ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

В.И. СУМИН, А.В. ЧЕРНОВ

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

При проверке линейных ограниченных операторов (л. о. о.) на квазинильпотентность непосредственное использование известной формулы И.М. Гельфанда для спектрального радиуса нередко оказывается весьма затруднительным из-за сложного вида оператора или его мажоранты. Поэтому представляют интерес специальные признаки квазинильпотентности. Такие признаки (напр., [1]–[4]) связываются зачастую с тем или иным понятием вольтерровости функциональных операторов; об абстрактных вольтерровых операторах см., например, [5], [6]. Ниже приводятся удобные для приложений достаточные условия квазинильпотентности функциональных операторов, использующие понятие вольтерровости в смысле [7], [8], которое является непосредственным обобщением на случай нескольких переменных известных определений [9], [10] (см. также [6]). При этом развиваются некоторые результаты [1]. Сформулированные ниже утверждения дополняют результаты, опубликованные в [11], [12].

Ограничимся важным для приложений случаем операторов, действующих в пространстве L_∞. Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — фиксированное измеримое по Лебегу, ограниченное множество; $L_\infty = L_\infty(\Pi)$; $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Π; T — некоторая часть Σ. Следуя [7], [8], л. о. о. $G[\cdot] : L_\infty \longrightarrow L_\infty$ назовем *вольтерровым на системе множеств* T, если $\forall H \in T$ сужение $G[x]\big|_H$ не зависит от значений сужения $x\big|_{\Pi\setminus H}$, т. е. $\forall H \in T$ имеем $P_H G P_H = P_H G$, где P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества H. Класс операторов, вольтерровых на системе T, обозначим через $V(T)$. Пусть $[a,b] = [a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n]$ — фиксированный брус, содержащий Π, $\mu = \{\nu,\lambda\}$ — любая упорядоченная пара наборов $\nu,\lambda \subset \{1,\dots,n\}$, $\nu\cup\lambda \neq \emptyset$, $\nu\cap\lambda = \emptyset$. Положим $T_\mu(\Pi) \equiv \{\Pi\cap[\alpha,\beta] \mid [\alpha,\beta] \in T_\mu([a,b])\}$, где

$$T_\mu([a,b]) \equiv \{[\alpha,\beta] = [\alpha^1,\beta^1]\times\cdots\times[\alpha^n,\beta^n] \subset [a,b] \mid \alpha^i = a^i \ (i\notin\nu),\ \ \beta^i = b^i \ (i\notin\lambda)\}.$$

Систему множеств $\mathcal{T} = \{H_0,\dots, H_k\} \subset \Sigma$, упорядоченную по вложению ($H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_k$) и такую, что $H_0 = \emptyset$, $H_k = \Pi$, назовем конечной цепочкой. Если при этом $G \in V(\mathcal{T})$, то будем говорить, что $\mathcal{T}$ — конечная вольтерровская цепочка оператора G. Пусть $\delta > 0$ — число, $CH = \Pi\setminus H$. Конечную цепочку $\mathcal{T} = \{H_0,\dots,H_k\}$ назовем *слабой δ-цепочкой л. о. о.* $G : L_\infty \to L_\infty$, если $\rho(P_{H_i\setminus H_{i-1}} G P_{H_i\setminus H_{i-1}}) < \delta$, $i = \overline{1,k}$. Обозначим через $\Psi_{\text{сл}}(G)$ множество всех таких неотрицательных чисел δ, для каждого из которых существует вольтерровская слабая δ-цепочка оператора G. В рассматриваемом случае пространства L_∞ справедливо следующее обобщение теоремы 1 из [1], доказанное в [12]: для всякого л. о. о. $G : L_\infty \to L_\infty$ спектральный радиус $\rho(G)$ равен $\inf\Psi_{\text{сл}}(G)$.

Будем говорить, что оператор $G : L_\infty \longrightarrow L_\infty$ *удовлетворяет δ-условию* на множестве $H \in \Sigma$, если $\|P_H G P_H\| < \delta$. Конечную цепочку $\mathcal{T} = \{H_0,\dots,H_k\}$ назовем *δ-цепочкой оператора* $G : L_\infty \longrightarrow L_\infty$, если G удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i\setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 95-01-00701, 98-01-793).

Пусть $\Psi(G)$ — множество всех таких неотрицательных чисел δ, для каждого из которых существует вольтерровская δ-цепочка оператора G. Очевидно, $\Psi(G) \subset \Psi_{\text{сл}}(G)$. Таким образом, непосредственно из приведенной выше формулы для спектрального радиуса получаем оценку $\rho(G) \le \inf \Psi(G)$ и следующий признак квазинильпотентности (в частном случае положительного л. о. о. он был анонсирован в [11] и доказан в [12]).

Теорема 1. *Если л. о. о. $G : L_\infty \longrightarrow L_\infty$ удовлетворяет условию*

$$\forall\, \delta > 0 \ \ \exists \ \textit{вольтерровская } \delta\textit{-цепочка оператора } \ G, \tag{1}$$

то $\rho(G) = 0$.

Рассмотрим конкретную, часто встречающуюся в прикладных задачах ситуацию, когда л. о. о. $G : L_\infty \longrightarrow L_\infty$ принадлежит классу $V(T_\mu)$, $T_\mu = T_\mu(\Pi)$. Фиксируем некоторый брус $[a, b]$, содержащий Π. Положим $\Phi_G(H) = \sup\limits_{c \in \mathbf{R}^n} \|P_{(H+c)\cap\Pi} G P_{(H+c)\cap\Pi}\|$, $H \in \Sigma([a, b])$. Справедливо следующее утверждение (его частные случаи приведены в [11], [12]).

Теорема 2. *Если для л. о. о. $G \in V(T_\mu(\Pi))$*

$$\Phi_G([\alpha, \beta]) \longrightarrow 0 \ \ \textit{при} \ \ \alpha^i \longrightarrow b^i \ \ (i \in \nu), \quad \beta^i \longrightarrow a^i \ \ (i \in \lambda), \quad [\alpha, \beta] \in T_\mu([a, b]),$$

то условие (1) *выполнено.*

Сформулированные теоремы, в частности, оказываются полезными при исследовании операторов, возникающих при переходе к описанию начально-краевых задач (н. к. з.) для гиперболических уравнений в терминах функционально-операторного уравнения вида

$$z(t) = f(t, A[z](t)), \quad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где $f(\cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $A[\cdot] : L^m_\infty(\Pi) \longrightarrow L^l_\infty(\Pi)$ — л. о. о. Такое описание охватывает широкий круг н. к. з. и оказывается удобным в теории оптимизации распределенных систем ([7], [8]). Изучение н. к. з. при этом сводится к исследованию свойств оператора A. В самых различных вопросах теории оптимального управления возникает необходимость нахождения квазинильпотентных мажорант оператора A ([7], [8]).

В качестве примера рассмотрим н. к. з. для гиперболического уравнения

$$x_{t^1 t^2} = f(t, x(t), x_{t^1}(t), x_{t^2}(t)), \quad t \in \Pi, \tag{3}$$

с условиями (4). Задача ставится в описываемой ниже области Π, содержащейся в фиксированном прямоугольнике $[0, b] \subset \mathbf{R}^2$, в предположении, что $f(\cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ — функция типа Каратеодори, ограниченная на каждом ограниченном множестве. Пусть $t^2 = M_1(t^1)$, $t^2 = M_2(t^1)$ — строго возрастающие бесконечно-дифференцируемые на отрезке $[0, b^1]$ функции; $M_1(0) = M_2(0) = 0$, $M_1(b^1) < b^2$, $M_2(b^1) > b^2$; $\|M_1'\|_{\mathbf{C}[0,b^1]}$, $\|(M_2^{-1})'\|_{\mathbf{C}[0,b^1]} < 1$; $M_1(t^1) < M_2(t^1)$, $0 \le t^1 \le b^1$. На множестве $\Pi = \{t \in [0, b] \mid M_1(t^1) \le t^2 \le M_2(t^1)\}$ рассмотрим н. к. з. для (3)

$$x(t^1, M_1(t^1)) \equiv 0, \quad 0 \le t^1 \le b^1; \quad x(M_2^{-1}(t^2), t^2) \equiv 0, \quad 0 \le t^2 \le b^2 \tag{4}$$

(по поводу приведенных начально-краевых условий см., напр., [13], гл. 26).

Решение задачи (3), (4) понимаем в смысле почти всюду (п. в.) и ищем его в классе $W(\Pi)$ абсолютно-непрерывных на Π функций с ограниченными первыми и смешанной производными. Обозначим

$$(M_1 \circ M_2^{-1})^i(t^2) = \pi_1^i(t^2), \quad (\pi_1^i \circ M_1)(t^1) = \pi_2^i(t^1), \quad (M_2^{-1} \circ M_1)^i(t^1) = \pi_3^i(t^1),$$
$$(\pi_3^i \circ M_2^{-1})(t^2) = \pi_4^i(t^2), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Формула

$$x(t)=\int_{M_1(t^1)}^{t^2}\int_{M_2^{-1}(t^2)}^{t^1}z(\xi,\eta)d\xi\,d\eta-\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int_{\pi_1^i(t^2)}^{\pi_2^{i-1}(t^1)}\int_{\pi_3^i(t^1)}^{\pi_4^{i-1}(t^2)}z(\xi,\eta)d\xi\,d\eta+$$
$$+\int_{\pi_2^i(t^1)}^{\pi_1^i(t^2)}\int_{\pi_4^i(t^2)}^{\pi_3^i(t^1)}z(\xi,\eta)d\xi\,d\eta\Big)\equiv A_1[z](t)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями $z\in L_\infty(\Pi)$ и удовлетворяющими условиям (4) функциями $x\in W(\Pi)$. Поэтому задача (3), (4) эквивалентна рассматриваемому над $L_\infty(\Pi)$ функциональному уравнению (2), где $A[\cdot]\equiv\{A_1[\cdot],A_2[\cdot],A_3[\cdot]\}:L_\infty(\Pi)\longrightarrow L^3_\infty(\Pi)$, $m=1$, $l=3$,

$$A_2[z](t)=\int_{M_1(t^1)}^{t^2}z(t^1,\eta)d\eta-{M_1}'(t^1)\int_{M_2^{-1}(t^2)}^{t^1}z(\xi,M_1(t^1))d\xi-$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty}\Big(-{\pi_3^i}'(t^1)\int_{\pi_1^i(t^2)}^{\pi_2^{i-1}(t^1)}z(\pi_3^i(t^1),\eta)d\eta+{\pi_2^{i-1}}'(t^1)\int_{\pi_3^i(t^1)}^{\pi_4^{i-1}(t^2)}z(\xi,\pi_2^{i-1}(t^1))d\xi-$$
$$-{\pi_2^i}'(t^1)\int_{\pi_4^i(t^2)}^{\pi_3^i(t^1)}z(\xi,\pi_2^i(t^1))d\xi+{\pi_3^i}'(t^1)\int_{\pi_2^i(t^1)}^{\pi_1^i(t^2)}z(\pi_3^i(t^1),\eta)d\eta\Big),$$

$$A_3[z](t)=\int_{M_2^{-1}(t^2)}^{t^1}z(\xi,t^2)d\xi-{M_2^{-1}}'(t^2)\int_{M_1(t^1)}^{t^2}z(M_2^{-1}(t^2),\eta)d\eta-$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty}\Big(-{\pi_1^i}'(t^2)\int_{\pi_3^i(t^1)}^{\pi_4^{i-1}(t^2)}z(\xi,\pi_1^i(t^2))d\xi+{\pi_4^{i-1}}'(t^2)\int_{\pi_1^i(t^2)}^{\pi_2^{i-1}(t^1)}z(\pi_4^{i-1}(t^2),\eta)d\eta+$$
$$+{\pi_1^i}'(t^2)\int_{\pi_4^i(t^2)}^{\pi_3^i(t^1)}z(\xi,\pi_1^i(t^2))d\xi-{\pi_4^i}'(t^2)\int_{\pi_2^i(t^1)}^{\pi_1^i(t^2)}z(\pi_4^i(t^2),\eta)d\eta\Big).$$

Положим

$$p_i=(\pi_4^i(t^2),\pi_1^i(t^2)),\quad p_i'=(\pi_4^i(t^2),\pi_1^{i+1}(t^2)),\quad q_i=(\pi_3^i(t^1),\pi_2^i(t^1)),\quad q_i'=(\pi_3^{i+1}(t^1),\pi_2^i(t^1)).$$

Пусть $L_1(t)$ и $L_2(t)$ — ломаные на плоскости t, определяемые формулами

$$L_1(t)=[t,p_0]\bigcup\bigcup_{i=0}^{\infty}([p_i,p_i']\bigcup[p_i',p_{i+1}]),\quad L_2(t)=[t,q_0]\bigcup\bigcup_{i=0}^{\infty}([q_i,q_i']\bigcup[q_i',q_{i+1}]).$$

Мажорантой л. о. о. A является действующий в $L_\infty(\Pi)$ оператор B вида

$$B[z](t)=\iint_{\Pi\cap[0,t]}z(\xi,\eta)d\xi\,d\eta+\int_{L_1(t)}z\,dl+\int_{L_2(t)}z\,dl,\quad t\in\Pi,$$

принадлежащий классу $V(T_\mu(\Pi))$, $\mu=\{\emptyset,\{1,2\}\}$. Заметим, что $L_i(t)\subset(\Pi\cap[0,t])$, $i=1,2$. Имеем $\Phi_B([0,\beta])\le\beta^1\beta^2+2\beta^1+2\beta^2$, $[0,\beta]\subset[0,b]$, и, следовательно, по теореме 2 спектральный радиус $\rho(B)=0$.

Литература

1. Забрейко П.П. *О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра* // Лит. матем. сб. – 1967. – Т. 7. – № 2. – С. 281–287.
2. Забрейко П.П., Ломакович А.Н. *Интегральные операторы Вольтерра в пространстве функций двух переменных* // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1187–1191.
3. Гусаренко С.А. *Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 5. – С. 1046–1049.

4. Жуковский Е.С. *К теории уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1599–1605.
5. Бухгейм А.Л. *Уравнения Вольтерра и обратные задачи.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 208 с.
6. Corduneany C. *Integral equations and applications.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. – 366 p.
7. Сумин В.И. *Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 305. – № 5. – С. 1056–1059.
8. Сумин В.И. *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами.* Ч. 1. *Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи.* – Н. Новгород: Изд-во Нижегородск. ун-та, 1992. – 112 с.
9. Tonelli L. *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra* // Bull. Calcutta Math. Soc. – 1929. – V. 20. – P. 31–48.
10. Тихонов А.Н. *О функциональных уравнениях типа Volterra и их приложениях к некоторым задачам математической физики* // Бюлл. МГУ. – Секц. А. – 1938. – Т. 1. – Вып. 8. – С. 1–25.
11. Сумин В.И., Чернов А.В. *О вольтерровых операторах в пространствах типа* L_∞ // Тр. первой международн. конф. “Математические алгоритмы”. – Н. Новгород: Нижегородск. ун-т, 1995. – С. 111–115.
12. Сумин В.И., Чернов А.В. *О квазинильпотентности функциональных вольтерровых операторов* // Матем. моделир. и оптимальное управл. – Н. Новгород: Нижегородск. ун-т, 1996. – С. 32–42.
13. Гурса Э. *Курс математического анализа.* Том 3. Ч. 1. *Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными.* – М.–Л.: ГТТИ, 1933. – 276 с.

Нижегородский государственный университет
Нижегородский государственный технический университет

Поступили
полный текст 16.07.1996
краткое сообщение 24.06.1998