ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.984

А.М. АХТЯМОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

1. Введение

Задача определения силы тока $i(x,t)$ в проводе, концы которого заземлены через сосредоточенные сопротивления, имеет вид

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR+GL)i_t + GRi, \quad i_x(0,t) - CR_0^{(1)}i_t(0,t) - GR_0^{(1)}i(0,t) = 0,$$
$$i_x(l,t) - CR_0^{(2)}i_t(l,t) - GR_0^{(2)}i(l,t) = 0, \quad i(x,0) = \varphi(x),$$
$$i_x(x,0) = (-R\varphi(x) - f'(x))/L$$

([1], сс. 21, 176). Здесь $\varphi(x)$ и $f(x)$ — соответственно сила тока и напряжение в начальный момент времени.

Рассматриваемая задача допускает разделение переменных по времени, поэтому для ее решения пригоден метод Фурье. При этом у соответствующей задачи в краевых условиях появляется параметр, в результате чего нарушается минимальность цепочек собственных функций в пространстве $L_2 \times L_2$ ([2], с. 191). Обоснование разложимости в ряды по цепочкам собственных функций для таких задач появилось сравнительно недавно ([2], с. 190–229). Проводится оно в пространствах более сложной структуры. Задача вычисления коэффициентов соответствующих рядов не является тривиальной. Коэффициенты подобных рядов находились лишь для некоторых спектральных задач ([3], с. 137–139) с помощью сопряженного оператора.

Вместо указанной конкретной задачи ниже рассмотрим общую краевую задачу второго порядка и для нее найдем коэффициенты разложения пары произвольных функций (принадлежащих специальным пространствам [2]) в ряды по собственным функциям. Сделаем это двумя способами: первый подход обобщает [3] и использует явное построение сопряженного оператора к линеаризатору А.А. Шкаликова задачи (1)–(3), а второй подход использует возможность представления задачи в виде пучка неограниченных операторов с дальнейшим применением соотношений биортогональности [4], известных для пучков операторов.

Для удобства приведем список обозначений. Через $\mathbb{C}$ обозначается пространство комплексных чисел; L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[0,1]$; W_2^1 — соболевское пространство функций на отрезке $[0,1]$, $\mathcal{W}_2^0$ — пространство $W_2^1 \times L_2$, $\mathfrak{H}$ — пространство $(L_2 \times \mathbb{C}^2)^2$. Через $(\ ,\ )$, $[\ ,\ ]$, $\langle\ ,\ \rangle$, $(\ ,\ )_{\mathfrak{H}}$ записываются скалярные произведения в пространствах L_2, $L_2 \times \mathbb{C}^2$, $\mathcal{W}_2^0$, $\mathfrak{H}$ соответственно, а y, $\mathbf{y}$, $\widetilde{\mathbf{v}}$, $\widehat{\mathbf{y}}$ — соответственно элементы этих пространств.

2. Вычисление коэффициентов с помощью сопряженного оператора

Рассмотрим спектральную задачу

$$l(y,\lambda) = y'' + (p_0 + p_1\lambda)y' + (q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2)y = 0, \tag{1}$$
$$U_1(y,\lambda) = a_1 y'(0) + a_2 y(0) + \lambda y(0) = 0, \tag{2}$$
$$U_2(y,\lambda) = b_1 y'(1) + b_2 y(1) + \lambda y(1) = 0. \tag{3}$$

Здесь $a_1, a_2, b_1, b_2, q_2 \in \mathbb{C}$; $a_1, b_1, q_2 \neq 0$; $p_0 = p_0(x)$, $q_0 = q_0(x)$, $p_1 = p_1(x)$, $q_1 = q_1(x)$ — непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции.

Сопряженной к задаче (1)–(3) (см., напр., [5], с. 17–23) является краевая задача

$$z'' + (\overline{p}_0 z)' + \overline{q}_0 z + ((-\overline{p}_1 z)' + \overline{q}_1)\mu^2 + \overline{q}_2 \mu z = 0,$$
$$\overline{a}_1 z'(0) + (\overline{a}_2 - \overline{a}_1\overline{p_0(0)})z(0) + (1 - \overline{a}_1\overline{p_0(0)})\mu z(0) = 0,$$
$$\overline{b}_1 z'(1) + (\overline{b}_2 - \overline{b}_1\overline{p_0(1)})z(1) + (1 - \overline{b}_1\overline{p_1(1)})\mu z(1) = 0.$$

Согласно [2] задача (1)–(3) допускает линеаризацию в пространстве $\mathcal{W}_2^0 = W_2^1 \times L_2$. Линеаризатор $\mathcal{H}$ задачи (1)–(3) задается равенствами

$$\mathcal{H}\{v_0, v_1\} = \{v_1,\ -q_2^{-1}(v_0'' + p_0 v_0' + q_0 v_0 + p_1 v_1' + q_1 v_1)\},$$
$$D(\mathcal{H}) = \Big\{\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0, v_1\} \mid v_0 \in W_2^2,\ v_1 \in W_2^1,$$
$$V_1(\widetilde{\mathbf{v}}) = a_1 v_2'(0) + a_2 v_0(0) + v_1(0) = 0,\ \ V_2(\widetilde{\mathbf{v}}) = b_1 v_0'(1) + b_2 v_0(1) + v_1(1) = 0\Big\}.$$

Линейная спектральная задача $\mathcal{H}\widetilde{\mathbf{v}} = \lambda\widetilde{\mathbf{v}}$ имеет те же собственные значения, что и задача (1)–(3), а собственные функции оператора $\mathcal{H}$, соответствующие собственным значениям λ_k, имеют вид $\widetilde{\mathbf{v}}_k = \{y_k, \lambda_k y_k\}$, где y_k — собственные функции задачи (1)–(3), отвечающие тем же собственным значениям λ_k (чтобы не усложнять существо дела, считаем все собственные значения задачи (1)–(3) простыми).

Пусть $\widetilde{\mathbf{v}}_k$ — собственная функция оператора $\mathcal{H}$, соответствующая собственному значению λ_k, а $\widetilde{\mathbf{g}}_k$ — собственная функция оператора $\mathcal{H}^*$. Тогда справедливы соотношения биортогональности $\langle\widetilde{\mathbf{v}}_k, \widetilde{\mathbf{g}}_j\rangle / \langle\widetilde{\mathbf{v}}_k, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle = \delta_{k,j}$. Из этих соотношений получается формула для вычисления коэффициентов разложения элемента $\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0, v_1\}$ из пространства $\mathcal{W}_2^0 = W_2^1 \times L_2$ в ряд по собственным функциям $\widetilde{\mathbf{v}}_k$

$$c_k = \langle\widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle / \langle\widetilde{\mathbf{v}}_k, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle. \tag{4}$$

Таким образом, задача вычисления коэффициентов сводится к поиску сопряженного оператора и его собственных функций.

Теорема 1. *Сопряженный к $\mathcal{H}$ оператор $\mathcal{H}^*$ имеет вид* $\mathcal{H}^*\{g_0, g_1\} = H_1\{g_0, g_1\} + H_2\{g_0, g_1\}$,

$$D(\mathcal{H}^*) = \Big\{\widetilde{\mathbf{g}} = \{g_0, g_1\} \mid g_0 \in W_2^2,\ g_1 \in W_2^1,$$
$$G_1(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}(1 - \overline{a}_1\overline{p}_1(0))g_1(0) - \overline{a}_1(g_0(0) - g_0'(0)) = 0,$$
$$G_2(\widetilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{\,-1}(1 - \overline{a}_1\overline{p}_1(1))g_1(1) - \overline{b}_1(g_0(1) + g_0'(1)) = 0\Big\}.$$

Здесь

$$H_1\{g_0,g_1\} = \Big\{\overline{q}_2^{-1}\Big[g_1 - \int_0^x \overline{p_0(t)}g_1(t)dt + \int_0^x\int_0^\xi \overline{q_0(\xi)}g_1(\xi)d\xi\,dt - \frac{2-x}{3}g_1(0) +$$

$$+\frac{1+x}{3}\Big(\int_0^1 \overline{p_0(t)}g_1(t)dt - \int_0^1\int_0^t \overline{q_0(\xi)}g_1(\xi)d\xi\,dt - g_1(1) - \int_0^1 \overline{q_0(\xi)}g_1(\xi)d\xi\Big)\Big],$$

$$-g_0'' + \overline{q}_2^{-1}(\overline{p_1(x)}g_1(x))' - \overline{q}_2^{-1}(\overline{q_1(x)}g_1(x))\Big\},$$

$$H_2\{g_0,g_1\} = \Big\{\overline{a}_2\frac{2-x}{3}(g_0'(0) - g_0(0) - \overline{q}_2^{-1}\overline{p_1(0)}g_1(0)) +$$

$$+\overline{b}_2\frac{1+x}{3}(-g_0'(1) - g_0(1) + \overline{q}_2^{-1}\overline{p_1(1)}g_1(1)),\ 0\Big\}.$$

Доказательство. В отличие от стандартной нормы $\|f\|_{W_2^1} = (\|f'\|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2}^2)^{1/2}$ будем использовать норму $\|f\|_{W_2^1} = (\|f'\|_{L_2}^2 + |f(0)|^2 + |f(1)|^2)^{1/2}$. Эти нормы эквивалентны ([6], с. 147). В нашем случае вторая норма удобнее, т. к. она позволяет использовать вместо функций Грина обычные интегралы с переменным верхним пределом.

Верно равенство

$$\langle\mathcal{H}\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{v}},H_1\tilde{\mathbf{g}}\rangle + P(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}}). \qquad (5)$$

Здесь $\mathcal{H}$ и H_1 — выражения, определенные в формулировке теоремы, а $P(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}}) = q_2^{-1}[v_0'(0)\overline{g}_1(0) - v_0'(1)\overline{g}_1(1) + v_1(0)(q_2\overline{g}_0(0) - q_2\overline{g'}_0(0) + p_1(0)\overline{g}_1(0)) + v_1(1)(q_2\overline{g}_0(1) - q_2\overline{g'}_0(1) + p_1(1)\overline{g}_1(1))]$ — билинейная форма. Равенство (5) получается интегрированием по частям. Оно напоминает формулу Лагранжа, с помощью которой находится сопряженный оператор для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве L_2. Отличие состоит в том, что в нашем случае в "краевых условиях" $V_1(\tilde{\mathbf{v}}) = 0$, $V_2(\tilde{\mathbf{v}}) = 0$ (точнее, в условиях на область определения оператора) содержатся шесть переменных (это переменные $v_0(0)$, $v_0(1)$, $v_0'(0)$, $v_0'(1)$, $v_1(0)$, $v_1(1)$), а в форме $P(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}})$ — лишь четыре ($v_0'(0)$, $v_0'(1)$, $v_1(0)$, $v_1(1)$). В классическом случае — обратная ситуация. Там количество переменных в краевых условиях не больше числа переменных, содержащихся в билинейной форме проинтегрированных членов. Поэтому методы, используемые в ([5], с. 17–22), непосредственно не применимы в нашем случае. Прежде чем применить известные методы нахождения сопряженного оператора, требуется сделать некоторые преобразования. А именно, форму $P(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}})$ представим в виде суммы двух форм $P_1(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}})$ и $P_2(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}})$, первую из которых запишем в виде скалярного произведения

$$P_1(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}}) = -a_2v_0(0)q_2^{-1}(q_2\overline{g}_0(0) - q_2\overline{g'}_0(0) + p_1(0)\overline{g}_1(0)) -$$

$$- b_2v_0(1)q_2^{-1}(q_2\overline{g}_0(1) - q_2\overline{g'}_0(1) + p_1(1)\overline{g}_1(1)) = \langle\tilde{\mathbf{v}},H_1\tilde{\mathbf{g}}\rangle,$$

а из второй методом, описанным в [5], найдутся "сопряженные краевые условия".

Из изложенного выше следует равенство $\langle\mathcal{H}\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{g}}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{v}},\mathcal{M}\tilde{\mathbf{g}}\rangle$, где $\mathcal{M}$ — оператор, который определяется равенствами

$$\mathcal{M}\{g_0,g_1\} = H_1\{g_0,g_1\} + H_2\{g_0,g_1\},$$

$$D(\mathcal{M}) = \Big\{\tilde{\mathbf{g}} = \{g_0,g_1\} \mid g_0 \in W_2^2,\ g_1 \in W_2^1,$$

$$G_1(\tilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{-1}(1 - \overline{a}_1\overline{p}_1(0))g_1(0) - \overline{a}_1(g_0(0) - g_0'(0)) = 0,$$

$$G_2(\tilde{\mathbf{g}}) = \overline{q}_2^{-1}(1 - \overline{a}_1\overline{p}_1(1))g_1(1) - \overline{b}_1(g_0(1) + g_0'(1)) = 0\Big\}.$$

Таким образом, $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^*$. Обратное включение $\mathcal{M} \supset \mathcal{H}^*$ следует из того факта, что образом операторов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ является все пространство $\mathcal{W}_2^0$.

Замечание. Как видим, формула действия сопряженного оператора помимо производных содержит также интегралы и функционалы вида $Ax+B$ $(A, B \in \mathbb{C})$. В этом проявляется отличие от вида сопряженного оператора к оператору, порожденному обыкновенным дифференциальным выражением в пространстве L_2.

Теорема 2. *Коэффициенты разложения произвольной функции $\tilde{\mathbf{v}}$ из пространства $\mathcal{W}_2^0$ по элементам $\tilde{\mathbf{v}}_k$ имеют вид $c_k = P_k/Q_k$, где*

$$\begin{aligned}
P_k = {} & (v_0,\ \overline{\lambda}_k z_k + \overline{q}_2^{\,-1}(\overline{q}_1(x) - (\overline{p}_1(x) z_k(x))')) + (v_1, z_k) + \lambda_k^{-1} q_2^{-1} v_0(1)(\overline{z'}_k(1) - p_0(1)\overline{z}_k(1) + \\
& + \tfrac{b_2}{b_1}\overline{z}_k(1)) + \lambda_k^{-1} q_2^{-1} v_0(0)(p_0(0)\overline{z'}_k(0) - \overline{z'}_k(0) - \tfrac{a_2}{a_1}\overline{z}_k(0)), \\
Q_k = {} & (y_k,\ \overline{\lambda}_k z_k + \overline{q}_2^{\,-1}(\overline{q}_1(x) - (p_1(x) z_k(x))')) + (\lambda_k y_k, z_k) + \lambda_k^{-1} q_2^{-1} y_k(1)(\overline{z'}_k(1) - p_0(1)\overline{z}_k(1) + \\
& + \tfrac{b_2}{b_1}\overline{z}_k(1)) + \lambda_k^{-1} q_2^{-1} y_k(0)(p_0(0)\overline{z}_k(0) - \overline{z'}_k(0) - \tfrac{a_2}{a_1}\overline{z}_k(0)).
\end{aligned}$$

Доказательство. С найденным представлением сопряженного оператора можно показать, что 1) собственные значения оператора $\mathcal{H}^*$ и сопряженной задачи совпадают; 2) между собственными функциями $\widetilde{\mathbf{g}}_k = \{g_{k,0}, g_{k,1}\}$ оператора $\mathcal{H}^*$, соответствующими собственным значениям μ_k, и собственными функциями z_k сопряженной задачи, соответствующими тем же собственным значениям, можно установить взаимно однозначное соответствие.

Подставим функции $\widetilde{\mathbf{g}}_k$, найденные из равенства $\mathcal{H}^*\widetilde{\mathbf{g}}_k = \mu_k\widetilde{\mathbf{g}}_k$, в формулу (4) для коэффициентов c_k. Обозначим $P_k = \langle\tilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle$, $Q_k = \langle\tilde{\mathbf{v}}_k, \widetilde{\mathbf{g}}_k\rangle$. Применив формулу интегрирования по частям и воспользовавшись тем, что $\mu_k = \overline{\lambda}_k$, получим утверждение теоремы.

3. Вычисление коэффициентов с помощью сведения задачи к квадратичному пучку операторов

Предложим теперь другой метод вычисления коэффициентов разложения, который основан на приведении спектральной задачи (1)–(3) к пучку операторов, действующему в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$.

Пространство $L_2 \times \mathbb{C}^2$ — гильбертово пространство с элементами $\mathbf{y} = \{y(x), \xi_1, \xi_2\}$ и скалярным произведением $[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = (y(x), z(x)) + \xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2$. Здесь $\mathbf{z} = \{z(x), \eta_1, \eta_2\}$.

Определим в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^2$ операторы A_0, A_1, A_2 равенствами

$$\begin{aligned}
A_0\mathbf{y} &= \{y'' + p_0 y' + q_0 y,\ a_1 y'(0) + a_2 y(0),\ b_1 y'(1) + b_2 y(1)\}, \\
D(A_0) &= \{\mathbf{y} = \{y(x),\ y(0),\ y(1)\} \mid y \in W_2^2\}, \\
A_1\mathbf{y} &= \{p_1 y' + q_1 y,\ y(0),\ y(1)\}, \quad D(A_1) = D(A_0), \\
A_2\mathbf{y} &= \{q_2 y,\ 0,\ 0\}, \quad D(A_2) = D(A_0).
\end{aligned}$$

Образуем из этих операторов пучок

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2. \tag{6}$$

Собственные значения пучка операторов $A(\lambda)$ и краевой задачи совпадают. Между собственными элементами y_k краевой задачи и собственными элементами $\mathbf{y}_k$ пучка операторов можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathbf{y}_k = \{y_k,\ y_k(0),\ y_k(1)\}$.

Сопряженный к оператору A_0 оператор A_0^* имеет вид

$$\begin{aligned}
A_0^*\mathbf{z} &= \{z'' - (p_0 z)' + q_0 z,\ \overline{a}_1^{\,-1}\overline{a}_2 z(0) - p_0(0)z(0) + z'(0),\ \overline{b}_1^{\,-1}\overline{b}_2 z(1) - p_0(1)z(1) + z'(1)\}, \\
D(A_0^*) &= \{\mathbf{z} = \{z,\ \overline{a}_1^{\,-1} z(0),\ \overline{b}_1^{\,-1} z(1) \mid z \in W_2^2\}.
\end{aligned}$$

Это следует из равенства $[A_0\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{y}, A_0^*\mathbf{z}]$ и из того, что образом операторов A_0 и A_0^* является все пространство.

Зададим операторы M_1, M_2 с помощью равенств

$$\begin{aligned}
M_1\{z,d_1,d_2\} &= \{-(\overline{p}_1 z)' + \overline{q}_1 z,\ d_1 - \overline{p}_1(0),\ d_2 + \overline{p}_1(1)z(1)\},\\
D(M_1) &= \{\{z,d_1,d_2\} \mid z \in W_2^1;\ d_1,d_2 \in \mathbb{C}\},\\
M_2\{z,d_1,d_2\} &= \{q_2^{-1} z,\ 0,\ 0\},\\
D(M_2) &= \{\{z,d_1,d_2\} \mid z \in L_2;\ d_1,d_2 \in \mathbb{C}\}.
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убедимся в том, что $[A_1\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{y}, M_1\mathbf{z}]$, $[A_2\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{y}, M_2\mathbf{z}]$. Области определения операторов M_1, M_2 шире области определения оператора A_0^*.

Образуем из операторов A_0^*, M_1, M_2 пучок

$$M(\mu) = A_0^* + \mu M_1 + \mu^2 M_2. \tag{7}$$

Область определения пучка операторов (7) совпадает с областью определения оператора A_0^*. Заметим, что собственные значения пучка операторов (7) и собственные значения сопряженной краевой задачи совпадают. Между собственными функциями $\mathbf{z}_k$ пучка операторов (7), соответствующими собственным значениям $\overline{\lambda}_k$, и собственными функциями z_k сопряженной краевой задачи, соответствующими тем же $\overline{\lambda}_k$, можно установить взаимно однозначное соответствие по формуле

$$\mathbf{z}_k = \{z_k,\ \overline{a}_1^{-1} z_k(0),\ \overline{b}_1^{-1} z_k(1)\}.$$

Для $\mu \neq \overline{\lambda}_k$ оператор $M(\mu)$ обратим, поэтому $M(\mu) = [A(\lambda)]^*$.

В [4] получены соотношения биортогональности для собственных функций пучка неограниченных операторов. Для нашего случая эти соотношения имеют вид

$$(G\widehat{\mathbf{y}}_k, \widehat{\mathbf{z}}_j)_{\mathfrak{H}} = \delta_{k,j}, \tag{8}$$

где $\widehat{\mathbf{y}}_k = \{\mathbf{y}_k,\ \lambda_k\mathbf{y}_k\}$, $\widehat{\mathbf{z}}_j = \{\mathbf{z}_j,\ \mu_j\mathbf{z}_j\}$, $G = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Из (8) следует, что коэффициенты разложения произвольной функции $\widehat{\mathbf{y}}$ из пространства $\mathfrak{H}$ по собственным элементам пучка (6) находятся по формуле

$$\widehat{c}_k = (G\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}_k)_{\mathfrak{H}} / (G\widehat{\mathbf{y}}_k, \widehat{\mathbf{z}}_k)_{\mathfrak{H}}. \tag{9}$$

Если задача (1)–(3) усиленно регулярна (определение см. в [2], с. 196), то любой элемент $\widetilde{\mathbf{v}} = \{v_0, v_1\}$ пространства $\mathcal{W}_2^0$ может быть разложен в ряд по элементам $\widetilde{\mathbf{v}}_k = \{y_k,\ \lambda_k y_k\}$

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \widetilde{\mathbf{v}}_k, \tag{10}$$

который сходится в норме пространства $\mathcal{W}_2^0$. Отсюда следует

$$\widehat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \widehat{\mathbf{y}}_k, \tag{11}$$

где $\widehat{\mathbf{y}} = \{v_0, v_0(0), v_0(1), v_1, v_1(0), v_1(1)\}$, $\widehat{\mathbf{y}}_k = \{y_k, y_k(0), y_k(1), \lambda_k y_k, \lambda_k y_k(0), \lambda_k y_k(1)\}$. При этом ряд (11) сходится в норме пространства $W_2^1 \times \mathbb{C}^2 \times L_2 \times \mathbb{C}^2$. Значит, тем более этот ряд сходится и в норме пространства $\mathfrak{H}$. Коэффициенты $\{c_k\}$ в (10) и нужно было определить. Так как ряд из равенства (11) сходится в $\mathfrak{H}$ к элементу $\widehat{\mathbf{y}}$ и выполнены соотношения (8), то коэффициенты Фурье его разложения определяются однозначно и согласно построению элемента $\widehat{\mathbf{y}}$ совпадают с коэффициентами c_k из (10). Следовательно, для этих коэффициентов c_k справедлива формула (9). Теперь вычислим эти коэффициенты $(G\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}_k)_{\mathfrak{H}} = (v_0,\ -(\overline{p}_1 z_k)' + \overline{q}_1 z_k + \mu_k \overline{q}_2 z_k) + v_0(0)(a_1^{-1}\overline{z}_k(0) -$

$p_1(0) - p_1(0)\overline{z}_k(0)) + v_0(1)(b_1^{-1}\overline{z}_k(1) - p_1(1)\overline{z}_k(1)) + (v_1,\ \overline{q}_2 z_k)$. Воспользовавшись краевыми условиями сопряженной краевой задачи и тем, что $\mu_k = \overline{\lambda}_k$, получим равенства $(G\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}_k)_{\mathfrak{H}} = q_2^{-1}P_k$, $(G\widehat{\mathbf{y}}_k, \widehat{\mathbf{z}}_k)_{\mathfrak{H}} = q_2^{-1}Q_k$, откуда $c_k = P_k/Q_k$.

Заметим, что второй способ вычисления коэффициентов является менее трудоемким.

Автор благодарен профессору А.А. Шкаликову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике.* – М.: Наука, 1980. – 688 с.
2. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 190–229.
3. Ахтямов А.М. *О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51. – № 6. – С. 137–139.
4. Шкаликов А.А. *Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 140–224.
5. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1967. – 526 с.
6. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Наука, 1976. – 392 с.

Башкирский государственный университет

Поступила 21.02.1996