системы (1.1) и оператора $X_1$ сводятся к следующим:

$$2\xi_3(y_6\Phi(y_4)) + y_3y_8\Phi'(y_4)) + \xi_4(2y_3y_6\Phi' + y_3^2y_8\Phi'') - \xi_5 + 2\xi_6y_3\Phi + \xi_8y_3^2\Phi' = -\frac{\partial F_1^1}{\partial y_1}, \tag{2.2}$$

$$\xi_3y_6 + \xi_6y_3 - \xi_4 = 0. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2), (2.3) выполняются на алгебраическом многообразии, определенном уравнениями

$$F_0^1 = 2y_3y_6\Phi + y_3^2y_8\Phi' - y_5 = 0, \quad F_0^2 = y_4 - y_3y_6 = 0. \tag{2.4}$$

Поскольку рассматриваются лишь точечные группы симметрий, коэффициенты $\xi_k$, $k = \overline{1,4}$, должны быть функциями аргументов $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, функцией этих аргументов является и функция $F_1^1$, ниже это обстоятельство будет существенно использоваться. Кроме того, для коэффициентов $\xi_k$, $k = \overline{5,8}$, справедливы формулы продолжения

$$\xi_5 = D_1(\xi_3) - y_5D_1(\xi_1) - y_6D_1(\xi_2), \quad \xi_6 = D_2(\xi_3) - y_5D_2(\xi_1) - y_6D_2(\xi_2), \tag{2.5}$$

$$\xi_8 = D_2(\xi_4) - y_7D_2(\xi_1) - y_8D_2(\xi_2),$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} + y_5\frac{\partial}{\partial y_3} + y_7\frac{\partial}{\partial y_4}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial}{\partial y_3} + y_8\frac{\partial}{\partial y_4}.$$

С учетом второго соотношения (2.4) уравнение (2.3) перепишем в виде $y_3^2\xi_6 = y_3\xi_4 - y_4\xi_3$. После подстановки в это равенство выражения (2.5) для $\xi_6$ и расщепления полученного соотношения по переменным $y_8$, $y_8^2$ найдем

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial y_4} = 0, \quad \frac{\partial\xi_3}{\partial y_4} - y_3^2\Phi'\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial\xi_1}{\partial y_3}\right) - y_6\frac{\partial\xi_1}{\partial y_4} = 0. \tag{2.6}$$

С учетом (2.6) имеем

$$\xi_6 = \frac{\partial\xi_3}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial\xi_3}{\partial y_3} - 2y_4\Phi\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial\xi_1}{\partial y_3}\right) - y_6\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial\xi_2}{\partial y_3}\right). \tag{2.7}$$

Уравнение (2.2) преобразуем, исключив из него $\xi_6$, с помощью соотношения (2.3). Получим

$$2\xi_4(y_4\Phi' + \Phi) - \xi_5 + \xi_8y_3^2\Phi' + y_8(2y_3\xi_3\Phi' + y_3^2\xi_4\Phi'') = -\frac{\partial F_1^1}{\partial y_1}. \tag{2.8}$$

В силу формул (2.5) коэффициенты $\xi_5$, $\xi_8$ в (2.7) зависят от $y_7$. Расщепление (2.8) по $y_7$ дает с учетом первого из соотношений (2.6)

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial y_4} - y_6\frac{\partial\xi_2}{\partial y_4} + y_3^2\Phi'\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial\xi_1}{\partial y_3}\right) = 0.$$

С учетом второго соотношения (2.6) получаем

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial y_4} = y_6\frac{\partial\xi_2}{\partial y_4}, \quad y_3\frac{\partial\xi_1}{\partial y_2} = -y_4\frac{\partial\xi_1}{\partial y_3}. \tag{2.9}$$

Поскольку $\xi_1$ не зависит от $y_4$, то из второго равенства в (2.9) следует, что $\xi_1$ зависит лишь от $y_1$, т.е. $\xi_1 = \varphi(y_1)$ (функция $\varphi$ произвольна). Теперь формулы продолжения существенно упрощаются и принимают вид

$$\xi_5 = \frac{\partial \xi_3}{\partial y_1} + (2y_4\Phi + y_3^2 y_8 \Phi')\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3} - \varphi'\right) - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_1}, \tag{2.10}$$
$$\xi_6 = \frac{\partial \xi_3}{\partial y_2} + y_6\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3}\right),$$
$$\xi_8 = \frac{\partial \xi_4}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial \xi_4}{\partial y_3} + y_8\left(\frac{\partial \xi_4}{\partial y_4} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3} - y_8\frac{\partial \xi_2}{\partial y_4}\right).$$

После подстановки соотношений (2.10) в (2.8) и расщепления полученного соотношения по $y_8$, $y_8^2$, учитывая, что правая часть в (2.8) не зависит от $y_8$, найдем

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y_4} = 0, \quad y_3\xi_4\Phi'' + 2\xi_3\Phi' + y_3\Phi'\left(\frac{\partial \xi_4}{\partial y_4} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} + \varphi'\right) = 0. \tag{2.11}$$

В результате уравнение (2.8) принимает вид

$$2\xi_4(\Phi + y_4\Phi') - \frac{\partial \xi_3}{\partial y_1} - 2y_4\Phi\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3} - \varphi'\right) + y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} + y_3^2\Phi'\left(\frac{\partial \xi_4}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial \xi_4}{\partial y_3}\right) = -\frac{\partial F_1^1}{\partial y_1}. \tag{2.12}$$

Равенство (2.3) с учетом соотношения (2.10) для $\xi_6$ преобразуется в равенство

$$y_4\xi_3 - y_3\xi_4 + y_3^2\frac{\partial \xi_3}{\partial y_2} + y_3 y_4\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - y_6\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3}\right) = 0. \tag{2.13}$$

Из (2.11) и (2.9) следует, что $\xi_2$ и $\xi_3$ не зависят от $y_4$, после чего из (2.13) находим

$$\xi_4 = y_4^2\chi_1 + y_4\chi_2 + \chi_3, \tag{2.14}$$

причем $\chi_1$, $\chi_2$ и $\chi_3$ не зависят от $y_4$. После подстановки соотношения (2.14) в (2.13) и расщепления полученного соотношения по степеням $y_4$ найдем

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y_3} = -y_3\chi_1, \quad \xi_3 = y_3\left(\chi_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3}\right), \quad \chi_3 = y_3\frac{\partial \xi_3}{\partial y_2}. \tag{2.15}$$

Подстановка (2.14) в (2.11) приводит к соотношению

$$y_3(y_4^2\chi_1 + y_4\chi_2 + \chi_3)\frac{\Phi''}{\Phi'} + 2y_3y_4\chi_1 = y_3\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - \varphi'\right) - 2\xi_3 - y_3\chi_2.$$

В этом равенстве правая часть не зависит от $y_4$, следовательно, в случае произвольной функции $\Phi$ должны выполняться соотношения $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$ и

$$y_3\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - \varphi'\right) = 2\xi_3.$$

Из (2.15) имеем $\xi_2 = \xi_2(y_1, y_2)$, $\xi_3 = \xi_3(y_1, y_3)$ и

$$\xi_3 = y_3\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3}\right), \quad 2\xi_3 = y_3\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial y_3} - \varphi'\right). \tag{2.16}$$

В силу первого из равенств (2.16) $\partial\xi_2/\partial y_2$ не зависит от $y_2$, т.е. $\xi_2 = \theta_1(y_1)y_2 + \theta(y_1)$, после чего с помощью второго из соотношений (2.16) находим, что $\xi_3 = y_3(2\theta_1 - \varphi')/3$. Воспользовавшись первым соотношением (2.16), найдем $\theta_1 = 2\varphi'$ и $\xi_3 = \varphi' y_3$, $\xi_2 = 2\varphi' y_2 + \theta$.

Функцию $F_1^1$ найдем из уравнения (2.12), которое с учетом полученных соотношений для коэффициентов $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ принимает вид $\frac{\partial F_1^1}{\partial y_1} = \varphi'' y_3 - y_6(2\varphi'' y_2 + \theta')$, откуда

$$F_1^1 = \varphi' y_3 - \frac{y_4}{y_3}(2\varphi' y_2 + \theta) + f(y_2, y_3, y_4).$$

Итак, уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon(\varphi' u - (2x\varphi' + \theta)\tfrac{\sigma}{u}) + f(x, u, \sigma), \quad \sigma = uu_x, \tag{2.17}$$

где $\Phi$, $f$ — произвольные функции своих аргументов, $\varphi$, $\theta$ — произвольные функции $t$, допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрий с оператором

$$X_1 = (1 + \varepsilon\varphi)\partial_t + \varepsilon((2\varphi' x + \theta)\partial_x + \varphi' u \partial_u). \tag{2.18}$$

**Замечание.** В случае степенной функции $\Phi$, полностью изученном в [5], группа симметрий расширяется и коэффициенты инфинитезимальных операторов определяются не двумя, как в случае произвольной $\Phi$, а тремя произвольными функциями $t$.

**3.** Аналогично, оператор $X_2^0 = \partial_x$ порождает группу приближенных симметрий с оператором

$$X_2 = (1 + \varepsilon(2\varphi' x + \theta))\partial_x + \varepsilon(\varphi\partial_t + \varphi' u\partial_u), \tag{3.1}$$

оставляющую инвариантным с точностью $O(\varepsilon^2)$ уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon(x\varphi'' u - (\varphi'' x^2 + \theta' x)\tfrac{\sigma}{u}) + f(t, u, \sigma), \quad \sigma = uu_x. \tag{3.2}$$

Этот результат следует из того, что в рассматриваемом случае определяющие уравнения, из которых находятся коэффициенты $\xi_k$ и функция $F_1^1$, остаются теми же самыми, что и в п. 2, но с той разницей, что в уравнении (2.2) производную $\partial F_1^1/\partial y_1$ теперь следует заменить на производную $\partial F_1^1/\partial y_2$, которая по-прежнему зависит лишь от переменных $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$.

**4.** Заменим теперь оператор $X_1^0 = \partial_t$ на оператор $X_\lambda^0 = \partial_t - \lambda\partial_x$. Легко заметить, что уравнение (1.1) будет инвариантно с точностью $O(\varepsilon^2)$ относительно группы с оператором

$$X_\lambda = (1 + \varepsilon\varphi)\partial_t + (-\lambda + \varepsilon(2\varphi' x + \theta))\partial_x + \varepsilon\varphi' u\partial_u \tag{4.1}$$

тогда и только тогда, когда функция $F$ удовлетворяет уравнению

$$X_\lambda^0 F = \varphi' u - (2\varphi'' x + \theta)\tfrac{\sigma}{u}.$$

Нетрудно найти его частное $F_1 = \varphi' u - (2\lambda\varphi + \theta + 2\varphi' x)\frac{\sigma}{u}$ и общее $F_2 = f(x + \lambda t, u, \sigma)$ решения ($f$ — произвольная функция) приведенного однородного уравнения $X_\lambda^0 F = 0$. Следовательно, уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon(\varphi' u - (2\lambda\varphi + \theta + 2\varphi' x)\tfrac{\sigma}{u} + f(x + \lambda t, u, \sigma)), \quad \sigma = uu_x, \tag{4.2}$$

допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрии с оператором $X_\lambda$ (4.1).

**5.** Оператор $X_3^0$ порождает группу приближенных симметрий с

$$X_3 = (t + \varepsilon\varphi)\partial_t + (2x + \varepsilon(2\varphi' x + \theta))\partial_x + (1 + \varepsilon\varphi')u\partial_u \tag{5.1}$$

для уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда функция $F$ удовлетворяет уравнению

$$X_3^0 F = \varphi'' u - (2\varphi'' x + \theta')\tfrac{\sigma}{u}. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) имеет частное решение

$$F_1 = t^{-1}\Big[\varphi' u - \Big(2\varphi' x + t^2 \int t^{-2}\theta' dt\Big)\frac{\sigma}{u}.$$

Общее решение приведенного однородного для уравнения (5.2)

$$tF_t + 2xF_x + uF_u = 0$$

имеет вид $F_2 = f(\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \widetilde{I}_3)$, $\widetilde{I}_1 = xt^{-2}$, $\widetilde{I}_2 = t^{-1}u$, $\widetilde{I}_3 = \sigma$ — инварианты группы с оператором $X_3^0$, $f$ — произвольная функция. Окончательно, уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon\Big[t^{-1}\Big(\varphi' u - \Big(2\varphi' x + t^2\int t^{-2}\theta' dt\Big)\frac{\sigma}{u}\Big) + f(\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \widetilde{I}_3)\Big], \quad \sigma = uu_x, \tag{5.3}$$

допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрий с оператором $X_3$ (5.1).

Таким образом, полностью классифицированы все уравнения вида (1.1), допускающие с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрий.

**6.** Перейдем к построению приближенных с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенно-инвариантных решений для уравнений, полученных в пп. 2–5. Начнем с уравнения (2.17), приближенно-инвариантного относительно группы с оператором (2.18). Инвариантами группы являются первые интегралы системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1+\varepsilon\varphi} = \frac{dx}{\varepsilon(2x\varphi' + \theta)} = \frac{du}{\varepsilon\varphi' u} = \frac{d\sigma}{0},$$

которые без труда находятся: $I = x(1+\varepsilon\varphi)^{-2} - \varepsilon\int \frac{\theta\, dt}{(1+\varepsilon\varphi)^3}$, $I_1 = (1+\varepsilon\varphi)^{-1}u$, $I_2 = \sigma$.

Приближенно-инвариантное решение с точностью $O(\varepsilon^2)$ для уравнения (2.17) следует искать в виде

$$u = (1+\varepsilon\varphi)\chi_1(I), \quad \sigma = \chi_2(I) \tag{6.1}$$

из условия, что невязка, возникающая после подстановки функций (6.1) в уравнение (2.17), равна $O(\varepsilon^2)$. Имеем

$$(u^2\Phi(\sigma))_x = (\chi_1^2\Phi(\chi_2))', \quad u_t = \varepsilon(\varphi'\chi_1 - (2x\varphi' + \theta)\chi_1') + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon(\varphi' u - (2x\varphi' + \theta)\tfrac{\sigma}{u}) = \varepsilon(\varphi'\chi_1 - (2x\varphi' + \theta)\tfrac{\chi_2}{\chi_1}) + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon f(x, u, \sigma) = \varepsilon f(I, \chi_1, \chi_2) + O(\varepsilon^2)$$

(здесь $'$ означает дифференцирование по $t$ для функций $\varphi$ и $\theta$ и дифференцирование по $I$ для функций $\chi_1$, $\chi_2$). После подстановки этих соотношений в уравнение (2.17) найдем для неизвестных функций $\chi_1$, $\chi_2$ систему дифференциальных уравнений

$$\chi_2 = \chi_1\chi_1', \quad (\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + \varepsilon f(I, \chi_1, \chi_2) = 0. \tag{6.2}$$

Таким образом, приближенное с точностью $O(\varepsilon^2)$ решение уравнения (2.17), инвариантное относительно группы с оператором (2.18), имеет вид (6.1), где функции $\chi_1$, $\chi_2$ удовлетворяют (6.2).

Пусть $f = 0$ и функция $\Phi$ монотонно возрастает и нечетна. Обозначая через $\Psi$ функцию, обратную для $\Phi$, найдем, что функция $\chi_1(I)$ неявно определяется с помощью квадратуры

$$I - I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\chi_1^2} \frac{d\zeta}{\Psi(c/\zeta)}, \quad I \ge I_0, \tag{6.3}$$

где $c > 0$, $I_0$ — произвольные постоянные. Из (6.3) следует, что решение (6.1) обращается в нуль в точке фронта

$$x_0(t) = (1+\varepsilon\varphi)^2\Big(I_0 + \varepsilon\int \frac{\theta\, dt}{(1+\varepsilon\varphi)^3}\Big),$$

причем поток $q = u^2\Phi(\sigma)$ для этого решения в точке фронта отличен от нуля.

В случае уравнения (3.2), допускающего с точностью $O(\varepsilon^2)$ группу с оператором $X_2$ (3.1), нетрудно с помощью инфинитезимального критерия приближенной инвариантности [1] найти приближенно-инвариантное решение с точностью $O(\varepsilon^2)$

$$u = c_1(1+\varepsilon(\varphi' x + f_1(t))), \tag{6.4}$$

где $c_1$, $c_2$ — произвольные константы, а

$$f_1 = \frac{1}{c_1}\int f(t, c_1, 0)dt.$$

Вид (6.4) решения уравнения (3.2) соответствует тому очевидному факту, что только константа является инвариантным относительно сдвига по $x$ решением невозмущенного уравнения (1.2).

Построим приближенно-инвариантное решение с точностью $O(\varepsilon^2)$ уравнения (4.2). Инварианты группы имеют вид

$$I = x(1+\varepsilon\varphi)^{-2} - \int \frac{\varepsilon\theta - \lambda}{(1+\varepsilon\varphi)^3}dt, \quad I_1 = (1+\varepsilon\varphi)^{-1}u, \quad I_2 = \sigma, \tag{6.5}$$

и приближенно-инвариантное решение следует искать в форме

$$u = (1+\varepsilon\varphi)\chi_1(I), \quad \sigma = \chi_2(I) \tag{6.6}$$

из условия, что невязка, возникающая после подстановки (6.6) в уравнение (4.2), равна $O(\varepsilon^2)$. В результате для неизвестных функций $\chi_1$, $\chi_2$ получим уравнение

$$\lambda\chi_1' = (\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + \varepsilon f(I, \chi_1, \chi_2), \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1',$$

где инвариант $I$ определен равенством (6.5).

В случае $f = 0$ снова полагая, что функция $\Phi$ монотонно возрастает и нечетна, получаем решение с точностью $O(\varepsilon^2)$ уравнения (4.2), определенное с помощью соотношений (6.6), (6.5) и соотношения

$$I - I_0 = \int_0^{\chi_1^2} \frac{\zeta\, d\zeta}{\Psi(\lambda/\zeta)}, \quad \lambda < 0, \quad I \le I_0,$$

неявно определяющего функцию $\chi_1$. Функция $\chi_1(I)$ получается (в случае $f = 0$) из решения типа бегущей волны невозмущенного уравнения (1.2) путем замены аргумента $x+\lambda t$ (инварианта группы $X_\lambda^0 = \partial_t - \lambda\partial_x$) на инвариант $I$. Для построенного решения поток в точке фронта

$$x_0(t) = (1+\varepsilon\varphi)^2\Big(I_0 + \int\frac{\varepsilon\theta-\lambda}{(1+\varepsilon\varphi)^3}dt\Big)$$

обращается в нуль.

В случае уравнения (5.3), приближенно-инвариантного относительно группы с оператором (5.1), приближенно-инвариантное решение с точностью $O(\varepsilon^2)$ следует искать в виде

$$u = (t+\varepsilon\varphi)\chi_1(I), \quad \sigma = \chi_2(I), \tag{6.7}$$

где

$$I = x(t+\varepsilon\varphi)^{-2} - \varepsilon\int\frac{\theta\, dt}{(t+\varepsilon\varphi)^3}$$

— инвариант группы $X_3$ (5.1). Имеем $\chi_2 = \chi_1\chi_1'$ и соотношения

$$u_t = \chi_1 + \varepsilon\varphi'\chi_1 - 2\chi_1' I - \frac{\varepsilon\theta\chi_1}{t^2} - 2\varepsilon\chi_1'\int\frac{\theta\, dt}{t^2} - \frac{2\varepsilon\varphi' x\chi_1'}{t^2} + O(\varepsilon^2),$$

$$(u^2\Phi(\sigma))_x = (\chi_1^2\Phi(\chi_2))', \quad \varepsilon t^{-1}\varphi' u = \varepsilon\varphi'\chi_1 + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\varepsilon}{t}\Big(2\varphi' x + t^2\int t^{-2}\theta' dt\Big)\frac{\sigma}{u} = \frac{\varepsilon\chi_1'}{t^2}(2\varphi' x + \theta) + 2\chi_1'\int\frac{\theta\, dt}{t^3} + O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon f(\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \widetilde{I}_3) = \varepsilon f(I, \chi_1, \chi_2) + O(\varepsilon^2).$$

После подстановки этих соотношений в уравнение (5.3) найдем, что функции $\chi_1$, $\chi_2$ в (6.7) должны удовлетворять уравнению

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + 2I\chi_1' - \chi_1 + \varepsilon f(I,\chi_1,\chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

**7.** Далее исследуются условия, при выполнении которых полученные приближенно-инвариантные уравнения будут точно инвариантны относительно соответствующей группы симметрии. Для точно инвариантных уравнений следует рассмотреть и вопрос о построении их точных (а не приближенно) инвариантных решений. Для этого необходимо прежде всего продолжить операторы $X_1$, $X_2$, $X_\lambda$, $X_3$ на пространство дифференциальных функций первого порядка, для чего следует определить с помощью формул (2.10) коэффициенты $\xi_5, \xi_6, \xi_8$. Слагаемое $\varepsilon\xi_7\partial/\partial\sigma_t$ в продолженном инфинитезимальном операторе будем опускать, т. к. рассматриваемые уравнения не содержат переменной $\sigma_t$. С помощью (2.10) найдем

$$\xi_5 = \varphi''u - (2\varphi''x + \theta')\tfrac{\sigma}{u}, \quad \xi_6 = -\varphi' u_x, \quad \xi_8 = -2\varphi'\sigma_x. \tag{7.1}$$

Начнем с уравнения (2.17). Используя инфинитезимальный критерий точной инвариантности [8], [9] и соотношения (7.1), в результате достаточно громоздких выкладок, которые опустим, найдем, что уравнение (2.17) тогда и только тогда точно инвариантно относительно группы симметрий с оператором (2.18), когда функция $f(x,u,\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$(2x\varphi' + \theta)f_x + \varphi' u f_u = (2x(\varphi\varphi')' + (\varphi\theta)'\tfrac{\sigma}{u} - (\varphi\varphi')'u. \tag{7.2}$$

Тот факт, что функция $f$ — решение уравнения (7.2) — зависит лишь от $x$, $u$, $\sigma$ и не зависит от $t$, накладывает весьма жесткие условия на функции $\varphi$ и $\theta$. Приведем примеры выполнения этих условий. С этой целью заметим, что неоднородное линейное уравнение (7.2) имеет частное решение $f_1 = \alpha(x)u + \beta(x)\frac{\sigma}{u}$ тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(2x\varphi' + \theta)\alpha' + \varphi'\alpha = -(\varphi\varphi')', \quad (2x\varphi' + \theta)\beta' - \varphi'\beta = 2x(\varphi\varphi')' + (\theta\varphi)' \tag{7.3}$$

($'$ для функций $\alpha$, $\beta$ — дифференцирование по $x$, для $\varphi$, $\theta$ — по $t$).

Возможны следующие три случая.

1) $\theta = a\varphi'$ ($a$ — произвольная константа), тогда $\alpha$, $\beta$, $\varphi$ находятся из уравнений

$$(2x + a)\alpha' + \alpha = -1, \quad (2x + a)\beta' - \beta = 2x + a, \quad \varphi' = (\varphi\varphi')',$$

откуда

$$\alpha = -1 + b(2x + a)^{-1/2}, \quad \beta = 2x + a + c(2x + a)^{1/2}, \quad \varphi = t$$

($b$, $c$ — константы).

Приведенное однородное уравнение для уравнения (7.2) принимает вид $(2x + a)f_x + uf_u = 0$, и его общим решением, зависящим лишь от $x$, $u$, $\sigma$, является

$$f_2 = f((2x + a)^{-1/2}u, \sigma), \tag{7.4}$$

где $f$ — произвольная функция двух аргументов.

В результате после замены $x + \frac{a}{2}$ снова на $x$, $2\varepsilon$ — на $\varepsilon$ ($\varepsilon$ произвольно) с учетом произвольности функции $f$ и константы $c$ получаем уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + f(x^{-1/2}u, \sigma), \quad \sigma = uu_x, \tag{7.5}$$

точно инвариантное относительно двупараметрической группы с операторами

$$X_3^0 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\,\partial_u, \quad X_1^0 = \partial_t. \tag{7.6}$$

2) $\varphi = \sqrt{t}$, $\theta = 0$, тогда из (7.3) получаем $\alpha = c_1x^{-1/2}$, $\beta = c_2x^{1/2}$ ($c_1$, $c_2$ — произвольные константы). Общее решение приведенного однородного уравнения для уравнения (7.2) снова имеет вид (7.4).

В результате находим, что уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}(u - 2x\tfrac{\sigma}{u}) + f(x^{-1/2}u, \sigma), \quad \sigma = uu_x, \tag{7.7}$$

точно инвариантно относительно группы с оператором

$$X = (1 + \varepsilon\sqrt{t})\partial_t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}(x\partial_x + \tfrac{u}{2}\partial_u) \tag{7.8}$$

(при выводе уравнения (7.7) мы воспользовались произвольностью функции $f$, что позволило включить в нее слагаемые $c_1x^{-1/2}u$ и $c_2x^{1/2}\frac{\sigma}{u}$).

3) $\alpha$ — константа, $\beta = -2\alpha x$, $\varphi = -\alpha t$, $\theta = t$. В этом случае уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon(f(\sigma) - t\tfrac{\sigma}{u}), \quad \sigma = uu_x, \tag{7.9}$$

допускает группу с оператором

$$X = (1 - \varepsilon\alpha t)\partial_t + \varepsilon((t - 2\alpha x)\partial_x - \alpha u\,\partial_u). \tag{7.10}$$

**8.** Для уравнения (3.2) аналогично с помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности доказывается, что оно точно инвариантно относительно группы с оператором $X_2$ (2.1) тогда и только тогда, когда функция $f(t, u, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi f_t + \varphi' u f_u = -(x(\varphi\varphi'')' + \varphi''(2x\varphi' + \theta))u + [x^2(\varphi\varphi''' + 3\varphi'\varphi'') + x((\varphi\theta')' + 2\theta\varphi'') + \theta\theta']\tfrac{\sigma}{u}. \tag{8.1}$$

Левая часть уравнения (8.1) не зависит от $x$, т. к. от $x$ не зависит функция $f$. Отсюда следует, что функции $\varphi$ и $\theta$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\varphi\varphi''' + 3\varphi'\varphi'' = 0, \quad (\varphi\theta')' + 2\theta\varphi'' = 0. \tag{8.2}$$

С учетом соотношений (8.2) уравнение (8.1) принимает вид

$$\varphi f_t + \varphi' u f_u = \theta(\theta'\tfrac{\sigma}{u} - \varphi'' u). \tag{8.3}$$

Уравнение (8.3) имеет частное решение

$$f_1 = \alpha(t)u + \beta(t)\tfrac{\sigma}{u}, \tag{8.4}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — решения уравнений $(\alpha\varphi)' = -\theta\varphi''$, $\beta'\varphi - \beta\varphi' = \theta\theta'$. Без труда находим

$$\alpha(t) = \Big(c_1 - \int \theta\varphi'' dt\Big)/\varphi, \quad \beta(t) = \Big(c_2 + \int \theta\theta'\varphi^{-2} dt\Big)\varphi, \tag{8.5}$$

$c_1$, $c_2$ — произвольные константы. Общее решение приведенного однородного уравнения для уравнения (8.3), не зависящее от $x$, получаем в виде $f_2 = f(\varphi^{-2}u, \sigma)$ ($f$ — произвольная функция).

Итак, уравнение (3.2) тогда и только тогда инвариантно относительно группы с оператором $X_2$ (3.1), когда функции $\varphi$ и $\theta$ удовлетворяют уравнениям (8.2), а функция $f(t, u, \sigma) = f_1 + f_2$. С учетом соотношений (8.4), (8.5) и произвольности функции $f_2$ находим окончательно уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon\Big[\Big(\varphi'' x - \varphi^{-1}\int \theta\varphi'' dt\Big)u - \Big(\varphi'' x^2 + \theta'' x - \varphi\int \theta\theta'\varphi^{-2} dt\Big)\tfrac{\sigma}{u} + f(\varphi^{-1}u, \sigma)\Big], \tag{8.6}$$
$$\sigma = uu_x,$$

точно инвариантное относительно группы с оператором $X_2$ (3.1) (слагаемые $c_1u/\varphi$ и $c_2\varphi\sigma/u$ мы включили в функцию $f(\varphi^{-1}u, \sigma)$, воспользовавшись ее произвольностью).

Отметим, что уравнение (8.2) для функции $\varphi$ легко решается, а именно

$$\varphi = \pm(at^2 + bt + c)^{1/2}, \tag{8.7}$$

$a$, $b$, $c$ — произвольные константы.

**9.** Для того чтобы уравнение (4.2) было точно инвариантно относительно группы с оператором (4.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(I,u,\sigma)$ $(I = x + \lambda t)$ удовлетворяла уравнению

$$(\lambda\varphi + 2x\varphi' + \theta)f_I + \varphi' u f_u = (2x(\varphi\varphi')' + (\theta\varphi)')\tfrac{\sigma}{u} - (\varphi\varphi')'u. \tag{9.1}$$

Тот факт, что функция $f$ — решение уравнения (9.1) — должна зависеть лишь от трех аргументов $I$, $u$, $\sigma$ (а не от четырех аргументов $t$, $x$, $u$, $\sigma$), снова налагает жесткие ограничения на функции $\varphi$ и $\theta$. Нетрудно заметить, что неоднородное уравнение (9.1) имеет частное решение

$$f_1 = \alpha(I)u + \beta(I)\tfrac{\sigma}{u}$$

тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(\lambda\varphi - 2\lambda t\varphi' + \theta)\alpha' + 2I\varphi'\alpha' + \varphi'\alpha = -(\varphi\varphi')', \tag{9.2}$$

$$(\lambda\varphi - 2\lambda t\varphi' + \theta)\beta' + 2I\varphi'\beta' - \varphi'\beta = 2I(\varphi\varphi')' - 2\lambda t(\varphi\varphi')' + (\theta\varphi)' \tag{9.3}$$

($'$ для функций $\alpha$ и $\beta$ означает дифференцирование по $I$).

Пусть функции $\varphi$ и $\theta$ удовлетворяют уравнению

$$\lambda\varphi - 2\lambda t\varphi' + \theta = \mu\varphi' \tag{9.4}$$

($\mu$ — произвольная константа). Из (9.4) следует, что $(\theta\varphi)' - 2\lambda t(\varphi\varphi')' = \mu\varphi\varphi'$ и соотношения (9.2), (9.3) принимают вид

$$(\mu + 2I)\alpha' + \alpha = \nu, \tag{9.5}$$

$$(\mu + 2I)\beta' - \beta = -(\mu + 2I)\nu, \tag{9.6}$$

где обозначено

$$(\varphi\varphi')'/\varphi' = -\nu. \tag{9.7}$$

Так как в (9.5) левая часть зависит лишь от аргумента $I$, а функция $\nu$ зависит лишь от $t$, то $\nu$ является константой.

Уравнения (9.5), (9.6) для функций $\alpha$ и $\beta$ теперь легко решаются в замкнутом виде

$$\alpha = \nu + c_1(\mu + 2I)^{-1/2}, \quad \beta = c_2(\mu + 2I)^{1/2} - \nu(\mu + 2I).$$

Приведенное однородное уравнение для уравнения (9.1) с учетом (9.4) записывается в виде

$$(\mu + 2I)f_I + uf_u = 0,$$

и его общим решением, зависящим лишь от $I$, $u$, $\sigma$, является

$$f_2 = f((\mu + 2I)^{-1/2}u, \sigma),$$

где $f$ — произвольная функция. Получаем, что уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon[(\nu + \varphi')u - (2\lambda\varphi + \theta + 2\varphi' x + \nu(\mu + 2I))\tfrac{\sigma}{u} + f((\mu + 2I)^{-1/2}u, \sigma), \tag{9.8}$$
$$\sigma = uu_x$$

($\mu$, $\nu$ — произвольные постоянные), допускает группу с оператором

$$X_\lambda = (1 + \varepsilon\varphi)\partial_t + (-\lambda + \varepsilon(2\varphi' x + \theta))\partial_x + \varepsilon\varphi' u\,\partial_u$$

при условии, что функции $\varphi$, $\theta$ удовлетворяют уравнениям (9.4) и (9.7).

Отметим, что при выводе уравнения (9.8) мы воспользовались произвольностью функции $f$ и включили в нее слагаемые $c_1(\mu + 2I)^{-1/2}u$ и $c_2(\mu + 2I)^{1/2}\frac{\sigma}{u}$.

Общее решение уравнений (9.4), (9.7) находится без труда, но функция $\varphi$ определяется в неявной форме. Чтобы не выписывать громоздкие соотношения, ограничимся двумя примерами.

1) $\nu=0$, $\mu=0$, $\varphi=\sqrt{t}$, $\theta=0$. Уравнение

$$u_t=(u^2\Phi(\sigma))_x+\varepsilon\Big[\frac{u}{2\sqrt{t}}-\Big(2\lambda\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\frac{\sigma}{u}+f(I^{-1/2}u,\sigma)\Big],\qquad(9.9)$$
$$\sigma=uu_x,$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda=(1+\varepsilon\sqrt{t})\partial_t+\Big(-\lambda+\varepsilon\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\partial_x+\frac{\varepsilon u}{2\sqrt{t}}\partial_u.\qquad(9.10)$$

2) $\nu=-1$, $\mu=0$, $\varphi=t$, $\theta=\lambda t$. Уравнение

$$u_t=(u^2\Phi(\sigma))_x+\varepsilon(f(I^{-1/2}u,\sigma)-\lambda t\tfrac{\sigma}{u}),\quad \sigma=uu_x,\qquad(9.11)$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda=(1+\varepsilon t)\partial_t+(-\lambda+\varepsilon(2x+\lambda t))\partial_x+\varepsilon u\,\partial_u.\qquad(9.12)$$

**10.** Продолжив оператор $X_3=X_3^0+\varepsilon X$ на пространство дифференциальных функций первого порядка, получим оператор

$$X_3=(t+\varepsilon\varphi)\partial_t+(2x+\varepsilon(2\varphi'x+\theta))\partial_x+(1+\varepsilon\varphi')u\,\partial_u+$$
$$+\varepsilon(\varphi''u-(2\varphi''x+\theta')\tfrac{\sigma}{u})\frac{\partial}{\partial u_t}+(1-\varepsilon\varphi')u_x\frac{\partial}{\partial u_x}-2(1+\varepsilon\varphi')\sigma_x\frac{\partial}{\partial\sigma_x}$$

(мы снова опустили в операторе $X_3$ слагаемое $(-\sigma_t+\varepsilon\xi_7)\frac{\partial}{\partial\sigma_t}$, т.к. уравнение (5.3) не содержит слагаемого $\sigma_t$). С помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности получим, что уравнение (5.3) точно инвариантно относительно группы с оператором $X_3$ (5.1) тогда и только тогда, когда функция $f(\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\widetilde{I}_3)$ удовлетворяет уравнению

$$(R_1(t)\widetilde{I}_1+P(t))\frac{\partial f}{\partial\widetilde{I}_1}+R_2(t)\widetilde{I}_2\frac{\partial f}{\partial\widetilde{I}_2}=A(t)\widetilde{I}_2+B(t)\widetilde{I}_3\widetilde{I}_2^{-1}-2A(t)\widetilde{I}_1\widetilde{I}_3\widetilde{I}_2^{-1},\qquad(10.1)$$

где

$$R_1=2(\varphi'-\varphi t^{-1}),\quad R_2=\varphi'-t^{-1}\varphi,\quad P=t^{-2}\theta,\quad A=t^{-1}\varphi\varphi'-(\varphi\varphi')',$$
$$B=(t^{-1}\varphi-\varphi')\int t^{-2}\theta\,dt+t^{-2}(\varphi\theta'+2\varphi'\theta).$$

Тот факт, что функция $f(\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\widetilde{I}_3)$ — решение уравнения (10.1) — должна зависеть лишь от инвариантов $\widetilde{I}_1=xt^{-2}$, $\widetilde{I}_2=ut^{-1}$, $\widetilde{I}_3=\sigma$ группы $X_3^0$, накладывает жесткие ограничения на функции $\varphi$ и $\theta$.

Начнем с изучения случая, когда уравнение (10.1) оказывается однородным, т. е. когда $A(t)=B(t)=0$. В этом случае получаем $\varphi=at$, $\theta=bt^{-2}$, $a$, $b$ — произвольные постоянные. В случае $b\neq0$ однородное уравнение (10.1) имеет не зависящее от $t$ решение $f=f(\widetilde{I}_2,\widetilde{I}_3)$, если же $b=0$, то будем иметь $f=f(\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\widetilde{I}_3)$.

Итак, уравнение

$$u_t=(u^2\Phi(\sigma))_x+\varepsilon\Big[t^{-1}\Big((au-\Big(2ax+\frac{b}{2t^2}\Big)\frac{\sigma}{u}\Big)+f(ut^{-1},\sigma)\Big],\quad\sigma=uu_x,\qquad(10.2)$$

допускает группу симметрий с оператором

$$X_3=t\partial_t+\Big(2x+\frac{\varepsilon bt^{-2}}{1+\varepsilon a}\Big)\partial_x+u\,\partial_u,\qquad(10.3)$$

а уравнение

$$u_t=(u^2\Phi(\sigma))_x+\varepsilon[t^{-1}(u-2x\tfrac{\sigma}{u})+f(xt^{-2},ut^{-1},\sigma)],\quad\sigma=uu_x,\qquad(10.4)$$

— группу с оператором

$$X_3^0 = t\partial_t + 2x\,\partial_x + u\,\partial_u.$$

Функция $f$ в уравнениях (10.2) и (10.4) произвольна.

В случае неоднородного уравнения (10.1) нетрудно заметить, что оно имеет частное решение

$$f_1 = c_1\widetilde{I}_2 + c_2\widetilde{I}_3\widetilde{I}_2^{-1} + c_3\widetilde{I}_1\widetilde{I}_3\widetilde{I}_2^{-1}$$

($c_1$, $c_2$, $c_3$ — константы) при условии, что функции $\varphi$ и $\theta$ удовлетворяют системе уравнений

$$c_1R_2 = A, \quad c_3(R_1 - R_2) = -2A, \quad c_3P - c_2R_2 = B. \tag{10.5}$$

Из уравнений (10.5) следует, что, по существу не уменьшая общности, можно положить

a) $\varphi = t$, $\theta = t^{c_3-2}$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ — произвольные константы;

b) $\varphi = 0$, $\theta$ — произвольная функция, $c_3 = 0$, $c_1$, $c_2$ — произвольные константы.

Случай a) распадается на два подслучая: a$_1$) $c_3 \neq 4$, a$_2$) $c_3 = 4$. В случае a$_1$)

$$t^2\int t^{-2}\theta' dt = \frac{c_3-2}{c_3-4}t^{c_3-2},$$

а в случае a$_2$)

$$t^2\int t^{-2}\theta' dt = 2t^2\ln t.$$

В обоих случаях общее решение приведенного однородного уравнения для уравнения (10.1) есть $f_2 = f(\widetilde{I}_2, \widetilde{I}_3)$, $f$ — произвольная функция.

В результате в случае a$_1$) получаем уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon\Big((c_3-2)\Big(xt^{-2} - \frac{t^{c_3-4}}{c_3-4}\Big)\frac{\sigma}{u} + f(ut^{-1},\sigma)\Big), \quad \sigma = uu_x, \tag{10.6}$$

допускающее группу симметрий с оператором

$$X_3 = t\,\partial_t + \Big(2x + \frac{\varepsilon t^{c_3-2}}{1+\varepsilon}\Big)\partial_x + u\,\partial_u, \tag{10.7}$$

а в случае a$_2$) — уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + 2\varepsilon((xt^{-1} - t\ln t)\tfrac{\sigma}{u} + f(ut^{-1},\sigma)), \quad \sigma = uu_x, \tag{10.8}$$

инвариантное относительно группы с оператором

$$X_3 = t\,\partial_t + \Big(2x + \frac{\varepsilon t^2}{1+\varepsilon}\Big)\partial_x + u\,\partial_u \tag{10.9}$$

(в обоих случаях мы включили слагаемые $c_2\widetilde{I}_3\widetilde{I}_2^{-1}$ в функцию $f$).

Наконец, в случае b) без труда находим уравнение

$$u_t = (u^2\Phi(\sigma))_x + \varepsilon\Big(f(ut^{-1},\sigma) - t^2\int t^{-2}\theta' dt\frac{\sigma}{u}\Big), \quad \sigma = uu_x, \tag{10.10}$$

и оставляющую его инвариантным группу с оператором

$$X_3 = t\,\partial_t + (2x + \varepsilon\theta)\partial_x + u\,\partial_u. \tag{10.11}$$

**11.** Построим точные инвариантные решения уравнений, найденных в пп. 7–9. Решение уравнения (7.5), инвариантное относительно группы с оператором (7.6), следует искать в виде $u = t\chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$, где $J = xt^{-2}$ — инвариант группы. Для функций $\chi_1$, $\chi_2$ получаем систему уравнений

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + (2J + J^{1/2})\chi_1' - \chi_1 + f(\chi_1 J^{-1/2}, \chi_2), \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Инвариантное решение уравнения (7.7) записывается в виде $u = (1+\varepsilon\sqrt{t}\,)\chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$, где $J = x(1+\varepsilon\sqrt{t}\,)^{-2}$ — инвариант группы (7.8). Функции $\chi_1$, $\chi_2$ удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + \varepsilon(\varepsilon(\chi_1/2 - J\chi_1') + f(J^{-1/2}\chi_1, \chi_2)) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Рассмотрим уравнение (7.9). Его решение, инвариантное относительно группы с оператором (7.10), получаем в виде

$$u = (1-\varepsilon\alpha t)\chi_1(J), \quad \sigma = \chi_2(J), \quad J = \left(x - \frac{1}{2\varepsilon\alpha^2}\right)(1-\varepsilon\alpha t)^{-2} + (\varepsilon\alpha^2(1-\varepsilon\alpha t))^{-1}.$$

Функции $\chi_1$, $\chi_2$ — решение уравнения

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + \alpha^{-1}(1 - 2\varepsilon\alpha^2 J)\chi_1' + \varepsilon(\alpha\chi_1 + f(\chi_2)), \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Для уравнения (9.9) построение решения, инвариантного относительно группы с оператором (9.10), требует более громоздких выкладок, чем для предыдущих уравнений. Приведем окончательный результат $u = (1+\varepsilon\sqrt{t}\,)\chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$. Функции $\chi_1$, $\chi_2$ удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' - (\lambda + \varepsilon^2 J)\chi_1' + \varepsilon^2\chi_1/2 + \varepsilon f(J^{-1/2}\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1',$$

где $J = \frac{x+\lambda t}{(1+\varepsilon\sqrt{t}\,)^2}$ — инвариант группы $X_\lambda$ (9.10), выбранный так, чтобы иметь $J = I = x + \lambda t$ при $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ построенное решение превращается в решение типа бегущей волны невозмущенного уравнения (1.2).

Решение уравнения (9.11), инвариантное относительно группы с оператором (9.12), находится в виде $u = (1+\varepsilon t)\chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$, $J = \frac{x+\lambda t}{(1+\varepsilon t)^2}$, а для функций $\chi_1$, $\chi_2$ получаем уравнение

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + (2\varepsilon J - \lambda)\chi_1 - \varepsilon(\chi_1 - f(J^{-1/2}\chi_1, \chi_2)) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Инвариантные решения уравнений (10.2), (10.6), (10.8), (10.10) представляются в виде $u = t\chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$.

Для уравнения (10.2) $J = xt^{-2} + \frac{\varepsilon b}{4(1+\varepsilon)t^4}$ — инвариант группы $X_3$ (10.3) и $\chi_1$, $\chi_2$ находятся из уравнения

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + (1-\varepsilon)(2J\chi_1' - \chi_1) + f(\chi_1, \chi_2), \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Для уравнения (10.6) $J = xt^{-2} - \frac{\varepsilon t^{c_3-4}}{(1+\varepsilon)(c_3-4)}$ — инвариант группы $X_3$ (10.7), а уравнение для функций $\chi_1$, $\chi_2$ $(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + (2+\varepsilon(c_3-2))J\chi_1' - \chi_1 + \varepsilon f(\chi_1, \chi_2) = 0$, $\chi_2 = \chi_1\chi_1'$.

Для уравнения (10.8) инвариант группы $X_3$ (10.9) $J = xt^{-2} - \frac{\varepsilon \ln t}{1+\varepsilon}$, а уравнение на функции $\chi_1$, $\chi_2$:

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + \left(2(1+\varepsilon)J + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\chi_1' - \chi_1 + f(\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Для уравнения (10.10), допускающего группу с оператором (10.11),

$$J = xt^{-2} - \varepsilon\int \theta t^{-3} dt,$$

а уравнение на функции $\chi_1$, $\chi_2$ получается в виде

$$(\chi_1^2\Phi(\chi_2))' + 2J\chi_1' - \chi_1 + \varepsilon f(\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Выражаю искреннюю благодарность В.А. Чугунову и Л.Д. Эскину за внимание к работе.

## Литература


1. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии уравнений с малым параметром* // Препринт № 150 ИПМ АН СССР. – 1987. – 29 с.
2. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии уравнений с малым параметром* // Матем. сб. – 1988. – Т. 36. – № 4. – С. 435–450.
3. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Методы возмущений в групповом анализе* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1989. – Т. 34. – С. 85–147.
4. Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б. *Численное исследование и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении* // Задачи механики природных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С. 82–95.
5. Тонконог С.Л. *Приближенный групповой анализ уравнений динамики субизотермических ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 33–47.
6. Тонконог С.Л., Эскин Л.Д. *О некоторых симметриях и инвариантных решениях уравнений динамики неньютоновской жидкости.* I // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 55–66.
7. Тонконог С.Л., Эскин Л.Д. *О некоторых симметриях и инвариантных решениях уравнений динамики неньютоновской жидкости.* II // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 55–62.
8. Овсянников Л.В. *Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений.* – Новосибирск, 1966. – 131 с.
9. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.



*Казанский государственный университет*



*Поступили*
*первый вариант* 12.04.1999
*окончательный вариант* 20.01.2000