ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 519.6

И.Б. БАДРИЕВ, А.Д. ЛЯШКО, О.В. ПАНКРАТОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе построен итерационный процесс типа Удзавы для решения стационарных нелинейных задач теории фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону фильтрации с предельным градиентом сдвига. Математически задача фильтрации формулируется в виде задачи об отыскании минимума выпуклого функционала (относительно давления) и двойственной к ней задачи (относительно поля скоростей фильтрации). Разрешимость этих задач исследовалась в [1]–[3]. Обе рассматриваемые задачи могут быть сведены к задаче поиска седловой точки модифицированной функции Лагранжа (см. [4]). Седловую точку модифицированной функции Лагранжа предлагается находить при помощи алгоритма типа Удзавы. В [2] доказана сходимость алгоритма типа Удзавы для аналогичных задач в случае сильно выпуклого функционала, полученного из исходного путем регуляризации — замены разрывного закона фильтрации близким непрерывным. В [5] проводилось исследование сходимости аналогичных итерационных методов для задач фильтрации с разрывным законом, но фактически без предельного градиента. Данная статья является продолжением исследований, проведенных в указанных работах. Доказана слабая сходимость итерационных приближений к решениям исходной и двойственных задач, сильная сходимость невязок.

Закон фильтрации будем записывать в виде

$$v(u) = -g(|\nabla u|^2)\nabla u, \tag{1}$$

где v — скорость фильтрации, u — давление, $\xi \to g(\xi^2)\xi$ — функция, определяющая закон фильтрации, относительно которой предполагаем выполненными следующие условия:

$$g(\xi^2)\xi = g_0(\xi^2)\xi + g_1(\xi^2)\xi, \tag{2}$$

$$g_0(\xi^2)\xi = 0 \text{ при } \xi \le \beta, \tag{3}$$

$$\text{функция } \xi \to g_0(\xi^2)\xi \text{ абсолютно непрерывна}, \tag{4}$$

существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что при $\xi \ge \beta$

$$c_1(\xi - \beta) \le g_0(\xi^2)\xi \le c_2(\xi - \beta), \tag{5}$$

существует $c_3 > 0$ такая, что

$$0 \le (g_0(\xi^2)\xi)'_\xi \le c_3 \text{ при } \xi \ge \beta, \tag{6}$$

$$g_1(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0, & \xi \le \beta; \\ \vartheta, & \xi > \beta. \end{cases} \tag{7}$$

Сформулированные условия (2)–(7) означают, что модуль скорости фильтрации — неубывающая функция $|\nabla u|$, имеющая на бесконечности линейный рост. Отметим, что в случае, когда $\beta > 0$, закон фильтрации (1) — закон с предельным градиентом, т.к. $v(x) = 0$ при $|\nabla u(x)| \le \beta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00260).

Если $\vartheta = 0$, то функция $\xi \to g(\xi^2)\xi$ непрерывна, в противном случае (т. е. при $\vartheta > 0$) эта функция имеет разрыв первого рода.

Пусть Ω — область в R^m, $m \geq 1$, с границей Γ. Под решением стационарной задачи фильтрации понимается функция $u \in V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ такая, что (см. [1], [2])

$$F(u) = \inf_{\eta \in V} F(\eta), \tag{8}$$

где $F : V \to R^1$,

$$F(\eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta),$$

$$F_0(\eta) = \int_\Omega \int_0^{|\nabla\eta|} g_0(\xi^2)\xi \, d\xi \, dx - \langle f, \eta \rangle, \qquad F_1(\eta) = \int_\Omega \int_0^{|\nabla\eta|} g_1(\xi^2)\xi \, d\xi \, dx,$$

$f \in V^* = W_2^{(-1)}(\Omega)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между V и V^*.

Наряду с (8) рассмотрим двойственную ([6]) по отношению к ней задачу. С этой целью введем следующие обозначения: $Y = L_{2,m}(\Omega) = (L_2(\Omega))^m$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ — скалярное произведение в Y,

$$M = \{w \in Y : \langle w, \nabla\eta \rangle_Y + \langle f, \eta \rangle = 0 \;\; \forall \eta \in V\},$$

$$J : Y \to R^1, \quad J(w) = \int_\Omega \int_0^{|w|} \varphi(\xi^2)\xi \, d\xi \, dx.$$

Здесь функция $\xi \to \varphi(\xi^2)\xi$ определяется следующим образом:

$$\varphi(\xi^2)\xi = \varphi_0(\xi^2)\xi + \varphi_1(\xi^2)\xi, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\text{функция } \xi \to \varphi_0((\xi+\vartheta)^2)(\xi+\vartheta) \text{ обратна} \\ \text{к функции } \xi \to g_0((\xi+\beta)^2)(\xi+\beta) \text{ при } \xi \geq 0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\varphi_1(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0, & \xi = 0; \\ \beta, & \xi > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что функция $\xi \to \varphi_0(\xi^2)\xi$, определенная соотношением (10), удовлетворяет условиям

$$\xi \to \varphi_0(\xi^2)\xi \text{ абсолютно непрерывна}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{c_2}(\xi - \vartheta) \leq \varphi_0(\xi^2) \leq \frac{1}{c_1}(\xi - \vartheta) \text{ при } \xi \geq \vartheta, \tag{13}$$

$$0 \leq (\varphi_0(\xi^2)\xi)'_\xi \leq \frac{1}{c_3} \text{ при } \xi \geq 0. \tag{14}$$

Двойственная по отношению к (8) задача состоит в нахождении вектора $v \in M$ такого, что (см. [2])

$$J(v) = \inf_{w \in M} J(w). \tag{15}$$

Известно (см. [1]–[3]), что при выполнении условий (2)–(7), (9)–(14) задачи (8), (15) имеют непустые выпуклые замкнутые ограниченные множества решений, и если u — решение задачи (8), v — решение задачи (15), то существует функция θ_u, удовлетворяющая условиям

$$\theta_u(x) \in L_2(\Omega), \quad 0 \leq \theta_u(x) \leq \vartheta, \quad \theta_u(x) = \begin{cases} 0, & |\nabla u(x)| < \beta; \\ \vartheta, & |\nabla u(x)| > \beta, \end{cases}$$

такая, что

$$v = -g_\theta(|\nabla u|^2)\nabla u = -\left\{ g_0(|\nabla u|^2) + \frac{\theta_u(x)}{|\nabla u|} \right\} \nabla u.$$

Определим теперь на множестве $Y \times V$ функционал Лагранжа L по формуле (см. [2])

$$L(w, \eta) = J(w) + \langle w, \nabla\eta\rangle_Y + \langle f, \eta\rangle.$$

Кроме того, также на множестве $Y \times V$ рассмотрим модифицированный лагранжиан (см. [4])

$$L_r(w, \eta) = L(w, \eta) + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w) - f\|^2_{V^*}, \quad r > 0.$$

Теорема 1. *Точка (v, u) является седловой точкой лагранжиана L на $Y \times V$ тогда и только тогда, когда (v, u) — седловая точка лагранжиана L_r при любом $r > 0$. Кроме того, если (u, v) — седловая точка лагранжиана L, то u и v являются решениями задач* (8) *и* (15) *соответственно.*

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [5].

Для нахождения седловой точки модифицированного лагранжиана L_r будем применять следующий итерационный процесс.

Пусть $u^0 \in V$ — произвольный заданный элемент.

Построим последовательность (v^n, u^n), $n = 0, 1, 2, \dots,$ следующим образом.

При известном u^n определяем v^n как решение задачи

$$L_r(v^n, u^n) = \inf_{w \in Y} L_r(w, u^n)$$

или

$$J(v^n) + \langle v^n, \nabla u^n\rangle_Y + \langle f, u^n\rangle + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n) - f\|^2_{V^*} \le$$
$$\le J(w) + \langle w, \nabla u^n\rangle_Y + \langle f, u^n\rangle + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w) - f\|^2_{V^*} \quad \forall w \in Y. \quad (16)$$

Находим затем $u^{n+1} \in V$ из соотношения

$$\Big\langle \frac{\nabla(u^{n+1} - u^n)}{\rho}, \nabla\eta \Big\rangle_Y = \langle v^n, \nabla\eta\rangle_Y + \langle f, \eta\rangle \quad \forall \eta \in V \quad (17)$$

или

$$-\Delta(u^{n+1} - u^n) = \rho(-\operatorname{div}(v^n) + f), \quad u^{n+1}|_\Gamma = 0, \quad (18)$$

где ρ — итерационный параметр.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2)–(7), (9)–(14), $\rho \in (0, r)$, (v, u) *— седловая точка L_r на $Y \times V$. Тогда $\operatorname{div}(v^n) \to \operatorname{div}(v)$ сильно в V^* при $n \to \infty$ и существует подпоследовательность $\{v^{n_k}, u^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{v^n, u^n\}_{n=1}^\infty$, построенной по формулам* (16), (17), *сходящаяся слабо к (v, u) в $Y \times V$ при $k \to \infty$.*

Кроме того, для любого решения u задачи (8) *последовательность $\{\|u^n - u\|_V\}_{n=1}^\infty$ является сходящейся.*

Доказательство. Из (16) имеем

$$J(v^n) - J(w) + \langle v^n, \nabla u^n\rangle_Y - \langle w, \nabla u^n\rangle_Y + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n) - f\|^2_{V^*} - \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w) - f\|^2_{V^*} \le 0 \;\; \forall w \in Y. \quad (19)$$

Эта задача минимизации эквивалентна (см. [6]) следующему вариационному неравенству:

$$J(v^n) - J(w) + \langle v^n - w, \nabla u^n\rangle_Y + r\langle \operatorname{div}(v^n) + f, \operatorname{div}(v^n - w)\rangle_{V^*} \le 0 \quad \forall w \in Y, \quad (20)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*}$ — скалярное произведение в V^*. Поскольку (v, u) — седловая точка лагранжиана L_r, то

$$L_r(v, u) \le L_r(w, u) \quad \forall w \in Y$$

или

$$J(v) + \langle v, \nabla u\rangle_Y + \langle f, u\rangle + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v) - f\|_{V^*}^2 \leq$$
$$\leq J(w) + \langle w, \nabla u\rangle_Y + \langle f, u\rangle + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w) - f\|_{V^*}^2 \leq 0 \quad \forall w \in Y.$$

Эта задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству

$$J(v) - J(w) + \langle v - w, \nabla u\rangle_Y + r\langle \operatorname{div}(v) + f, \operatorname{div}(v - w)\rangle_{V^*} \leq 0 \quad \forall w \in Y. \tag{21}$$

Полагая в (20) $w = v$, а в (21) $w = v^n$, и складывая полученные неравенства, имеем

$$\langle v^n - v, \nabla(u^n - u)\rangle_Y + r\langle \operatorname{div}(v^n - v), \operatorname{div}(v^n - v)\rangle_{V^*} \leq 0. \tag{22}$$

Далее, из (18) с учетом того, что $\operatorname{div}(v) = f$, следует

$$R(u^{n+1} - u) = -R(u^n - u) + \rho \operatorname{div}(v - v^n), \tag{23}$$

где для удобства обозначено $R = -\Delta$. Применим к обеим частям равенства (23) оператор R^{-1}

$$u^{n+1} - u = u^n - u + \rho R^{-1}(\operatorname{div}(v - v^n)).$$

Обозначая через $\|\cdot\|_R$ энергетическую норму оператора R, имеем

$$\|u^{n+1} - u\|_R^2 = \|u^n - u + \rho R^{-1}(\operatorname{div}(v - v^n))\|_R^2 = \|u^n - u\|_R^2 + 2\rho\langle R(u^n - u), R^{-1}(\operatorname{div}(v^n - v))\rangle +$$
$$+ \rho^2\langle R^{-1}(\operatorname{div}(v^n - v)), \operatorname{div}(v^n - v)\rangle = \|u^n - u\|_R^2 + 2\rho\langle \operatorname{div}(v^n - v), u^n - u\rangle + \rho^2\|\operatorname{div}(v^n - v)\|_{R^{-1}}^2$$

или

$$\|u^{n+1} - u\|_V^2 = \|u^n - u\|_V^2 - 2\rho\langle v^n - v, \nabla(u^n - u)\rangle_Y + \rho^2\|\operatorname{div}(v^n - v)\|_{V^*}^2. \tag{24}$$

Из (24) с учетом неравенства (22) следует

$$\|u^n - u\|_V^2 - \|u^{n+1} - u\|_V^2 \geq \rho(2r - \rho)\|\operatorname{div}(v^n - v)\|_{V^*}^2.$$

Поскольку $0 < \rho < r$, то последовательность $\{\|u^n - u\|_V\}_{n=1}^\infty$ убывает, а т. к. она снизу ограничена нулем, то является сходящейся. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|\operatorname{div}(v^n - v)\|_{V^*} = 0.$$

Из сходимости последовательности $\{\|u^n - u\|_V\}_{n=1}^\infty$, очевидно, вытекает ограниченность последовательности $\{\|u^n\|_V\}_{n=1}^\infty$.

Докажем теперь ограниченность последовательности $\{v^n\}_{n=1}^\infty$. Для этого подставим в неравенство (16) $w = v$

$$J(v^n) \leq J(v) + \langle \operatorname{div}(v^n), u^n\rangle - \langle \operatorname{div}(v), u^n\rangle + \frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n) - f\|_{V^*}^2,$$

т. е. последовательность $\{J(v^n)\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Но функционал J коэрцитивен (см. [2]), следовательно, ограниченной является и последовательность $\{v^n\}_{n=1}^\infty$. В силу ограниченности последовательностей $\{v^n\}_{n=1}^\infty$, $\{u^n\}_{n=1}^\infty$ существуют подпоследовательности $\{v^{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $\{u^{n_k}\}_{k=1}^\infty$, которые сходятся слабо к некоторым элементам v^* и u^* при $n \to \infty$ соответственно в Y и V.

Докажем, что (v^*, u^*) является седловой точкой лагранжиана L_r, т.е. проверим, что справедливы неравенства

$$L_r(v^*, \eta) \leq L_r(v^*, u^*) \quad \forall \eta \in V, \tag{25}$$
$$L_r(v^*, u^*) \leq L_r(w, u^*) \quad \forall w \in Y. \tag{26}$$

Из сильной сходимости $\operatorname{div}(v^n)$ к $\operatorname{div}(v) = f$ в V^* при $n \to \infty$ следует $v^* \in M$. Поэтому

$$L_r(v^*, \eta) = L_r(v^*, u^*) \quad \forall \eta \in V,$$

т. е. (25) имеет место. Для того чтобы проверить справедливость (26), запишем неравенство (19) для v^{n_k}

$$J(v^{n_k})-J(w)-\langle \operatorname{div}(v^{n_k}-w),u^{n_k}\rangle+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^{n_k})-f\|^2_{V^*}-\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w)-f\|^2_{V^*}\le 0 \quad \forall w\in Y. \qquad (27)$$

Переходя в (27) к пределу при $k\to\infty$, пользуясь слабой полунепрерывностью снизу функционала J (см. [2]), слабой сходимостью последовательностей $\{v^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{u^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ к v^* и u^* соответственно и сильной сходимостью последовательности $\{\operatorname{div}(v^n)\}_{n=1}^{\infty}$, получим

$$J(v^*)-\langle \operatorname{div}(v^*),u^*\rangle+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^*)-f\|^2_{V^*}\le J(w)-\langle \operatorname{div}(w),u^*\rangle+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(w)-f\|^2_{V^*} \quad \forall w\in Y.$$

Отсюда следует справедливость (26). □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует вторая компонента и седловой точки L_r, являющаяся слабо предельной точкой последовательности $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$, любая слабо предельная точка последовательности $\{v^n\}_{n=1}^{\infty}$ является первой компонентой седловой точки L_r. Кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty} J(v^n)=J(v), \qquad (28)$$

где v — первая компонента седловой точки L_r.

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 мы установили, что любая слабо предельная точка u последовательности $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$ является первой компонентой седловой точки L_r (при этом по крайней мере одна слабо предельная точка у $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$ существует).

Далее, в силу второго утверждения теоремы 2 для всех таких точек u существует предел числовой последовательности $\{\|u^n-u\|_V\}_{n=1}^{\infty}$ при $n\to\infty$. Это означает, что каждая слабо предельная точка u ограниченной последовательности $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит аттрактору ([7], с. 247) этой последовательности. Но тогда вся последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится слабо в V при $n\to\infty$ (см. [7], с.247).

То, что любая слабо предельная точка последовательности $\{v^n\}_{n=1}^{\infty}$ является первой компонентой седловой точки L_r, нетрудно проверить теперь, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.

Проверим, наконец, справедливость последнего соотношения (28). Пусть (v,u) — седловая точка L_r на $Y\times V$. Тогда

$$J(v)\le J(v^n)+\langle v^n,\nabla u\rangle_Y+\langle f,u\rangle+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n)-f\|^2_{V^*}=$$
$$=J(v^n)+\langle v^n,\nabla u^n\rangle_Y+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n)-f\|^2_{V^*}+\langle v^n,\nabla u\rangle_Y+\langle f,u\rangle-\langle v^n,\nabla u^n\rangle_Y.$$

Используя теперь (16) с $w=v$, получим

$$J(v)\le J(v^n)+\langle v^n,\nabla u\rangle_Y+\langle f,u\rangle+\frac{r}{2}\|\operatorname{div}(v^n)-f\|^2_{V^*}\le$$
$$\le J(v)+\langle v,\nabla u^n\rangle_Y+\langle v^n,\nabla u\rangle_Y+\langle f,u\rangle-\langle v^n,\nabla u^n\rangle_Y.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n\to\infty$, получим, что имеет место соотношение (28). □

Литература

1. Ляшко А.Д., Бадриев И.Б., Карчевский М.М. *О вариационном методе для уравнений с разрывными монотонными операторами* // Изв. вузов. Матемематика. – 1978. – № 11. – С. 63–69.
2. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. *Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. –№ 7. – С. 1133–1144.
3. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. *Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами* // Числен. методы механ. сплошн. среды. – Новосибирск, 1979. – Т. 10. –№ 5. – С. 63–78.
4. Лапин А.В. *Метод расширенного лагранжиана для задач фильтрации с предельным градиентом* // Вычисл. процессы и системы. – 1988. – № 6. – С. 192–198.
5. Бадриев И.Б., Панкратова О.В., Шагидуллин Р.Р. *Итерационные методы решения задач фильтрации с разрывным законом с предельным градиентом* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 396–399.
6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, – 1979. – 400 с.
7. Обэн Ж.П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988. – 510 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.09.1997