ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 519.6:539.3

В.В. ВЕРБИЦКИЙ

СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В данной статье продолжено исследование сходимости смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек, начатое в [1]. В отличие от [1] здесь рассматривается нелинейная задача устойчивости в виде квадратичной задачи на собственные значения. Последняя сведена к спектральному анализу квадратичного самосопряженного пучка вполне непрерывных операторов. Получены оценки скорости сходимости собственных значений и собственных векторов дискретной задачи, построенной по схеме Германа–Джонсона смешанного метода конечных элементов.

1. Исходные предположения и постановка задачи

Пусть Ω — выпуклая многоугольная область из R^2 с границей $\partial\Omega$. Определим пространства

$$M = [L_2(\Omega)]^3, \quad H = [H_0^1(\Omega)]^3, \quad V = [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^2(\Omega)$$

с нормами $|u|_0^2 = |u_1|_{0,\Omega}^2 + |u_2|_{0,\Omega}^2 + |u_3|_{0,\Omega}^2$, $\|u\|_1^2 = \|u_1\|_{1,\Omega}^2 + \|u_2\|_{1,\Omega}^2 + \|u_3\|_{1,\Omega}^2$, $\|u\|_V^2 = \|u_1\|_{1,\Omega}^2 + \|u_2\|_{1,\Omega}^2 + \|u_3\|_{2,\Omega}^2$ соответственно.

Предположим, что перемещения срединной поверхности исходного равновесного состояния оболочки $\overline{u}$ в окрестности предполагаемого критического состояния вычислены или оценены и деформации в этой окрестности можно линеаризовать. Тогда можно ввести параметр нагружения λ так, что линеаризованные деформации критического состояния будут выражаться через $\lambda\overline{u}$. При таких предположениях вариационная задача нелинейной устойчивости пологих оболочек с однородными условиями Дирихле для бифуркационных составляющих перемещений на границе $\partial\Omega$ состоит в следующем [2], [3]: найти такую пару $(\lambda, u) \in C \times V$, что $u \neq 0$ и

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u,v) = \lambda d_1(u,v) + \lambda^2 d_2(u,v) \quad \forall v \in V. \tag{EP}$$

Здесь

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) = \int_\Omega D_M[\partial_{11}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{11}u_3\partial_{22}v_3 + \partial_{22}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{22}u_3\partial_{22}v_3 - (1-\nu)(\partial_{11}u_3\partial_{22}v_3 + \partial_{22}u_3\partial_{11}v_3 - \partial_{12}u_3\partial_{12}v_3)]dx,$$

$$c(u,v) = \int_\Omega D_N\Big[\varepsilon_1(u)\varepsilon_1(v) + \varepsilon_2(u)\varepsilon_2(v) + \nu\varepsilon_1(u)\varepsilon_2(v) + \nu\varepsilon_2(u)\varepsilon_1(v) + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}(u)\varepsilon_{12}(v)\Big]dx,$$

$$d_1(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2}[N_{ij}^l(\overline{u})\partial_i u_3\partial_j v_3 + N_{ij}^l(u)\partial_i\overline{u}_3\partial_j v_3 + N_{ij}^l(v)\partial_i\overline{u}_3\partial_j u_3]dx,$$

$$d_2(u,v) = \int_\Omega \frac{3D_N}{2}[((\partial_1\overline{u}_3)^2 + \nu(\partial_2\overline{u}_3)^2)\partial_1 u_3\partial_1 v_3 + ((\partial_2\overline{u}_3)^2 + \nu(\partial_1\overline{u}_3)^2)\partial_2 u_3\partial_2 v_3 + \\ + (1-\nu)(\partial_1\overline{u}_3\partial_2\overline{u}_3)(\partial_1 u_3\partial_2 v_3 + \partial_2 u_3\partial_1 v_3)]dx,$$

где $(\varepsilon_1(u), \varepsilon_2(u), \varepsilon_{12}(u))^T$ — вектор мембранной деформации, $N^l_{ij}(u)$ $(1 \le i,j \le 2,\, N^l_{12}(u) = N^l_{21}(u))$ — линеаризованные мембранные усилия, $\overline{u} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)^T$ — вектор перемещений срединной поверхности исходного равновесного состояния оболочки в окрестности предполагаемого критического состояния. Остальные обозначения взяты из [1], [4].

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$|d_1(u,v)| \le C_1|v|_0, \quad |d_2(u,v)| \le C_2|v|_0 \quad \forall u \in V, \ \forall v \in V. \tag{1.1}$$

где $C_1 > 0, C_2 > 0$ – некоторые константы.

Задача: для любого $f \in H$ найти такое $u \in V$, что

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u,v) = (f,v)_H \quad \forall v \in V,$$

имеет единственное решение, для которого имеет место оценка $\|u\|_V \le C\|f\|_H$, где $C > 0$ — константа. Положив $u = Tf$, определяем линейный непрерывный оператор $T : H \to V$.

Поскольку билинейная форма $d_1(\cdot,\cdot)$ непрерывна на $H \times H$, то по лемме Рисса можно определить линейный непрерывный оператор $D_1 : H \to H$ следующей задачей: для любого $f \in H$ найти такое $u \in H$, что

$$(u,v)_H = d_1(f,v) \quad \forall v \in H.$$

Аналогично с помощью билинейной формы $d_2(\cdot,\cdot)$ можно определить линейный непрерывный оператор $D_2 : H \to H$. Определим теперь линейные непрерывные операторы $T_1 : H \to V$ и $T_2 : H \to V$, положив $T_1 = TD_1$, $T_2 = TD_2$.

Теорема 1.1. *Операторы T_1 и T_2 самосопряженные и вполне непрерывные в пространстве V.*

Доказательство. Самосопряженность операторов можно показать, используя симметричность билинейных форм $d_1(\cdot,\cdot)$ и $d_2(\cdot,\cdot)$ и билинейную форму $A(u,v) = a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u,v)$ в качестве скалярного произведения в пространстве V.

Поскольку операторы непрерывны из H в V, то их вполне непрерывность легко получить из определения, используя вид билинейных форм $d_1(\cdot,\cdot)$ и $d_2(\cdot,\cdot)$.

Равенство (EP) можно переписать в виде

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u,v) = (\lambda D_1 u + \lambda^2 D_2 u, v)_H \quad \forall v \in V.$$

Из последнего равенства и определения оператора T следует, что задача (EP) равносильна задаче на собственные значения для самосопряженного квадратичного операторного пучка в пространстве V: найти такую пару $(\lambda, u) \in C \times V$,что $u \ne 0$ и

$$L(\lambda)u = 0, \tag{1.2}$$

где $L(\lambda) = I - \lambda T_1 - \lambda^2 T_2$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые определения и результаты для операторных пучков ([5], с. 60–69) и голоморфных оператор-функций [6], [7]. Пусть Λ — открытое связное множество в C, $L(\lambda)$ — оператор-функция, голоморфная в Λ. Спектром $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L)$ чисел $\lambda \in \Lambda$, для которых оператор $L(\lambda)$ не имеет обратного в пространстве $L(V)$ линейных непрерывных операторов, действующих в V. Очевидно, что $\sigma(L)$ — замкнутое в Λ множество. Числа $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma(L)$ называются регулярными значениями оператор-функции $L(\lambda)$, и их множество обозначают $\rho(L)$. Полином

$$u(\lambda) = u^0 + (\lambda - \lambda_0)u^1 + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{k-1}u^{k-1},$$

с $u^i \in V$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $u^0 \neq 0$, будем называть корневым полиномом порядка $\nu = \nu(u(\lambda))$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0, если голоморфная функция $L(\lambda)u(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\nu \geq k$, т. е. если

$$[L(\lambda)u(\lambda)]^{(i)}_{\lambda=\lambda_0} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \quad [L(\lambda)u(\lambda)]^{(\nu)}_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

При этом элементы u^i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, называются корневыми элементами порядка i, а замкнутая линейная оболочка всевозможных корневых элементов — корневым подпространством $J(L, \lambda_0)$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0. В частности, элементы u^0 называются собственными элементами, а их замкнутая линейная оболочка — собственным подпространством $N(L, \lambda_0)$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0. Ясно, что $N(L, \lambda_0) = N(L(\lambda_0))$. Максимальный порядок тех корневых полиномов $u(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0, для которых $u(\lambda_0) = u^0$, называется кратностью $\nu(u^0)$ собственного элемента u^0. Далее покажем, что в нашем случае

$$\sup_{u^0 \in N(L,\lambda_0),\, u^0 \neq 0} \nu(u^0) = \eta(L, \lambda_0) < \infty.$$

Поэтому конечномерное подпространство $N(L, \lambda_0)$ разлагается [7] в прямую сумму

$$N(L, \lambda_0) = N_1 \dot{+} N_2 \dot{+} \cdots \dot{+} N_l \tag{1.3}$$

подпространств, состоящих из собственных векторов одинаковой кратности ν_k так, что $\nu_1 = \eta(L, \lambda_0) > \nu_2 > \cdots > \nu_l$.

Лемма 1.1 ([8]). *Пусть $\{e^1, \ldots, e^m\}$ — базис в $N(L, \lambda_0)$, составленный из базисов подпространств $N_1, \ldots, N_l$ разложения (1.3), а $e^i(\lambda)$ — корневые полиномы оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0 такие, что $e^i(\lambda_0) = e^i$, $\nu(e^i(\lambda)) = \nu(e^i)$, $i = 1, \ldots, m$. Если элементы y^i определены из соотношения*

$$y^i = [L(\lambda)e^i(\lambda)]^{(\nu(e^i))}_{\lambda=\lambda_0}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то они линейно независимы и $L(\lambda_0)V \cap L(y^1, \ldots, y^m) = \{0\}$, т. е. $V = L(\lambda_0)V \dot{+} L(y^1, \ldots, y^m)$.

Поскольку $\lambda = 0$ – регулярное значение пучка (1.2), то его спектр описывает

Теорема 1.2 ([5], с. 68). *Пусть*

$$L(\lambda) = I + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k T_k,$$

где T_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — вполне непрерывные операторы в V. Если у пучка $L(\lambda)$ есть хотя бы одно регулярное значение, то его спектр состоит из собственных чисел конечной кратности с единственно возможной предельной точкой на бесконечности. Каждое из этих собственных чисел является полюсом оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$, причем все коэффициенты в главной части соответствующего ряда Лорана конечномерны.

Замечание 1.1. Поскольку операторы T_1 и T_2 самосопряжены в V, то спектр пучка (1.2) симметричен относительно вещественной оси.

2. Дискретная задача

Дискретную задачу будем строить, используя схему Германа–Джонсона смешанного метода конечных элементов [4]. Пусть T_h — регулярная триангуляция области $\overline{\Omega}$ конечным числом треугольников K (K — замкнутое множество) с максимальным диаметром h. Пусть на каждом $K \in T_h$ задана функция $\rho = (\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{12})^T, \rho_{ij} \in H^1(K)$, $1 \leq i, j \leq 2$, $\rho_{12} = \rho_{21}$. Положим

$$M_n(\rho) = D_M[(1-\nu)(\rho_{11}n_1n_1 + 2\rho_{12}n_1n_2 + \rho_{22}n_2n_2) + \nu(\rho_{11} + \rho_{22})],$$
$$M_{nt}(\rho) = D_M[(1-\nu)(\rho_{11}n_1t_1 + \rho_{12}(n_1t_2 + n_2t_1) + \rho_{22}n_2t_2)],$$

где $n = (n_1, n_2)$ и $t = (t_1, t_2)$ — векторы внешней нормали и касательной к сторонам треугольника K. Обозначим через $T^0 = K_1^0 \cup K_2^0$ объединение внутренностей любых треугольников K_1 и K_2 из T_h, которые имеют общую сторону. Определим вещественные пространства

$$\widetilde{W} = W_0^{1,p}(\Omega), \quad p > 2, \quad \widetilde{V} = [H_0^1(\Omega)]^2 \times \widetilde{W},$$
$$\widetilde{M} = \{\rho \in M,\ M_n(\rho)|_{T^0} \in H^1(T^0)\ \forall T^0\},$$

где n — нормаль к общей стороне треугольников K_1 и K_2, внутренности которых составляют множество T^0. На $\widetilde{M} \times \widetilde{W}$ введем непрерывную билинейную форму

$$\widetilde{b}(\rho, w) = \sum_{K \in T_h} \Big\{ -\int_K D_M[\partial_1\rho_{11}\partial_1 w + \partial_2\rho_{11}\partial_2 w + \partial_1\rho_{22}\partial_1 w + \partial_2\rho_{22}\partial_2 w -$$
$$- (1-\nu)(\partial_2\rho_{11}\partial_2 w + \partial_1\rho_{22}\partial_1 w - \partial_1\rho_{12}\partial_2 w - \partial_2\rho_{12}\partial_1 w)]dx + \int_{\partial K} M_{nt}(\rho)\partial_t w ds\Big\}.$$

Поскольку Ω — выпуклый многоугольник, то по теореме 3 [4] из (1.1) следует, что задача (EP) равносильна следующей вариационной задаче: найти такие $(\lambda, (m, u)) \in C \times \widetilde{M} \times \widetilde{W}$, $(m, u) \neq 0$, что

$$\begin{aligned} a(m, \rho) - \widetilde{b}(\rho, u_3) &= 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \\ \widetilde{b}(m, v_3) + c(u, v) &= \lambda d_1(u, v) + \lambda^2 d_2(u, v) \quad \forall v \in \widetilde{V}. \end{aligned} \qquad (\widetilde{EP})$$

Определим теперь дискретные пространства

$$M_h = \{\rho_h \in \widetilde{M},\ \forall K \in T_h\ \rho_{ijh}|_K \in P_0,\ 1 \le i, j \le 2,\ \rho_{12h} = \rho_{21h}\},$$
$$W_h = X_{h,0}^{(1)}, \quad V_h = [X_{h,0}^{(1)}]^3.$$

Можно определить оператор интерполяции $\Pi_h : \widetilde{M} \to M_h$, для которого

$$\widetilde{b}(\Pi_h\rho - \rho, w_h) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \quad \forall w_h \in W_h, \qquad (2.1)$$

и существует константа $c > 0$, не зависящая от h, такая,что

$$|\Pi_h\rho - \rho|_0 \le ch\|\rho\|_1 \quad \forall \rho \in \widetilde{M} \cap [H^1(\Omega)]^3. \qquad (2.2)$$

Из теоремы 3.1.6 ([9], с. 128) следует существование такого оператора $\Sigma_h : \widetilde{V} \to V_h$, что

$$\|\Sigma_h u - u\|_1 \le c_1 h |u|_2 \qquad \forall u \in \widetilde{V} \cap [H^2(\Omega)]^3, \qquad (2.3)$$
$$\|(\Sigma_h u)_3 - u_3\|_{1,p,\Omega} \le c_2 h |u_3|_{2,q,\Omega} \quad \forall u_3 \in \widetilde{W} \cap W^{2,q}(\Omega), \qquad (2.4)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — константы, не зависящие от h.

Рассмотрим теперь дискретную задачу: найти такие $(\lambda, (m_h, u_h)) \in C \times M_h \times W_h$, $(m_h, u_h) \neq 0$, что

$$\begin{aligned} a(m_h, \rho_h) - \widetilde{b}(\rho_h, u_{3h}) &= 0 \quad \forall \rho_h \in M_h, \\ \widetilde{b}(m_h, v_{3h}) + c(u_h, v_h) &= \lambda d_1(u_h, v_h) + \lambda^2 d_2(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \qquad (\widetilde{EP_h})$$

Вследствие M-эллиптичности билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ для любого $w_h \in W_h$ существует единственное $m_{w_h} \in M_h$ такое, что $a(m_{w_h}, \rho_h) = \widetilde{b}(\rho_h, u_{3h})$ $\forall \rho_h \in M_h$. Введем симметричную билинейную форму $A_h(u_h, v_h) = a(m_{u_{3h}}, m_{v_{3h}}) + c(u_h, v_h) = \widetilde{b}(m_{v_{3h}}, u_{3h}) + c(u_h, v_h)$. Теперь задачу $(\widetilde{EP_h})$ можно представить в виде: найти такие $(\lambda, u_h) \in C \times V_h, u_h \neq 0$, что

$$A_h(u_h, v_h) = \lambda d_1(u_h, v_h) + \lambda^2 d_2(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \qquad (EP_h)$$

Задача: для любого $f \in H$ найти такое $u_h \in V_h$, что

$$A_h(u_h, v_h) = d_1(f, v_h) = (D_1 f, v_h)_H \quad \forall v_h \in V_h,$$

определяет оператор $T_{1h} : H \to V_h$, если положить $u_h = T_{1h} f$. Аналогично можно определить оператор $T_{2h} : H \to V_h$.

Наконец, несложно заметить, что задача (EP_h) сводится к спектральному анализу в пространстве V_h квадратичного операторного пучка

$$L_h(\lambda) = I_h - \lambda T_{1h} - \lambda^2 T_{2h}. \tag{2.5}$$

3. Сходимость собственных значений и собственных векторов дискретной задачи

Получим несколько вспомогательных результатов. Из теоремы 2 ([10], с. 156) следует существование такого оператора $R_h : H \to V_h$, что

$$\lim_{h \to 0} \|u - R_h u\|_1 = 0. \tag{3.1}$$

Пусть $\Lambda_0 \subset \Lambda$ — компакт.

Лемма 3.1. *Для любого $f \in V$ и для любого $\lambda \in \Lambda_0$*

$$\lim_{h \to 0} \|L(\lambda) f - L_h(\lambda) R_h f\|_1 = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. По теореме 9 [4] из (1.1) следует, что

$$\lim_{h \to 0} \|T_1 f - T_{1h} f\|_1 = 0, \quad \lim_{h \to 0} \|T_2 f - T_{2h} f\|_1 = 0. \tag{3.3}$$

По лемме 2.1 [1]

$$\alpha \|u_h\|_1^2 \le A(u_h, u_h) = d_1(f, u_h) \le \|d_1\| \, \|f\|_1 \|u_h\|_1,$$

где $\alpha > 0$ — константа, не зависящая от h.

Значит,

$$\|T_{1h}\|_{1,1} = \sup_{f \in H,\ f \ne 0} \frac{\|T_{1h}\|_1}{\|f\|_1} \le \frac{\|d_1\|}{\alpha}. \tag{3.4}$$

Аналогично

$$\|T_{2h}\|_{1,1} \le \frac{\|d_2\|}{\alpha}. \tag{3.5}$$

Далее

$$\|T_1 f - T_{1h} f\|_1 \le \|f - R_h f\|_1 + |\lambda| \{ \|T_1 f - T_{1h} f\|_1 + \|T_{1h}\|_{1,1} \|f - R_h f\|_1 \} + \\ + |\lambda^2| \{ \|T_2 f - T_{2h} f\|_1 + \|T_{2h}\|_{1,1} \|f - R_h f\|_1 \}. \tag{3.6}$$

Теперь (3.2) следует из (3.1), (3.3)–(3.6).

Лемма 3.2. *Для любого компакта $\Lambda_0 \subset \rho(L)$ можно указать такое $h(\Lambda_0)$, что $\forall h \le h(\Lambda_0)$ и $\forall \lambda \in \Lambda_0$ существует $L_h^{-1}(\lambda) \in L(V_h)$ и $\|L_h^{-1}(\lambda)\|_{1,1} \le \gamma(\Lambda_0)$, где $\gamma(\Lambda_0) > 0$ — константа, не зависящая от h.*

Доказательство. Лемма будет доказана, если докажем неравенство

$$\|u_h\|_1 \le \gamma(\Lambda_0)\|L_h(\lambda)u_h\|_1 \quad \forall h \le h(\Lambda_0).$$

Пусть это не так. Тогда можно указать такую последовательность $\{u_h\}$, что $\|u_h\|_1 = 1$ и

$$\lim_{h\to 0}\|u_h - \lambda T_{1h}u_h - \lambda^2 T_{2h}u_h\|_1 = 0.$$

Положим

$$g_h = u_h - \lambda T_{1h}u_h - \lambda^2 T_{2h}u_h.$$

Перепишем это равенство в вариационном виде

$$a(m_{u_{3h}-g_{3h}}, m_{v_{3h}}) + c(u_h - g_h, v_h) = \lambda d_1(u_h, v_h) + \lambda^2 d_2(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.7}$$

Положив в (3.7) $v_h = u_h - g_h$, замечаем, что последовательность $\{u_h - g_h\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 [1] о дискретной компактности. Значит, из нее можно извлечь такую подпоследовательность, сохраняя обозначения, что $u_h - g_h \to \overline{u}$ слабо в H, $u_{3h} - g_{3h} \to \overline{u}_3$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, $m_{u_{3h}-g_{3h}} \to \nabla_2\overline{u}_3$ слабо в M, где $\overline{u} \in V$. По лемме 3.1 [1] для любого $v \in \overline{V} = [H_0^1(\Omega)]^2 \times (H_0^2(\Omega) \cap (H^3(\Omega))$ существует такая последовательность $\{v_h\}$ $(v_h \in V_h)$, что $v_h \to v$ сильно в H, $m_{v_{3h}} \to \nabla_2 v_3$ сильно в M. Переходя к пределу при $h \to 0$ в равенстве (3.7) и учитывая, что $\overline{V}$ плотно в V, имеем

$$a(\nabla_2\overline{u}_3, \nabla_2 v_3) + c(\overline{u}, v) = \lambda d_1(\overline{u}, v) + \lambda^2 d_2(\overline{u}, v) \quad \forall v \in V.$$

Но $\lambda \in \rho(L)$, значит, $\overline{u} \equiv 0$. Далее

$$\lim_{h\to 0}\{a(m_{u_{3h}-g_{3h}}, m_{u_{3h}-g_{3h}}) + c(u_h - g_h, u_h - g_h)\} = \lim_{h\to 0}\{\lambda d_1(u_h, u_h - g_h) + \lambda^2 d_2(u_h, u_h - g_h)\} = 0.$$

Отсюда легко получить (см. § 3 [1]), что при $h \to 0$ $u_h - g_h \to 0$ сильно в H, $m_{u_{3h}-g_{3h}} \to 0$ сильно в M. Значит, и $u_h \to 0$ сильно в H при $h \to 0$. А это противоречит тому, что $\|u_h\|_1 = 1$ для любого h.

Теорема 3.1. (I) *Пусть* $\lambda_h \in \sigma(L_h)$ *и* $\lambda_h \to \lambda_0 \in \Lambda$ *при* $h \to 0$. *Тогда* $\lambda_0 \in \sigma(L)$.

(II) *Пусть* $\lambda_0 \in \sigma(L)$. *Тогда существует такая последовательность* $\{\lambda_h\}$, *что* $\lambda_h \in \sigma(L_h)$ *и* $\lambda_h \to \lambda_0$ *при* $h \to 0$.

Доказательство. (I) Если $\lambda_0 \in \rho(L)$, то по лемме 3.2 для любой замкнутой окрестности $\Lambda_0 \subset \rho(L)$ точки λ_0 при всех достаточно малых h $\Lambda_0 \subset \rho(L_h)$.

(II) Пусть $\lambda_0 \in \sigma(L)$. Тогда по теореме 1.1 существует $u^0 \neq 0$, что $L(\lambda_0)u^0 = 0$. По лемме 3.1

$$\lim_{h\to 0}\|L_h(\lambda_0)R_h u^0\|_1 = \lim_{h\to 0}\|L_h(\lambda_0)R_h u^0 - L(\lambda_0)u^0\|_1 = 0. \tag{3.8}$$

Допустим теперь от противного, что для λ_0 найдется такой круг $\Lambda_0 \subset \Lambda$ с границей Γ, что $\Lambda_0 \subset \rho(L_h)$ для всех h. Ввиду изолированности λ_0 можно без ограничения общности считать, что $\Gamma \subset \rho(L)$. Тогда

$$\|L_h^{-1}(\lambda)\|_{1,1} \le \gamma(\Gamma) \quad \forall h \le h(\Gamma), \quad \lambda \in \Gamma.$$

Поскольку оператор-функция $L_h^{-1}(\lambda)$ голоморфна на Γ, последнее неравенство распространяется (по принципу максимума модуля) на весь круг Λ_0. Используя (3.8), находим, что

$$\lim_{h\to 0}\|R_h u^0\|_1 = \lim_{h\to 0}\|L_h^{-1}(\lambda_0)L_h(\lambda_0)R_h u^0\|_1 = 0.$$

Но тогда по (3.1) $u^0 \equiv 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\lambda_h \in \sigma(L_h)$, $u_h \in N(L_h, \lambda_h)$, $\|u_h\|_1 = 1$ *и* $\lambda_h \to \lambda_0 \in \sigma(L)$ *при* $h \to 0$. *Тогда существует такая подпоследовательность последовательности* $\{u_h\}$, *что* $u_h \to u^0$ *сильно в* H, $m_{u_{3h}} \to \nabla_2 u_3^0$ *сильно в* M *и* $u^0 \in N(L, \lambda_0)$.

Доказательство. Из равенства

$$A_h(u_h, u_h) = \lambda_h d_1(u_h, u_h) + {\lambda_h}^2 d_2(u_h, u_h)$$

следует, что последовательность $\{u_h\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 [1] о дискретной компактности. Значит, из нее можно извлечь такую подпоследовательность, сохраняя обозначения, что $u_h \to u^0$ слабо в H, $u_{3h} \to u_3^0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, $m_{u_{3h}} \to \nabla_2 u_3^0$ слабо в M, где $u^0 \in V$. Как и в доказательстве леммы 3.2, можно показать, что $u_h \to u^0$ сильно в H, $m_{u_{3h}} \to \nabla_2 u_3^0$ сильно в M, а также

$$a(\nabla_2 u_3^0, \nabla_2 v_3) + c(u^0, v) = \lambda_0 d_1(u^0, v) + {\lambda_0}^2 d_2(u_0, v) \quad \forall v \in V.$$

И поскольку $\|u_h\|_1 = 1$ для любого h, то $u^0 \neq 0$. Значит, $u^0 \in N(L, \lambda_0)$.

4. Оценки скорости сходимости собственных значений и собственных векторов дискретной задачи

Теорема 4.1. *Пусть $\lambda_h \in \sigma(L_h)$ и $\lambda_h \to \lambda_0 \in \sigma(L)$ при $h \to 0$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от h, что выполняется оценка*

$$|\lambda_h - \lambda_0|^{\eta(L,\lambda_0)} \le ch \max_{e \in J(L,\lambda_0),\ \|e\|_1 = 1} (|e|_2 + |e_3|_{3,\Omega}), \tag{4.1}$$

где $|e|_2^2 = |e_1|_{2,\Omega}^2 + |e_2|_{2,\Omega}^2 + |e_3|_{2,\Omega}^2$.

Доказательство. Пусть $\{e^1, \dots, e^m\}$ — некоторый базис в $N(L, \lambda_0)$, составленный из базисов подпространств $N_1, \dots, N_l$ разложения (1.3), а $e^i(\lambda)$ — корневые полиномы оператор-функции $L(\lambda)$ в точке λ_0 такие, что $e^i(\lambda_0) = e^i$, $\nu(e^i(\lambda)) = \nu(e^i)$, $i = 1, \dots, m$. По определению корневого полинома порядка $\nu(e^i)$ имеем

$$[L(\lambda)e^i(\lambda)]^{(k)}_{\lambda=\lambda_0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \nu(e^i) - 1, \quad [L(\lambda)e^i(\lambda)]^{(\nu(e^i))}_{\lambda=\lambda_0} \equiv y^i \neq 0.$$

Значит,

$$L(\lambda)e^i(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[y^i + z^i(\lambda)],$$

где

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} z^i(\lambda) = 0.$$

Положив $a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u, v) = A(u, v)$, запишем последнее равенство в вариационном виде

$$A(e^i(\lambda) - \frac{(\lambda - \lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[y^i + z^i(\lambda)], v) = \lambda d_1(e^i(\lambda), v) + \lambda^2 d_2(e^i(\lambda), v) \quad \forall v \in V.$$

А теперь — то же самое в смешанной вариационной формулировке

$$a(m_e, \rho) - \widetilde{b}(\rho, (e^i(\lambda))_3) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \tag{4.2а}$$

$$a(m_y, \rho) - \widetilde{b}(\rho, y_3^i) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \tag{4.2б}$$

$$a(m_z, \rho) - \widetilde{b}(\rho, z_3^i) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \tag{4.2в}$$

$$\widetilde{b}(m_e, v_3) + c(e^i(\lambda), v) - \frac{(\lambda - \lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y + m_z, v_3) + c(y^i + z^i, v)] =$$
$$= \lambda d_1(e^i(\lambda), v) + \lambda^2 d_2(e^i(\lambda), v) \quad \forall v \in \widetilde{V}. \tag{4.2г}$$

Полагая $\lambda = \lambda_h$, из равенств (4.2) получим

$$a(m_e, \rho) - \widetilde{b}(\rho, (e^i(\lambda_h))_3) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \tag{4.3а}$$

$$a(m_y, \rho) - \widetilde{b}(\rho, y_3^i) = 0 \quad \forall \rho \in \widetilde{M}, \tag{4.3б}$$

$$\widetilde{b}(m_e,v_3)+c(e^i(\lambda_h),v)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y,v_3)+c(y^i,v)]=$$
$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h),v)+{\lambda_h}^2 d_2(e^i(\lambda_h),v)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)})\quad \forall v\in\widetilde{V}. \quad (4.3в)$$

По теореме 3.2 можно выбрать такую последовательность $\{u_h\}$,что $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, $\|u_h\|_1=1$ и при $h\to 0$ $u_h\to u^0$ сильно в H, $m_{u_{3h}}\to\nabla_2 u_3^0$ сильно в M и $u^0\in N(L,\lambda_0)$. Так как $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, то

$$a(m_{u_{3h}},\rho_h)-\widetilde{b}(\rho_h,u_{3h})=0\quad\forall\rho_h\in M_h, \quad (4.4а)$$
$$\widetilde{b}(m_{u_{3h}},v_{3h})+c(u_h,v_h)=\lambda d_1(u_h,v_h)+\lambda^2 d_2(u_h,v_h)\quad\forall v_h\in V_h. \quad (4.4б)$$

Положив в (4.3в) $v=u_h$, а в (4.4б) $v_h=\Sigma_h e^i(\lambda_h)$, вычтем (4.4б) из (4.3в). Учитывая симметричность билинейных форм $c(\cdot,\cdot)$, $d_1(\cdot,\cdot)$, $d_2(\cdot,\cdot)$, получим

$$\widetilde{b}(m_y,u_{3h})-\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]=$$
$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+{\lambda_h}^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}). \quad (4.5)$$

Используя свойство (2.1) интерполянта Π_h и равенства (4.3а), (4.4а), при $\rho=m_{u_{3h}},\rho_h=\Pi_h m_e$ соответственно получим

$$\widetilde{b}(m_y,u_{3h})-\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)=a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(e^i(\lambda_h))_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5), окончательно имеем

$$a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(e^i(\lambda_h))_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+$$
$$+c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]=$$
$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+{\lambda_h}^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}). \quad (4.7)$$

Покажем теперь, что для любого $h<h_0$ (h_0 — достаточно малое положительное число) существует такое i, что

$$|\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})|\geq c_0=\mathrm{const}>0. \quad (4.8)$$

Предположим, что (4.8) не выполняется. Тогда $\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})\to 0$ при $h\to 0$, $i=1,\dots,m$. С другой стороны,

$$\lim_{h\to 0}\{\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})\}=\lim_{h\to 0}\{\widetilde{b}(\Pi_h m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})\}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\{a(m_{u_{3h}},\Pi_h m_y)+c(y^i,u_{3h})\}=a(\nabla_2 u^0,m_y)+c(y^i,u^0),\quad i=1,\dots,m.$$

Выбирая в равенстве (4.3б) различные $\rho\in[H_0^1(\Omega)]^3$, легко показать,что $m_y=\nabla_2 y^i$. Значит,

$$a(\nabla_2 u^0,\nabla_2 y^i)+c(y^i,u^0)=0,\quad i=1,\dots,m.$$

Получили противоречие, ибо по лемме 1.1 отсюда следует, что $u^0\notin N(L,\lambda_0)$.

Используя предположение (1.1), можно показать,что

$$J(L,\lambda_0)\subset[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]^2\times(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)).$$

Теперь из (2.2)–(2.4) и теоремы 9 [4] для любого λ_h из достаточно малой окрестности λ_0 получаем оценки

$$\|\Sigma_h e^i(\lambda_h) - e^i(\lambda_h)\|_1 \le c_1 h \sum_{j=0}^{k_i-1} |u_i^j|_2, \tag{4.9}$$

$$|\Pi_h m_e - m_e|_0 \le c_2 h \sum_{j=0}^{k_i-1} (|u_i^j|_2 + |u_{i3}^j|_{3,\Omega}), \tag{4.10}$$

$$\|(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3 - (e^i(\lambda_h))_3\|_{1,p,\Omega} \le c_3 h \sum_{j=0}^{k_i-1} |u_{i3}^j|_{2,q,\Omega}, \tag{4.11}$$

где u_j^i $(j = 0, 1, \ldots, k_i - 1)$ — корневые элементы корневого полинома $e^i(\lambda)$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ — константы, не зависящие от h. Наконец, из (4.7), используя (4.8)–(4.11), получаем оценку

$$|\lambda_h - \lambda_0|^{\nu(e^i)} \le ch \sum_{j=0}^{k_i-1} (|u_i^j|_2 + |u_{i3}^j|_{3,\Omega}). \tag{4.12}$$

Здесь мы учли, что $H^3(\Omega)$ компактно вложено ([9], с. 118) в $W^{2,q}(\Omega)$ при $q \in [1, \infty)$. Теперь (4.1) следует из (4.12).

Теорема 4.2. *Пусть* $\lambda_h \in \sigma(L_h)$, $u_h \in N(L_h, \lambda_h)$, $\|u_h\|_1 = 1$ *и* $\lambda_h \to \lambda_0 \in \sigma(L)$ *при* $h \to 0$, $\{u^1, \ldots, u^m\}$ — *некоторый базис в* $N(L, \lambda_0)$. *Тогда*

$$\rho_h = \rho(u_h, L(\Sigma_h u^1, \ldots, \Sigma_h u^m)) \le c(|\lambda_h - \lambda_0| + \sum_{i=1}^{m} \|\Sigma_h u^i - u^i\|_1), \tag{4.13}$$

где $c > 0$ — *константа, не зависящая от* h.

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства леммы 8 [8]. Пусть $u_h^0 \in L(\Sigma_h u^1, \ldots, \Sigma_h u^m)$ такое, что $\rho_h = \|u_h^0 - u_h\|_1$. Очевидно, что $\rho_h \to 0$ при $h \to 0$. Значит, последовательность $\{u_h^0\}$ ограничена в H. Покажем, что

$$\rho_h = \|u_h^0 - u_h\|_1 \le \alpha \|L_h(\lambda_h)(u_h^0 - u_h)\|_1 \quad \forall h \le h_0, \tag{4.14}$$

где α — константа, h_0 — любое достаточно малое число. Допустим, что (4.14) не выполняется, т. е. если

$$\rho_h \ne 0 \quad \text{и} \quad g_h = \frac{u_h^0 - u_h}{\|u_h^0 - u_h\|_1}, \quad \text{то} \quad \lim_{h \to 0} L_h(\lambda_h) g_h = 0.$$

Тогда, следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве леммы 3.2, можно показать, что из последовательности $\{g_h\}$ можно извлечь такую подпоследовательность, сохраняя обозначения, что $g_h \to g_0 \in N(L, \lambda_0)$ при $h \to 0$. Пусть

$$g_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^i.$$

Тогда

$$\rho_h \le \|u_h^0 - u_h - \|u_h^0 - u_h\|_1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Sigma_h u^i\|_1 =$$
$$= \|u_h^0 - u_h\|_1 \|\frac{u_h^0 - u_h}{\|u_h^0 - u_h\|_1} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Sigma_h u^i\|_1 = \rho_h O(1) = o(\rho_h).$$

Полученное противоречие доказывает (4.14).

Пусть $u_h^0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_h^i \Sigma_h u^i$. Тогда

$$\|L_h(\lambda_0)u_h^0\|_1 \le \sum_{i=1}^{m} |\beta_h^i| \, \|L_h(\lambda_0)\Sigma_h u^i - L(\lambda_0)u^i\|_1. \qquad (4.15)$$

Аналогично доказательству леммы 3.1 можно показать,что

$$\|L_h(\lambda_0)\Sigma_h u^i - L(\lambda_0)u^i\|_1 \le c\|\Sigma_h u^i - u^i\|_1, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (4.16)$$

где $c > 0$ – константа, не зависящая от h. Далее

$$\rho_h \le \alpha\|L_h(\lambda_h)(u_h^0 - u_h)\|_1 \le \|L_h(\lambda_h)u_h^0 - L_h(\lambda_0)u_h^0\|_1 + \|L_h(\lambda_0)u_h^0\|_1 \le$$
$$\le c|\lambda_h - \lambda_0| + \|L_h(\lambda_0)u_h^0\|_1. \quad (4.17)$$

Теперь оценка (4.13) следует из (4.15)–(4.17).

Замечание 4.1. Поскольку $u^i \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^2 \times (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))$, то $\|\Sigma_h u^i - u^i\|_1 \le ch|u^i|_2$, $i = 1, \dots, m$, где $c > 0$ — константа, не зависящая от h.

Литература

1. Масловская Л.В., Вербицкий В.В. *Сходимость смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 21–31.
2. Stumpf H. *The stability equations of the consistent nonlinear elastic shell theory with moderate rotation* // IUTAM – Symp. Stability in the Mechanics of Continua. Nümbrecht / Germany 1981. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982. – P. 89–100.
3. Stumpf H. *Unified operator description, nonlinear buckling and postbuckling analysis of thin elastic shells* // Mitt. Inst. Mech. – Ruhr-Univ. Bochum. – 1982. – № 34. – P. 46.
4. Филиппович А.П. *Анализ смешанных схем метода конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 5. – С. 741–754.
5. Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных пучков.* – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
6. Трофимов В.П. *О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра* // Матем. исследования. – Кишинев, 1968. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 117–125.
7. Крейн С.Г., Трофимов В.П. *О нётеровых операторах, голоморфно зависящих от параметров* // Тр. семин. по функц. анализу. – Воронеж, 1970. – С. 63–85.
8. Вайникко Г.М., Карма О.О. *О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1974. – Т. 14. – № 6. – С. 1393–1408.
9. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
10. Оганесян А.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.* Ч. I // Дифференц. уравнения и их применения. – Вильнюс, 1973. – Вып. 5. – 394 с.

Одесский государственный университет

Поступила 24.09.1996