

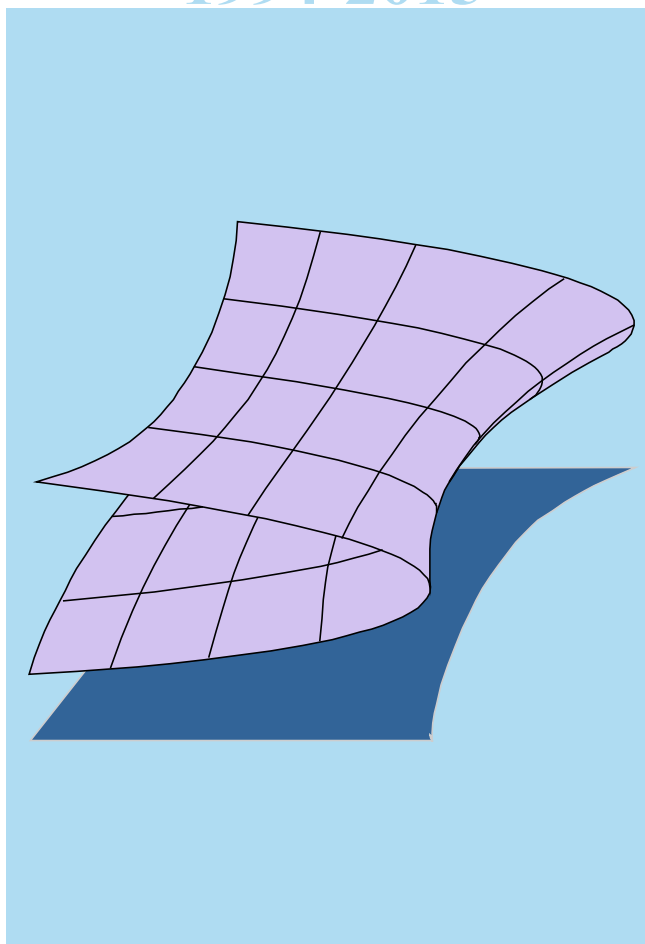
# *Проблемы Нелинейного Анализа в Инженерных Системах*

*Методы Подходы Гипотезы Решения*

*Международный журнал*

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева  
(Казанский авиационный институт)

1994-2015



Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry

Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method

Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

Optimization approach in closed loop green supply chain management

Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization

Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015)

Институту проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН (ИГМех РАН) – 50 !

## СОДЕРЖАНИЕ

**М.С.Ел Нэйши**

Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса

**А.И.Гребенников**

Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей

**М.В.Левский**

Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

**Р.П.Мошкин**

Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

**С.С.Али**

Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью

**А.Г.Граппоне**

Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга

**Л.Лотеро, Э. дель Розарио, Г.-В.Вебер**

Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015)

## НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ

*Поздравление*

**Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !**

## CONTENTS

**1 M.S.El Naschie**

Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry

**34 A.I.Grebennikov**

Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method

**45 M.V.Levskii**

About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation

**76 R.P.Moshkin**

Poincare equations and elements of Li group theory in problems of Chaplygin sleigh motion

**98 S.S.Ali**

Optimization approach in closed loop green supply chain management

**147 A.G.Grappone**

Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization

**182 L.Lotero, E.del Rosario, G.-W.Weber**

Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015)

## SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION

*Congratulation*

**190 A.Yu.Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS (IPMech RAS) — 50 !**

**ПОЧЕТНЫЕ РЕДАКТОРЫ**

*В.Лакишмикантам, Президент МФНА, США*

*В.М.Матросов, Академик РАН, Президент АНН, Россия*

*И.Р.Пригожин, Лауреат Нобелевской Премии, Бельгия*

**РЕДАКТОРЫ**

**Г.Л.Дегтярев, Л.К.Кузьмина, КНИТУ-КАИ, РОССИЯ,**

**В.Ф.Журавлев, ИПМ РАН, РОССИЯ**

**РЕДАКЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

**В.В.Александров, МГУ, Москва, РОССИЯ**

**И.Антониу, Университет Аристотеля, Тессалоники, Греция**

**П.Борн, Главная Академия, Лилль, ФРАНЦИЯ**

**С.Н.Васильев, Институт Проблем Управления РАН, Москва, РОССИЯ**

**П.Дж.Вербос, Национальный научный Фонд, Вирджиния, США**

**И.Г.Горячева, Институт Проблем Механики РАН, Москва, РОССИЯ**

**Д.А.Губайдуллин, ИММ КазНЦ РАН, Казань, РОССИЯ**

**А.Л.Дончев, Американское математическое общество, Мичиган, США**

**Ю.Г.Евтушенко, Вычислительный Центр РАН, Москва, РОССИЯ**

**А.М.Елизаров, КФУ, Казань, РОССИЯ**

**М.С. Ел Нэйши, Университет Александрии, ЕГИПЕТ**

**В.Б.Колмановский, МГИЭМ (НИУ), Москва, РОССИЯ**

**П.С.Красильников, МАИ (НИУ), Москва, РОССИЯ**

**Джи Лин, Междунар. институт общей теории систем, Пенсильвания, США**

**А.Х.Найфе, Политехн.Институт, Гос.Университет, Вирджиния, США**

**Г.Николис, Университет, Брюссель, БЕЛЬГИЯ**

**В.Г.Пешехонов, “Концерн ЦНИИ Электроприбор”, Санкт-Петербург, РОССИЯ**

**Г.Г.Райкунов, ОРКК, Москва, РОССИЯ**

**Н.Х.Розов, МГУ, Москва, РОССИЯ**

**В.Ю.Рутковский, Институт Проблем Управления РАН, Москва, РОССИЯ**

**М.Х.Салахов, АН РТ, Казань, РОССИЯ**

**М.Самбандхам, МК, Атланта, США**

**А.Сидов, Национ.Исследовательский Центр, Берлин, ГЕРМАНИЯ**

**Т.К.Сиразетдинов, КНИТУ им.А.Н.Туполева (КАИ), Казань, РОССИЯ**

**С.Я.Степанов, Вычислительный Центр РАН, Москва, РОССИЯ**

**А.Н.Тихонов, Гос.Инст.Информ.Технол. и Телекоммуникац., Москва, РОССИЯ**

**Ф.Л.Черноустько, Институт Проблем Механики РАН, Москва, РОССИЯ**

**Д.Д.Шилияк, Университет Санта Клара, Калифорния, США**

**О.А.Душина (ассист. редактора, переводы), КНИТУ им.А.Н.Туполева (КАИ), Казань, РОССИЯ**

**Главные цели Журнала -**

- информирование специалистов соответствующих областей о состоянии в теории и приложениях в настоящий момент, о глобальных проблемах и актуальных задачах;
- содействие тесным рабочим контактам между учеными различных Университетов и Школ, теоретиками и прикладниками;
- "математизация" методов в решении задач, инициированных инженерной практикой;
- объединение усилий, синтез методов в решении проблем в различных сферах науки и образования.

В выпусках журнала публикуются обзоры и статьи, инженерные заметки, дискуссионные сообщения, постановки и решения задач во всех областях нелинейного анализа и их приложений в инженерных системах (в том числе, новые результаты, методы, подходы, решения, гипотезы, ...).

Авторы теоретических работ должны указать возможные области приложений в инженерной практике.

**Языки публикаций - РУССКИЙ, АНГЛИЙСКИЙ, НЕМЕЦКИЙ, ФРАНЦУЗСКИЙ**

Издание осуществляется в кооперации с Казанским Федеральным университетом (КФУ), с Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом), с Международной научно-исследовательской лабораторией по нано- и биотехнологиям (INT).

Международный научный журнал “Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”, основанный в 1994 году по инициативе российских ученых, представителей Казанской Четаевской Школы механики и устойчивости, совместно с зарубежными коллегами, издается под эгидой Международной Федерации Нелинейных Аналитиков, Академии Нелинейных Наук, с участием Казанского национального исследовательского технического университета им.А.Н.Туполева (Казанского Авиационного Института). “ПНАИС” - междисциплинарное научное Издание, представляющее исследования по нелинейным проблемам в целом, во всем многообразии фундаментальных и прикладных наук естественнонаучного и гуманитарного цикла, среди которых: математика, механика, физика, химия; инженерные, биологические, медицинские, социальные, политические науки; экология, космология, экономика; нанонаука и нанотехнология; безопасность и поддерживающее развитие, проблемы риска и защиты информации, исследование операций, ... Приглашаются к сотрудничеству ученые различных областей.

<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>

[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)

Авторы присылают свои работы, подготовленные к изданию, в трех экземплярах, объемом до 15 страниц (необходима четкая, качественная печать), и дискету (Word for Windows, IBM PC). Возможна дублирующая пересылка по электронной почте.

Формат набора на листе А4: поле текста - 160х235 (мм), включая в начале статьи: заголовок, инициалы и фамилию автора, название института (организации), адрес для контакта. Верхнее поле - 35 мм, левое - 25 мм, правое - 25мм. Основной текст Times New Roman, 12pt, через 1 интервал, рисунки в компьютерном исполнении (файлы .bmp, .jpg, .gif). Страницы нумеруются карандашом на обратной стороне листа, иллюстрации размещаются в тех же размерах. В конце статьи необходимо дать сведения об авторе (3-4 строки), включая область научных интересов, сферы приложения.

Необходима аннотация статьи на языке оригинала (2 стр.), напечатанная по тем же правилам, а также- аннотация (2 стр.) и вариант статьи на английском языке.

За автором сохраняется право копирования своей публикации. Журнал может быть выслан по заказу за отдельную плату или по подписке.

Наши координаты для контактов (по вопросам публикаций, рекламы и деловых предложений)

(7) (843) 236-16-48 Людмила Константиновна Кузьмина

(7) (843) 238-44-20 Владимир Иванович Панченко

Адрес:

Л.К.Кузьмина, Казанский национальный исследовательский технический университет  
им.А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ)  
Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

*Журнал внесен:*

*в Каталог Библиотеки Конгресса США; номер в Каталоге (LCCN) - 98-646147  
в Каталог Британской Библиотеки; номер в Каталоге (LCCN) - 0133.473700*

Опубликованные статьи реферируются в Реферативном журнале и Базе данных ВИНТИ РАН  
Сведения о журнале занесены в справочную систему по периодическим изданиям “Ulrich's Periodicals Directory” <http://www.ulrichsweb.com>  
Электронный вариант Научного Издания выполняется в кооперации с Казанским Федеральным Университетом и размещен на сервере КФУ

**Издание осуществляется при поддержке Центра Оперативной Печати АБАК**

Оригинал-макет подготовлен для печати  
**Центром Гуманитарных Проектов и Исследований**  
совместно с  
**Фондом поддержки развития культуры**  
при Президенте Республики ТАТАРСТАН  
Издательство «АБАК» (лицензия № 0195; 03.08.2000)  
Казань, РОССИЯ



**HONORARY EDITORS**

**V.Lakshmikantham**, *IFNA President, USA*

**V.M.Matrosov**, *RAS Academician, ANS President, Russia*

**I.R.Prigogine**, *Nobel Prize Laureate, Belgium*

**EDITORS**

**G.L.Degtyarev**, **L.K.Kuzmina**, *KNRTU-KAI, RUSSIA,*

**V.F.Zhuravlev**, *IPM, RAS, RUSSIA*

**EDITORIAL BOARD**

**V.V.Alexandrov**, *MSU, Moscow, RUSSIA*

**I.Antoniou**, *Aristotle University, Thessaloniki, GREECE*

**P.Borne**, *Lille Central Academy, FRANCE*

**F.L.Chernousko**, *Mechanics Problems Institute, RAS, Moscow, RUSSIA*

**A.L.Dontchev**, *American Mathematical Society, Michigan, USA*

**A.M.Elizarov**, *KFU, Kazan, RUSSIA*

**M.S.El Naschie**, *University of Alexandria, EGYPT*

**Yu.G.Evtushenko**, *RAS Computing Centre, Moscow, RUSSIA*

**I.G.Goryacheva**, *Mechanics Problems Institute, RAS, Moscow, RUSSIA*

**D.F.Gubaidullin**, *RAS KazSC IME, Kazan, RUSSIA*

**V.B.Kolmanovsky**, *MSIEM (NRU), Moscow, RUSSIA*

**P.S.Krasilnikov**, *MAI (NRU), Moscow, RUSSIA*

**Yi Lin**, *International Institute for General Systems Studies (IIGSS), PA, USA*

**A.H.Nayfeh**, *Virginia Polytechnic Institute, State University, USA*

**G.Nicolis**, *Free University, Brussels, BELGIUM*

**V.G.Peshekhonov**, *Concern CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, RUSSIA*

**G.G.Raykunov**, *ORCC, Moscow, RUSSIA*

**N.Kh.Rozov**, *MSU, Moscow, RUSSIA*

**V.Yu.Rutkovsky**, *Control Problems Institute, RAS, Moscow, RUSSIA*

**M.Kh.Salakhov**, *RT AS, Kazan, RUSSIA*

**M.Sambandham**, *MC, Atlanta, USA*

**T.K.Serazetdinov**, *KNRTU of A.N.Tupolev name (KAI), Kazan, RUSSIA*

**D.D.Siljak**, *Santa Clara University, California, USA*

**S.Ya.Stepanov**, *RAS Computing Centre, Moscow, RUSSIA*

**A.Sydow**, *GMD, Berlin, GERMANY*

**A.N.Tikhonov**, *State Inst.of Inform.Technol. and Telecomm., Moscow, RUSSIA*

**S.N.Vasiliyev**, *Control Problems Institute, RAS, Moscow, RUSSIA*

**P.J.Werbos**, *NSF, Virginia, USA*

**O.A.Dushina** (Assistant of Editor, translation), *KNRTU of A.N.Tupolev name (KAI), Kazan, RUSSIA*

**Main goals of this Journal -**

- to inform the specialists of appropriate fields about recent state in theory and applications; about global problems, and actual directions;
- to promote close working contacts between scientists of various Universities and Schools; between theorists and application oriented scientists;
- to mathematize the methods for solving the problems generated by engineering practice;
- to unite the efforts, to synthesize the methods in different areas of science and education.

In Journal the articles and reviews; the engineering notes; the discussional communications; the statements and solutions of problems in all areas of nonlinear analysis and their applications in engineering systems are published (including new results, methods, approaches, hypotheses,...). Authors of theoretical works should indicate the possible areas of applications in engineering practice.

The languages of publications are RUSSIAN, ENGLISH, GERMAN, FRENCH.

Edition is carried out in co-operation with Kazan Federal University (KFU), with Moscow Aviation Institute (National Research University), with International Nanobiological Testbed Ltd (INT).

### **От Редакционного Комитета**

Международный Журнал «Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах» – *междисциплинарное двуязычное* научное периодическое Издание, представляющее исследования по нелинейным проблемам во всем разнообразии фундаментальных и прикладных наук.

Огромное значение в установлении тесной *междисциплинарной* связи между фундаментальными и прикладными областями науки в целом и между ее отдельными дисциплинами принадлежит, в первую очередь, Механике. Непреходящая роль Механики как фундаментальной базовой научной дисциплины для всех других дисциплин и для нашего Знания в целом является неоспоримым фактом. Механика снабжает нас моделями и методами, *покрывающими все области теории и инженерной практики*:

*«Ньютоновская Механика – непревзойденное достижение физики (натуральной философии), всей истории человеческой цивилизации. Она вечна. На ее могучем древе появляются новые и новые ветви. Среди них – и ветви, выросшие из привитых на это древо черенков-саженцев, возвращенных в лоне других естественных наук»* – Г.Г.Черный, Академик РАН (Председатель Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, 2011г.).

- Механика – главный инструмент в изучении движения небесных тел и всех процессов в околоземном пространстве и в дальнем Космосе;
- Механика дает мощный аппарат для описания процессов на микроуровне; для квантовой механики; для описания сложных процессов внутри Земли, в геодинатике; в исследовании процессов вулканических извержений, в динамике ураганов; в арктических исследованиях;
- Модели и методы Механики являются эффективным инструментом в междисциплинарных инженерных приложениях – в области медицины, в робототехнике, в биомехатронике, в механике материалов, в нанобиотехнологиях, для решения сложнейших междисциплинарных проблем конструирования в авиационной и аэрокосмической области;
- Механика является «основным фундаментом» для развития всех смежных дисциплин, в которых изучаемые объекты – *междисциплинарные* системы, требующие знаний из различных научных областей; именно на стыке различных дисциплин происходит зарождение новых гипотез, обеспечивающих глубокое познание окружающего Мира, с пониманием происходящих процессов;
- Без Механики, без тесных междисциплинарных связей между теоретическими и прикладными областями, между различными дисциплинами Науки невозможно углубление нашего Знания в целом.

Более того, именно МЕХАНИКА способствует развитию «математических построений исключительной красоты»: теории динамических систем, теории устойчивости А.М.Ляпунова (120-летие которой было отмечено в 2012 году),..., играя в этом важнейшую роль. При этом, объединяя усилия теоретиков и прикладников, она обеспечивает разработку и синтез методов в междисциплинарных сферах науки, образования и инженерной практики; в исследованиях по нелинейным проблемам во всем разнообразии фундаментальных и прикладных наук, включая дисциплины естественного и гуманитарного циклов (среди них: математика, механика, физика, химия; инженерные, биологические, медицинские, социальные, политические науки; экология, космология; экономика и финансовая математика; нанонаука и нанотехнология; устойчивость и поддерживающее развитие; проблемы риска и защиты информации; проблемы исследования операций, ...).

*«...Теория устойчивости и анализ динамических свойств нелинейных систем – роскошное дерево, обладающее классическим стволом, глубокими прочными корнями, уходящими в Механику, ..., в важные прикладные задачи...» – В.М.Матросов, Академик РАН (Президент Академии нелинейных наук, 2001г.).*

В этом направлении следует подчеркнуть непреходящее значение развитой А.М.Ляпуновым-Н.Г.Четаевым методологии для проблем моделирования и анализа в механике, в инженерной практике и для расширения нашего Знания в целом; при этом именно теория устойчивости А.М.Ляпунова дает нам конструктивный математический инструмент, подтверждающий:

«математика – это эффективное «транспортное» средство, способное обеспечить существенный прорыв в понимании сути сложных явлений окружающего Мира, с глубоким проникновением ее методов, сгенерированных механикой, во все области, включая и нетрадиционные для нее».

*«...Я всегда верил, что объективный характер Самоорганизации и Необратимости должен быть основан на качественных характеристиках Динамики;... Вселенная – Конструкция в развитии, в котором Мы участвуем», – И.Пригожин, Нобелевский Лауреат.*

В этом выпуске журнала «Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах» (№2(44), т.21, 2015) опубликованы статьи, аналитические исследования и авторские результаты, научно-информационные материалы, отражающие видение специалистов, выделяющие некоторые актуальные проблемы настоящего и будущего междисциплинарного характера.

Среди них – статьи и обзоры по междисциплинарной тематике, порождаемой потребностями фундаментальной науки и инженерных приложений. Статьи подготовлены в развитие исследований, обсуждаемых на Международных научных форумах и конференциях, на Международных научных Семинарах по проблемам моделирования и динамики сложных междисциплинарных систем применительно к фундаментальным задачам теории и практики.

Тематика, представленная в этих работах, отражает эту междисциплинарность: методы и модели в теории темной энергии; изучение моделей и методов в задачах для термостатических полей; методы оптимального управления применительно к проблемам пространственной ориентации для космических аппаратов; исследование моделей в задаче о движении саней Чаплыгина (применительно к особенностям подготовки спортсменов к зимним Олимпийским Играм); методы оптимизации в задачах управления для обеспечения экологически чистых цепочек поставок; проблемы теории самоорганизации предлобных областей головного мозга в задачах развития интеллекта и когнитивной деятельности, с анализом взаимосвязей в мозге, с разработкой новой нейрофизиологической модели абстракции.

Разрабатываемые модели, способствующие объединению усилий теоретиков и прикладников, направлены на развитие и синтез методов для решения проблем в междисциплинарных сферах науки, образования и инженерной практики.

Выпуск подготовлен с поддержкой наших Партнеров, среди которых: Международная Федерация Нелинейных Аналитиков, Академия нелинейных наук, Международная научно-исследовательская лаборатория по нано-биотехнологиям (INT), Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына РАН, Концерн ЦНИИ Электроприбор, ФГУП ЦНИИМаш, Международный Центр вычислительных методов в конструировании (CIMNE)...

В заключение подчеркнем: тенденция, превалировавшая ранее, – разделенность между дисциплинами и углубление специализации по отраслям знаний, - в настоящее время постепенно изменяется. Отчуждение и разрыв между разными дисциплинами в науках и искусствах неуклонно убывает. Идеалом, который уже сейчас вырисовывается в области возможного, является объединение продуктивно и серьезно работающих ученых в двух или трех разных, казалось бы, совершенно не соприкасающихся, дисциплинах, таких, как например, математика и антропология, политические науки и музыка, химия и философия, история и математика,...

Конечно, необходимо продолжать углублять академическую специализацию, но также важно работать и в направлении *интеграции* Знания в целом. Восстановление истинно полного, согласованного познания как главной сути науки и образования есть быстро распространяющаяся идея. Следует отметить, именно стремление понять нелинейный мир есть доминирующее в большинстве разделов науки. При этом **специфическая роль принадлежит механике** в решении проблем моделирования окружающего мира, которая вместе с математикой, *дает нам эффективный рабочий инструмент* для возможности углубления в Познание, расширяя границы своего применения на все области Знания.

**Это - особая функция механики, универсальной науки о моделировании явлений окружающего мира**, которая снабжает нас конструктивным инструментом для расширения нашего Знания в целом, с распространением границ своего применения на все области науки. Это понимание было подтверждено на XI Всероссийском Съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (20-24 августа 2015г., Казань). В приветственных выступлениях на XI Съезде Проф. И.Р.Гафуров, Ректор КФУ; Проф. Ю.Ф.Гортышов, Президент КНИТУ-КАИ; Член-корр. РАН Д.А.Губайдуллин, Директор Института механики и машиноведения КазНЦ РАН,... весьма полно высветили эту **ведущую роль механики для междисциплинарных исследований** во всем многообразии естественно-научных и гуманитарных дисциплин. Не перечисляя здесь всех имен, связанных с Казанскими Школами механиков, в заключение (о роли и месте Механики) отметим лишь:

выделяют две «эпохи» в развитии Казанского университета, науки в Казани: эпоху Н.И. Лобачевского, ректора университета, великого математика, который читал лекции по механике - теоретической механике, гидравлике, другим разделам механики; и эпоху М.Т. Нужина, ректора университета, специалиста в области механики. Легендарный ректор Казанского университета профессор М.Т. Нужин говорил: «Механика - это сплав математики со здравым смыслом». Более того, как говорил в свое время великий И.Ньютон: *«вся трудность состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы; а потом по этим силам изъяснить остальные явления»*. И именно Механика, **фундаментальная наука об искусстве моделирования** для любой области Знания, позволяет овладеть этим искусством, этим умением.....

**«Теоретическая механика - фундаментальная наука; она является ключевым предметом в подготовке инженеров, математиков, прикладников и физиков--теоретиков,...Для инженеров она является основой их специальных наук; для математиков – дорогой к современным обобщениям; для физиков - «прелюдией» к теории относительности, к статистической и квантовой механике», –**

### **From Editorial Board**

International Journal “Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems” is an *interdisciplinary bilingual* scientific periodical Edition, which represents the research of nonlinear problems in general, in the whole diversity of fundamental and applied sciences, including the disciplines of natural science and the Humanities.

Note, close *interdisciplinary* relation between the fundamental and applied fields of science, between different disciplines has vital importance for the development of our Knowledge in whole. *Fundamental science* “MECHANICS” and its sections play an important role from this point.

Prominent role of Mechanics as a fundamental basic scientific discipline for all another disciplines and for our Knowledge in whole is unquestionable. Science “Mechanics” is investigating the motion and interactions of objects; and “Mechanics” supplies us with models and methods that are covering all areas of theory and engineering:

*“Newtonian mechanics is an unequalled achievement of physics (natural philosophy), the whole history of human civilization. It is everlasting. Its powerful tree is sprouting more and more branches. Among them there are the branches that have grown from scions grafted on this tree and cultivated in other natural sciences”, - G.G.Chyorny, Academician of Russian Academy of Science (Chairman of Russian National Committee on theoretical and applied mechanics, 2011).*

- Mechanics has been the main tool for the research of celestial bodies and all the processes in near-Earth and outer Space.
- “Mechanics” provides powerful tools for description of processes at micro level; also – for description of complex processes inside the Earth, in geodynamics; in the study of volcanic eruption processes, hurricane dynamics; in Arctic exploration,...
- Methods and models of Mechanics are giving very effective approaches for multidisciplinary engineering applications, including various domains: medicine, robot-technique, biomechatronics, mechanics of materials, nano-biotechnology, complex problems of designing in aviation and space technique, ...
- The Mechanics is «the main foundation» to development of all adjacent disciplines, in which studied objects are *the interdisciplinary* systems requiring knowledge from various scientific areas. Exactly on boundary between different disciplines the new hypotheses are generated, that providing deep knowledge of World around, with understanding of occurring phenomenas.
- Without Mechanics, without close interdisciplinary relations between theoretical and applied areas, between different disciplines of the Science, the deepening our Knowledge in whole is impossible.

Moreover exactly Mechanics is promoting the development of “*mathematical constructions of exclusive beauty*”: the dynamic systems theory, A.M.Lyapunov stability theory (which 120-th Anniversary was celebrated in 2012).... And it plays in all this the major role, with uniting efforts of theorists and engineers, with development and synthesis of methods for the solving problems in interdisciplinary spheres of a science, education and engineering practice, in the research of nonlinear problems in general, in the whole diversity of fundamental and applied sciences including the disciplines of natural science and the Humanities (mathematics, mechanics, physics, chemistry; engineering, biological, medical, social, political sciences; ecology, cosmology; economics and financial mathematics; nanoscience



and nanotechnology, stability and sustaining development, problems of risk and information security, operational researches, ...).

*“... The stability theory and dynamic properties analysis of nonlinear systems – it is magnificent tree, possessing the classical stem, the deep strong roots from Mechanics, ..., from important engineering problems, ...”, - V.M.Matrosov, Academician of Russian Academy of Science (President of Academy of nonlinear sciences, 2001).*

In this direction it is very important the A.M.Lyapunov-N.G.Chetayev methodology, developed for problems of modelling and analysis in Mechanics, in Engineering practice and for extending our Knowledge in whole. The A.M.Lyapunov stability theory is giving for us the constructive mathematical tool, and it is confirming:

“mathematics is an effective “transport” which is able to provide significant breakthrough in understanding of the essence of Environment, with deep penetration of its approaches, generated by mechanics, into all the spheres including the unconventional ones”.

*“...I always believed that the objective character of Self Organization and Irreversibility should be based on some qualitative properties of **Dynamics**; ...Universe is a construction in progress, in which **we participate**”, - I.Prigogine, Nobel Laureate.*

The current issue of “Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems” (№2 (44), т.21, 2015) carries articles, analytical researches and authors results, scientific and information papers that reflect the views of specialists and highlight some topical *interdisciplinary* problems of present and future.

Among them it is presented the papers and reviews of interdisciplinary subjects, scientific research and interdisciplinary spheres generated by the needs of fundamental science and engineering applications. These articles are prepared in the development of the researches results discussed at the International scientific forums and conferences, years); at International Scientific Workshops on problems of modelling and dynamics of complex multidisciplinary systems.

The subjects represented in these works is reflecting this multidisciplinary: methods and models in dark energy theory; the study of models and methods in problems for thermostatic fields; optimal control methods for spacecrafts spatial orientation; the investigations of models in problem about Chaplygin sleigh motion (with reference to the peculiarities of training of the athlete to Olympic Winter Games); optimization methods in management problems for providing of “green” supply chain; the problems of self- organization of brain pre-frontal areas for development of cognitive activity and intellect level, with analysis of novel neurophysiologic model of abstraction .

The submitted articles will undoubtedly promote the cooperation of specialists in theory and applications, support the synthesis of approaches to the solution of problems in interdisciplinary spheres of science, education and engineering practice.

The issue is prepared with support of our Partners: International Federation of Nonlinear Analysts, Academy of Nonlinear Sciences, International Nano-biotechnology Center (INT), Kazan Federal University (KFU), N.E.Bauman Moscow State Technical University, Moscow Aviation Institute (National Research University), V.F.Trapeznikov Institute of control problems of RAS, A.A.Dorodnitsyn Computing Centre of RAS; Concern CSRI Elektropribor, JSC; TsNII mash., CIMNE (International Center for Numerical Methods in Engineering).

In final remark we note : the passing Century's dominating trend consisting in separateness between the disciplines and deepening specialization in spheres of knowledge, is gradually changing. The gap and separation between different disciplines in science and arts steadily diminish. The ideal which can already be real consists in joining of productively and seriously working scientists from two or three absolutely different disciplines (for instance, mathematics and anthropology, political sciences and music, chemistry and philosophy, history and mathematics).

Of course, it is necessary to keep on extending academic specialization but it is also important *to integrate* Knowledge in general. The reconstruction of perfectly entire, coordinated Knowledge as the main essence of science and education is a quickly spreading idea. Moreover, the tendency to understand nonlinear World is prevailing in the majority of mathematical sections. In this Mechanics has the specific role that in solving problems of modelling different processes jointly with Mathematics will dominate in the coming Century, with extending the borders of its application to all spheres of Knowledge.

*The special "function"* of Mechanics in solving of the problems of modelling surrounding world, which together with mathematics gives us efficient "worker instrument" for possibility of the deepening of our Cognition in whole, with increasing borders of its using on all area of the Knowledge, was confirmed also on XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics (the August, 22-26, 2015r., Kazan). In welcoming Speeches Prof. I.R.Gafurov (KFU Rector); Prof. Yu.F.Gortyshov (the KNRTU-KAI President); the Corresponding Member of RAS D.A.Gubaidullin (Director of the Institute of mechanical engineering and machine-building of Kazan Scientific Centre of RAS) were reflecting in the whole fullness **the leading role of Mechanics** for interdisciplinary investigations, in all variety of naturally-scientific and humanitarian disciplines.

Not enumerating here all names, relating to Kazan scientific Schools of Mechanics, as conclusion about **the leading role of Mechanics** we note only :

In Kazan Science, in Kazan University it is selected two "Epochs":

Epoch of N.I. Lobachevskiy , the rector of the University, great mathematician, which lectured for students on mechanics - a theoretical mechanics, hydraulics, the other sections of mechanics;

and Epoch of M.T. Nuzhin, the University rector, specialist in the field of mechanics. The brilliant rector of Kazan University, Professor M.T. Nuzhin spoke: "Mechanics is "an alloy" of mathematics with good senses". Moreover, in due course great **Isaak Newton** noted: "...the all difficulty in whole is contained in what, that it is necessary on motion phenomena to understand the forces of Nature, and after on these forces – to explain the another phenomena". And exactly Mechanics, **a fundamental science on ART of Modelling for any area of the Knowledge**, allows to possess this Art, this "know-how"...

**"Theoretical mechanics is a fundamental science; it is a key subject in training engineers, mathematicians, physicist-applied oriented and physicist-theorist...**

**For engineers it is a base of their special sciences;**

**for mathematicians it is "way" to modern generalizations;**

**for physicists – it is "prelude" to theories of relativity, to statistical and quantum mechanics ", –**

R.Xill. Principles of Dynamics, Oxford, 1964.

**В 2015г. В ЖУРНАЛЕ ОПУБЛИКОВАНО****№1(43), т.21, 2015****П.Дж.Вербос.** Связи между сознанием и физикой времени.**Д.ДеТомбе, Г.-В.Вебер.** Новые области в теории операций: методология социальной сложности и теория операций для развития.**А.Б.Бахур.** Организационно-управленческая методология – основа развития средств автоматизации проектирования.**П.Мидла, М.Савиаук.** StaffLogic – программа оптимизации работы персонала по алгоритму колонии муравьев.**Р.Т.Феррейра.** Новые инструменты и результаты в исследовании обтекания сплошного конуса сверхзвуковым потоком.**В.В.Чеканин.** Развитие статистического метода для анализа экспериментальных данных с предельной точностью.**НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ****Д.А.Губайдуллин.** Проблемы механики сплошной среды (*Научный семинар и Итоговая научная конференция 2014 года, Казань, 2014–2015гг.*).**№2(44), т.21, 2015****М.С.Ел Нэйши.** Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса.**А.И.Гребенников.** Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей.**М.В.Левский.** Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата.**Р.П.Мошкин.** Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина.**С.С.Али.** Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью.**А.Г.Граппоне.** Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга.**Л.Лотеро, Э. дель Розарио, Г.-В.Вебер.** Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015).**НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ****Поздравление**

Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !

**PUBLISHED IN 2015****No.1(43), v.21, 2015****P.J.Werbos.** Links between consciousness and the physics of time.**D.DeTombe, G.-W.Weber.** Emerging field in operational research: methodology of societal complexity - with a note on operational research for development.**A.B.Bakhur.** Organizational - operational methodology as basis for development of automation means in designing.**P.Miidla, M.Saviauk.** StaffLogic – workforce scheduling with ants.**R.T.Ferreira.** New tools and results in the study of supersonic flow over a solid cone.**V.V.Chekanin.** Development of statistical method for experimental data analysis with ultimate accuracy.**SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION****D.A.Gubaidullin.** Problems of continuum mechanics (*Scientific Seminar and Final Scientific Conference '2014, Kazan, 2014-2015*).**No.2(44), v.21, 2015****M.S.El Naschie.** Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry.**A.I.Grebennikov.** Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method.**M.V.Levskii.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation.**R.P.Moshkin.** Poincare equations and elements of Li group theory in problems of Chaplygin sleigh motion.**S.S.Ali.** Optimization approach in closed loop green supply chain management.**A.G.Grappone.** Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization.**L.Lotero, E.del Rosario, G.-W.Weber.** Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015).**SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION****Congratulation**

A.Yu.Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS (IPMech RAS) — 50 !

## **Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry**

**M. S. El Naschie**

University of Alexandria,  
Alexandria, Egypt.

We give several simple derivations for the 96% volume concentration of Banach spaces based upon Dvoretzky's theorem as well as various other general theories including E-infinity. The results are interpreted in a "physical way" and related to the measurements of COBE, WMAP and type 1a supernova. It is concluded that the cosmological dark energy density of almost 96% is due to the phenomena of volume concentration at the surrounding boundary of the compactified Klein-Penrose holographic and projective linear Lie symmetry group boundary of our actual spacetime bulk which resembles a Banach-like convex spaces underpinning Dvoretzky's theorem. In addition we conjecture a deep relation between the exophysical Casimir effects and the endophysical dark energy. This leads naturally to an extension of the boundary of a boundary equal zero proposal of J.A. Wheeler to explain the observed accelerated expansion of our universe via the internal pressure due to the accumulation of dark energy at the ultimate one sided Möbius-like edge of our cosmos. The paper closes with reflection on the possible harnessing of Casimir-dark energy via nanotechnology.

*Key words:* dark energy; Banach space; Universe expansion.

### **1. Introduction**

The present work is really a bird's eye "synthesis", rather than simply a "view" of various fields of science bringing together results and theorems that at first sight may seem to be unrelated [1–62]. In the first instance our aim is to give logical, physical and mathematical arguments in support of the conjecture that the almost 96% dark energy density found in accurate cosmological measurements [33,34] leading to the COBE Nobel Prize and later on to the 2011 Nobel Prize in Physics for WMAP and type 1a supernova [33] may be understood in terms of geometrical measure concentration based on Dvoretzky's celebrated theorem [1–4]. However this situation could also be viewed as a consequence of E-infinity theory's dissection of Einstein's famous equation  $E = mc^2$  into a quantum particle part representing the measurable ordinary energy  $E(O) = mc^2$  and a second quantum wave part representing the dark energy which we cannot measure because of wave collapse  $E(D) = mc^2(21/22)$  where  $E(O) + E(D)$  are again equal to Einstein's miraculous formula [7]. In addition we feel strongly that the quantum wave endophysical energy [14–18] must be subtly related to the exophysical quantum vacuum Casimir wave energy [22–26] behind the exophysical Casimir effect [6][19–21]. The fact that ordinary energy of the quantum particle is related to a Renyi type of non-additive, in fact multiplicative entropy [23] while dark energy of the quantum wave is additive, gives additional insight supporting our conjecture [35–39]. Our somewhat ambitious investigation did not stop at that but moved on to link our result to Wheeler's boundary of a boundary is zero and extended it to mean that the edge of the boundary of the holographic boundary of our spacetime is an one sided empty set producing internal dark energy pressure which is responsible for the accelerated cosmic expansion. In other words we utilize the basic idea of the Casimir quantum wave effect of the vacuum and link it to the fact that the totally empty boundary of the universe is a one sided Möbius-like geometrical structure and contain only quantum wave dark energy to explain the so created internal pressure causing the surprising relatively recently observed acceleration of our universe.

The author fears it may sound immodest when he says that he would like to think of the present paper as a precursor into an era which may be christened post modernistic physics where sound mathematics and correct physics are one and the same thing. To that end we must admit that we perceive the following theorem from the field of persistent topology and simplification [61] as tantalizing.

**Theorem.**

There are no non-empty 3-cycles and no non-empty 3-boundaries so that  $Z_3 = B_3 = (\emptyset)$  and the boundary of a vortex is consequently empty. Noting how many galaxies in our universe are vortex-like, the reader will clearly see the connection.

The paper is organized as follows:

After this short but comprehensive introduction, we will introduce in Section 2 all that we need to carry out our analysis. Section 3 gives a detailed account of the derivation of the 96% measure concentration based on Dvoretzky's theorem. In Section 4 we give a somewhat unexpected derivation of dark energy density using Einstein's general relativity. Section 5 obtains the same results mentioned above using bosonic strings. Section 6 relates it all to the Weyl scaling of 'tHooft's renormalon. Section 7 sheds bosonic string light on dark energy. Section 8 shows the fallacy of any claim that our result could be numerical coincidence [54–57]. Section 9 ponders the deep relation between dark energy and Casimir energy as well as our extension of the Wheeler zero boundary proposal and its implications when linked to one sided Möbius-like geometry and finally Section 10 is the conclusion and outlook for possible technological harnessing of dark energy [6, 10, 19÷21].

## **2. A particle physics realistic conception of quantum entanglement, dimensional regularization, dark energy and Dvoretzky theorem**

### **2.1. E-infinity, noncommutative geometry and Hardy's quantum entanglement**

One of the most important results of modern quantum mechanics is undoubtedly Hardy's entanglement in which he calculated the quantum probability for entanglement using orthodox Dirac's quantum theory and found it to be exactly equal to the golden mean  $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$  to the power of five [37-39]. To appreciate the impact of this result on high energy physics and quantum cosmology one needs to subdivide it into three main steps. First Hardy's gedanken experiment and its exact solution using Dirac's formalism. Second to realize that the result of about 9% quantum probability for two quantum particle entanglement is really an approximation to the golden mean to the power of five. Third and finally to realize that this result can be inferred directly from the work of A. Connes and the present author on the noncommutative fractal Cantorian nature of quantum spacetime and that the building blocks of this Cantorian manifold are simply random Cantor set with a Hausdorff dimension equal to the golden mean to the power of  $n$  where  $-\infty \leq n \leq +\infty$  encompasses all natural integers. Seen that way Hardy's result  $P(\text{Hardy}) = \phi^5$  is a consequence of two Cantor-fractal 'points' correlated inside a Cantorian space made of infinitely many Cantor sets. The number of points in a single set is, on the other hand, uncountably infinite, i.e.  $\infty^\infty$  many points. Consequently the total number of points in this Cantorian space is

$$\left(\infty^\infty\right)^\infty + \infty\left(\infty^\infty\right) \quad (\text{Alef})^\infty. \quad (1)$$

Although the above symbolic equation is at first sight of no practical value and allows no real computation, it is extremely useful in finding a road to a practical computation as we will



demonstrate momentarily. Since the Hausdorff dimension of a single Cantor set living in zero topological Menger-Urysohn dimension is  $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$  and since the Hausdorff dimension in  $n$  dimension is given by von Neumann-Conne-El Naschie bijection-dimensional function equation [9,30]

$$D = a + b\phi \quad (2)$$

where  $a, b \in \mathbb{Z}$  and  $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$  and the E-infinity equivalent form

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{n-1} \quad (3)$$

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{n-1} = \phi \quad (4)$$

and the empty ( $n = -1$ ) set is

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{-1-1} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{-2} = \phi^2 \quad (5)$$

For two ‘particles’ in a single Cantor set the topological probability of ‘coinciding’, i.e. for entanglement is

$$P_1 = (\phi)(\phi) = \phi^2 \quad (6)$$

On the other hand for the space itself, we have a dimension

$$\langle d_c \rangle = \frac{1}{\phi(1-\phi)} = 4 + \phi^3 \quad (7)$$

and consequently an intrinsic probability of

$$P_2 = \frac{1}{\langle d_c \rangle} = \phi^3 \quad (8)$$

The joint probability is consequently

$$P(\text{total}) = (P_1)(P_2) = \phi^2(\phi^3) = \phi^5 \quad (9)$$

which is Hardy’s probability. Incidentally the above is the probability of finding a point in a fractal Witten M-theory [23,38] which is

$$D_F^M = 11 + \frac{1}{11 + \frac{1}{11 + \dots}} = 11 + \phi \quad (10)$$

That means [37,38]

$$P(\text{total}) = \frac{1}{D_F^M} = \frac{1}{11 + \phi^5} = \phi^5 \quad (11)$$

On that count alone one can see the importance and partial reality of Witten’s M-theory [23,38]. In addition and more importantly, we see that we have been following mathematical

logic with no weirdness at all. In other words quantum physics may well be unintuitive but it does not have a different logic because there is only one logic which is sound, namely the logic of mathematics.

## 2.2. Ordinary energy and dark energy as a result of quantum entanglement

It is not particularly difficult to see from the above that the share of each particle in the Hardy scenario must be  $\phi^5/2$  and that this can be extended to n number of dimensions. Thus for n dimensions the entanglement share would be  $\phi^5/n$ . This leads to a reduction of  $n - n(\phi^5/2)$  and it is the ratio between the non-entangled part to the complete set of dimensions which leads to a reduction factor equal to the dark energy density as will be reasoned in more detail later on. Thus we have [38-41]

$$\gamma(D) = \frac{n - (\phi^5/2)n}{n} = \frac{n - (1 - (\phi^5/2))}{n} = 1 - \left(\frac{\phi^5}{2}\right) = \frac{21+k}{22+k} \quad (12)$$

where  $k = 2\phi^5$ . As we never tire of reminding ourselves and the readers, the result is in full agreement with cosmic measurements and does not stand there as an idle fancy theory. It will be our aim to reason that  $\phi^5/2$  could be viewed as an entanglement messenger particle which we will call entanglion and that the renormalon k is made topological from such 4 entanglions. This k is the fixed perturbation parameter in the well known 'tHooft-Weltmann-Wilson dimensional regularization (renormalization) method, i.e.  $D = 4 - (\varepsilon = k)$  method [35]. In fact equation 12 shows even far more because it could be written as

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leq \frac{1}{(\gamma(O))} + \frac{1}{(\gamma(O))} \quad (13)$$

following Dunkerley theorem on multiple eigenvalue problems which was used in conjunction with the idea of phase locking and applied to quantum spacetime by the present author [58-60] as well as Slovenian mathematician L. Marek-Crnjac [58]. This then implies that there is a corresponding quantum Hamiltonian which is bounded from below and that this last equation (13) is a statement about the conservation of energy where the missing amount needed for the sign of equality is exactly equal to the dissipation involved. The good news of this immensely important and fundamental result is that our preceding dissection of  $E = E(O) + E(D)$  indicates squarely that we can have a dissipative dynamics, and in the sense of modern nonlinear dynamics, deterministic quantum mechanics in full agreement with the normed equation as well as the result obtained based on Dvoretzky's theorem [2]. Said in a different way, Cantorian-fractal quantum mechanics proposed by El Naschie and Ord as well as deterministic quantum mechanics proposed by Nobel Laureate G. 'tHooft [62] are in fact nothing but two sides of the same coin.

## 2.3. Dvoretzky theorem and E-infinity measure concentration

It is important now to discuss a vital question related to the way  $\gamma(\text{Dark})$  leading to  $E = \gamma(\text{Dark}) = mc^2 \cong mc^2(21/22)$  is distributed which is a subject closely connected to the essence of Dvoretzky's theorem and its implications [1-7]. To find out about that we need two additional pieces of information. First that Hardy's n entangled particles is given by [41]

$$P(\text{Hardy}) = P_L P_L = \phi^n \phi^4 = \phi^{n+3} \quad (14)$$

Second we need to know that the Klein-Penrose tiling is a fiber bundle manifold which represents the holographic boundary of our E-infinity Cantorian fractal space. Consequently the boundary of the boundary found by Wheeler long ago to a zero set can be logically extrapolated to the empty set of dark energy of the ultimate boundary at infinity of the holographic boundary followed by the totally empty set where the Menger-Urysohn dimension starts with minus one and a corresponding Hausdorff dimension  $\phi^2$  and ends with a Menger-Urysohn topological dimension equal minus  $\infty$  and an absolute zero as the corresponding Hausdorff dimension. In the middle of our holographic boundary on the other hand, the Menger-Urysohn dimension is zero while the Hausdorff dimension is  $\phi$ . The ultimate boundary of our universe is thus one sided, having an inside but not outside like a Möbius strip. The union of both dimensions for both relevant parts is thus

$$0-1=-1 \quad \text{and} \quad \phi^2 + \phi = 1. \quad (15)$$

By contrast the intersection leads to  $(-1)(0)=0$  and  $\phi^2\phi=\phi^3$ . This way we are led to a Bernoulli process  $(1, 0)$  as well as an anti-Bernoulli process  $(1, 0, -1)$  like in the spiral model of G. Ord and the Hausdorff of these processes is simply a fractal  $\phi^3$  inversely corresponding to a spacetime Hausdorff dimension equal  $1/\phi^3 = 4 + \phi^3 = 4.23606799$ . From the above we see that dark energy is concentrated at the surface of our spacetime Cantorian manifold at infinity which explains why the splitting of Einstein's formula into ordinary energy  $E(O) = mc^2/22 + k$  and dark energy  $E(D) = mc^2(21 + k/22 + k)$  is not observed except when we observe and measure the entire universe, i.e. endophysically as is the case with COBE, WMAP and the Planck measurements and in contrast to the Casimir experiments as well as the conventional local tests of special relativity theory [33–39].

The preceding arguments for the concentration of dark energy may seem slightly over the top and contrived for those readers not familiar with E-infinity nor fractals. However we assure the reader that there are watertight mathematical theorems which assert what follows:

**Theorem.**

Ninety six percent of the volume of a spherical ball of sufficiently high dimensionality is concentrated at the surface of the sphere [1–4].

In the next section we will demonstrate the correctness of the above assertion using two different lines of mathematical reasoning.

### 3. Measure theoretical derivation of the volume concentration implied by Dvoretzky's theorem.

#### 3.1. Conventional derivation

We begin with the Euclidean ball. Using conventional notation [1–4] we have

$$B_2^n = \left\{ x \in \square^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}. \quad (16)$$

In this case the volume is given by the well known formula [1–4, 6]

$$\text{vol}(n) = \frac{(\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (17)$$

Here  $\Gamma$  is the generalization of the factorial function ( $n!$ ) to non-integer and  $n$  is the dimension. For large  $n$  we can use the Stirlings approximation formula and find the volume to be roughly given by [1-4]

$$\text{vol}(n) = \left( \sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \right)^n. \quad (18)$$

Note that a sphere of radius  $r = 1$  is the surface of the ball and denoted  $S^{n-1}$  and that the value of  $r$  given above is rather unexpectedly in fact counter intuitively large. This shows that within the realm of high dimensional geometry and topology, intuition can be quite misleading [1-4]. Our next task is to look at the distribution of the mass of the ball. For this purpose we have to estimate first the  $n-1$  dimensional volume of a slice at the center of the ball of volume 1 where the ball radius is given by [1-4]

$$r = \frac{1}{\sqrt{\text{vol}(n)}}. \quad (19)$$

Thus the slice is an  $n-1$  dimensional ball of the above radium and a volume given approximately using again Stirling's formula for large  $n$ , to be [1-4]

$$\text{vol}(n-1)r^{n-1} = \sqrt{e}. \quad (20)$$

Consequently the  $n-1$  dimensional volume of the parallel slices at distance  $x$  from the center is a  $n-1$  dimensional ball whose radium is  $\sqrt{r^2 - x^2}$  and therefore the volume of the smaller slices is approximately given by

$$\text{vol}(1) = \sqrt{e} \exp(-\pi e x^2). \quad (21)$$

Projecting into a single direction one finds the Gaussian (gamma-like) distribution which we investigated in previous publications on COBE and sphere packing [37-39]. The variance of this distribution is again surprisingly independent of  $n$  and given by  $\text{var} = (1/2\pi e)$ . It is definitely counter intuitive but true that although the radius of a ball of volume equal 1 grows according to  $\sqrt{n}/(2\pi e)$  almost all this volume is within a slab of certain width [1-4]. In particular and using the previous equation, one can see that for the slab given by [1-4]

$$\left\{ x \in \square^n : -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (22)$$

about 96 percent of the volume of balls of different dimensions is concentrated within this slab. This is easily shown explicitly by evaluation  $\text{vol}(1)$  for  $x = 1/2$  then multiplying with the volume of the five dimensional ball. Inserting  $x = 1/2$  one finds [1-4]

$$\text{vol}(1) = (1.64721281)(0.11825244) = 0.194786946 \quad (23)$$

and

$$\text{vol}(1)\text{vl}(B_5) = \text{vol}(1)(4.9348) = 0.96123 \cong 96\% \quad (24)$$

which proves our main assertion.

### 3.2. Short derivation of volume concentration using E-infinity

The preceding approximation could easily be made exact using the method of transfinite correction of E-infinity theory [9,13]. It is easily seen that the following transformation is the required one, namely [9,13][35-39]

$$\text{Vol}(1) \rightarrow \left(\frac{1}{\phi}\right) \left(\frac{k+1}{10}\right) \quad (25)$$

when

$$\sqrt{e} \rightarrow \frac{1}{\phi} \quad (26)$$

and

$$\exp(-\pi e x^2) \rightarrow \frac{(k+1)}{10} . \quad (27)$$

Consequently

$$(5)(\text{Vol}(1)) \Rightarrow \left(\frac{5\phi^2}{2}\right) = \frac{(21+k)}{(22+k)} . \quad (28)$$

This is the exact value for dark energy density found previously using a variety of methods [36-39].

### 4. Dark energy density from the basic mathematical structure of general relativity

It may come as a slight surprise that we could determine the ordinary energy density of the cosmos directly from the basic mathematical formulation of the general theory of relativity [19-54]. To do that we start from twice the number of components of the Riemannian tensor in four dimensions. These are given by  $(4)^4 = 256$  and therefore we have [53-54]

$$N = (2)(256) = 512 \quad (29)$$

This is a number which is comparable to  $|E8 E8| = 496$  of superstring theory [8,9] as well as 528 of Witten's 5-D Branes model in eleven dimensions [45-48] and the 504 of Heterotic superstring theory [45]. Now to derive  $E = mc^2$  Einstein used a 4D spacetime so that we are left with  $26 - 4 = 22$  bosonic string dimensions. These 22 have to be weighted against the 512 minus 20 dimensions representing the degrees of freedom of the vacuum or pure gravity for  $D = 8$  super space. Consequently we are left with [45-48]

$$N(\gamma) = 512 - (20 + 8) = 484 \quad (30)$$

dimensions or quasi degrees of freedom. The ratio constituting the Lorentz factor or equivalently the energy density and is given therefore by [45-48]

$$\gamma = \frac{26 - 4}{512 - (20 + 8)} = \frac{22}{484} = \frac{1}{22} = 0.04545 \quad (31)$$

exactly as expected. We note on passing that  $|E8 E8| = 496$  is also equal to the dimensionality of a second order anti-symmetric tensor and  $SU(32)$  given by



$$d(\psi i \dots, i = 2) = \frac{32!}{2!(32-2)!} = \frac{(32)(32)}{2} = 496 \quad (32)$$

In other words we have [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 496 \quad (33)$$

while for the corresponding symmetric case we have [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 528 \quad (34)$$

This last value gives us the number of killing vector fields for  $n = 32$ , i.e. the maximal central charge and matches exactly Witten's model [46]

$$N_K^{(11)} = \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{5} = 11 + 55 + 462 = 528 \quad (35)$$

### 5. The exact limiting integer value of the total dark energy density from critical Bosonic strings dimensionality

The following analysis to obtain an integer dark energy density which is exactly equal to that found from the integer master equation [6,7][54,55]

$$\sum_1^4 \bar{\alpha}_i = 100 \quad (36)$$

is quite interesting from several aspects. In particular the limit taking for  $k \rightarrow 0$  is noteworthy. We recall that in Bosonic string theory we have two critical spacetime dimensions for a ghost free theory. These are  $D = 26$  and  $D = 25$ . The corresponding transfinite values are obviously  $D = 26 + k = 26.18033989$  and  $D = 25 + k = 25.18033989$  where  $k = \phi^3(1-\phi^3)$  is 'tHooft's renormalon. Nothing that in both cases  $D = D(\text{Einstein}) = 4$ , we clearly see that  $\gamma(D)$  of total dark energy, i.e. both dark energy and dark matter is given by [54-55]

$$\gamma(D) = \frac{(25+k)-4}{(26+k)-4} = \frac{21+k}{22+k} \quad (37)$$

which is the exact transfinite value. To obtain the normal integer ratio we simply put  $k = 0$  and find the previously established known value

$$\gamma(D) = \frac{21}{22} = 0.954545 = 95.45\% \quad (38)$$

However there is a more subtle way of obtaining not only an integer ratio but the exact integer value  $\gamma(D) = 96$  which is consistent with the normed master equation

$$\sum_1^4 \bar{\alpha}_i - D^{(4)} = 100 - 4 = 96\% \quad (39)$$

To do that we do not subtract  $D(4)$  from our  $\gamma(D)$  ratio and write

$$\gamma(D) = \frac{25+k}{26+k} = 0.9618033989 \quad (40)$$

In other words we have

$$\gamma(D) = 0.96 + \frac{k}{(10)^2} \quad (41)$$

Letting now  $k \rightarrow 0$  one finds

$$\gamma = 0.96 = 96\% \quad (42)$$

in full agreement with the normed equation as well as the result obtained based on Dvoretzky's theorem [2]. In fact we could apply a number theoretical anatomy to the norm

$$\sum_1^5 \gamma_1 = 1 + 3 + 22 + 74 = \sum_1^4 \gamma_1 = 4 + 22 + 74 \quad (43)$$

and notice that it may be written in terms of prime numbers

$$\sum_1^5 \gamma_i = 1 + 3 + 2(11) + (2)(37) \quad (44)$$

where  $1 + 3 + 11 + 37 = 52$  and the exceptional Lie symmetry group dimension is exactly equal  $|F4| = 52$ . Taking the transfinite exact value  $52 + k = 52.3606799$  into consideration the entire number theoretical cosmic symphony becomes visible.

## 6. The renormalon sequence

In what follows we will analyse the up scaling, i.e. the quasi integration of 'tHooft's normalon  $(k = \phi^3(1 - \phi^3))$ .

$$(k) \left( \frac{1}{\phi} \right)^n \quad \begin{array}{ll} \underline{n=1} & 0.18033 = k \\ \underline{n=2} & 0.29179 \\ \underline{n=3} & 0.472135 \\ \underline{n=4} & 0.7638320334 \\ \underline{n=5} & 1 + \phi^3 \\ \underline{n=6} & 2 \text{ World sheet} \\ \underline{n=7} & 3 + \phi^3 \text{ Fractal 3D space} \\ \underline{n=8} & 5 + \phi^3 \text{ Fractal Kaluza-Klein} \\ \underline{n=9} & 8.47... \\ \underline{n=10} & \overline{\alpha_0} / 10 \\ \underline{n=11} & 2 / \phi^5 = (2)(11 + \phi^5) \\ \underline{n=12} & \frac{SL(2,7) + R^{(8)} + 16k}{D^{(10)}} = 35.888544 \end{array} \quad (45)$$

where  $\overline{\alpha_0}$  is the inverse electromagnetic fine structure constant,  $2(11+\phi^5)=22+k$  is the inverse ordinary energy density of the cosmos,  $R^{(8)}=20$  are the degrees of freedom of Einstein's super symmetric vacuum in  $D=8$  dimensions or pure gravity and 358.88544 are the compactified degrees of freedom of the holographic boundary plus the 20 of Einstein's pure gravity which is numerically equal to  $R^{(4)}=20$ , namely the number of independent components of the Riemannian tensor in  $D=4$ . The reader can see that there is really an impressive wealth of interconnectivity in the above which is equally simple and mind boggling.

### 7. The Bosonic strings light to dark energy

It seems that string theory has an inbuilt mathematical sensor that anticipates the existence of two different types of spacetime containing different types of energy. This is definitely an unexpected interpretation of some facts well known to everyone familiar with the initial development of string theory [45, 46]. The point is that Bosonic strings have not only one crucial dimension which precludes negative norm but two [45]. This first is the familiar  $D=26$  for which the Love Lace conditions [45] vanishes identically, provided the intercept  $a$  is equal unity ( $a=1$ ). However there is also a well known second alternative condition, namely [45]  $D \leq 25$  and  $a \leq 1$ . Thus the maximal dimensions possible without introducing unphysical states is  $D=26$  and  $D=25$ . It is the interplay between these two curled dimensions and the four visible Einstein spacetime dimension  $D=4$  which corresponds to the two fundamentally different types of energy densities discovered by COBE, WMAP as well as type 1a supernova cosmic measurements and analysis leading to the 2011 Nobel Prize in Physics [33-39].

In a nutshell Einstein's  $E=mc^2$  is based on  $D=4$ . However we also have  $D=26$  and  $D=25$  which were not known at Einstein's time and consequently the 'real' energy which is measured in 4D is a subset of the part of energy connected to  $D=26$  and  $D=25$ . The exact energy density must therefore be

$$\gamma(O) = \frac{1}{26-4} = \frac{1}{22} = 4.5\% \quad (46)$$

and

$$\gamma(D) = \frac{25-4}{26-4} = \frac{21}{22} = 95.5\% \quad (47)$$

where

$$\gamma(O) + \gamma(D) = \frac{1}{22} + \frac{22}{22} = 1 = \gamma(Einstein) \quad (48)$$

Within the above integer theory we could also estimate pure dark energy to be equal to the ratio of the 25 curled dimensions minus the 6 dimensions of a Calabi-Yau manifold to the larger curled dimension 26. Thus, and without going into the detailed elaboration, the pure dark energy density is given by

$$\gamma(D - pure) = \frac{25-6}{26} = \frac{19}{26} = 73\% \quad (49)$$

in fair agreement with measurements. Before moving to the next section let us give briefly the mathematical physics behind the existence of the two curled dimensions. This is all contained in the following condition [8,45]

$$\langle \theta | \theta \rangle = \frac{2}{25} a^2 (D-1)(26-D). \quad (50)$$

Thus the dimension of spacetime cannot exceed 26 or else negative norm states will exist as part of the physical states. In general we find that the spacetime of string theory is ghost-free if the dimensions of spacetime are less than or equal to 26. That means [45]

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad D = 26, \\ a &\leq 1, \quad D \leq 25. \end{aligned} \quad (51)$$

### **8. The almost zero probability that $\gamma(O) = 0.045$ and $\gamma(D) = 0.955$ may be numerical coincidence**

Some members of the voluntary opposition to any truly new idea or discovery are never tired of invoking the cheap accusation of numerology whenever it serves their agenda. The present theory did not escape these ‘slings and arrows’. However it is really relatively easy and in fact trivial to sweep these cheap shots completely away without huffing or puffing. Our argument goes as follows:

1. First our result is in complete accordance with experiments and observations. We can point to at least 4 major experimental collaborations arriving at practically the same conclusions, namely COBE, WMAP, type 1a supernova and Planck. If there is a 50% chance that any of the four experiments are flawed then the total probability that all of them are flawed is theoretically no more than 6.25%.
2. Considering the theoretical derivation we have the following situation. For almost three years now we have applied at least 25 different theories and distinct methods ranging from the ad hock to the mathematically pure and found almost the exact result in full agreement with measurements and observations. Again assuming a 50% chance that any of these results are flawed then we have a maximal probability of (0.5) to the power of 25, i.e. a probability of  $(2.9)(10)^{-8}$  that our result is a mistake or pure numerical coincidence.
3. Taking the final result of actual measurement and theoretical derivation, the maximal chance of error or numerical coincidence is  $(0.0625) (2.9)(10)^{-8} @ (1.86)(10)^{-9}$ , that is to say smaller than the diameter of a hydrogen atom measured in centimetres and taken as a pure number.

### **9. Ordinary energy and dark energy are radically different at the limit of infinitely many dimensions**

If we are to compare Casimir effect with dark energy then we must keep two vital facts in mind all the time. First the basic foundation of both types of energy is exactly the same, namely the supposedly empty vacuum [10,11,21] and second the disparity of the order of magnitude is horrendous and truly astronomical. For these reasons it is vital that we look at the  $n \rightarrow \infty$  limit of ordinary energy density  $\gamma(O)$  and dark energy  $\gamma(D)$  where  $n$  is the formal number of dimensions of Cantorian spacetime [6–9]. Thus we have a radically different limit, namely [6-9]

$$\gamma(O) = \frac{\phi^n}{2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{zero} \quad (52)$$

while

$$\gamma(D) = \frac{n\phi^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{infinity.} \quad (53)$$

Here we have ignored the fact that we have an intrinsic  $\phi^3$  for spacetime itself as irrelevant or not comparing  $\gamma(O)$  with  $\gamma(D)$  in the limit of  $n \rightarrow \infty$ . In other words there is a real chance that at the boundary of the universe volume concentration and holography can produce a vastly large energy density out of the feeble Casimir effect at our low dimensional ‘laboratory’ space and time where all Casimir experiments were conducted so far. In fact if we take  $5 + \mathcal{F}^3$ , i.e. the fractal Kaluza-Klein dimensionality instead of 5 in  $g(D)$  then dark energy would attain a maximum equal to Einstein’s energy density because [22–32]

$$\gamma_F(D) = (5 + \phi^2)(\phi^2)/2 = (5\phi^2/2) + (\phi^5/2) = \gamma(D) + \gamma(O) = 0.954545 = 1 \quad (54)$$

This shows the incredible role of the fine structure of a Cantorian-fractal spacetime. However we have to admit that on its own alone, this does not explain why we can measure the feeble Casimir energy directly but can reason the existence of dark energy only indirectly although both energies are due to quantum wave phenomena [6,9,21].

## 10. Conclusion

In the present work we argue using a host of different fundamental theories including string theory, general and special relativity and foremost the volume concentration phenomena based on Dvoretzky’s celebrated theorem that [2]:

1. The almost 96% dark energy density found in cosmological measurements and observations may be understood as a geometrical reflection of volume measure concentration or equivalently as the kinetic energy of the supposedly energyless quantum wave.
2. Dark energy which is an endophysical phenomena encompassing the entire universe may have its local exophysical manifestation in the Casimir energy. Consequently if this is true and we think it is true, then we would have at long last found the real scientific way to infinite free energy rivalling the scientific dreams of N. Tesla but without crossing the line between fact and fiction.
3. The boundary of a boundary equal zero idea propagated by J.A. Wheeler has found in the present work a sweeping extension leading to the conclusion that the boundary of our universe is layers of empty sets ending with an absolute empty set which is one sided in a way not dissimilar to a Möbius strip. That way the Casimir-like dark energy exerts a single force causing pressure from the inside not balanced by anything of the nonexistent outside and consequently producing the negative gravity behind the observed accelerating cosmic expansion.
4. The rationale behind the mechanism creating the boundary of a boundary with an absolute empty boundary may be understood in an elementary way which is effectively classical in the following way: Recalling that the Casimir energy density is the difference between the constrained energy density within the two Casimir plates of its original gedanken experiment, as well as actual test and the free energy density of the entire space outside the two plates, then we could see the total dark energy of the universe is corresponding to the constrained energy while the outside free energy density is now an absolute zero of the absolute empty set of the last boundary of a boundary. Consequently in a classical mechanical limit the Casimir energy will be zero and therefore we will not measure Casimir energy nor



dark energy. However we could infer the existence of this energy from the increased rather than decreased acceleration more or less as argued in the previous point No. 3. Thus in principle the dream of free energy is theoretically well justified and experimentally partially established. What is still required is considerable technological effort and innovation presumably via nanotechnology.

### References

1. Y. Godon. Gaussian processes and almost spherical sections of convex bodies. *Annals of Probability*, 16(1), 1988, pp. 180–188.
2. A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proceedings International Symposium on Linear Spaces*, Jerusalem. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, Israel, 1960.
3. T. Figiel, J. Linden Strauss and V. Milman. The dimension of almost spherical section of convex bodies. *Bulletin American Mathematical Society*, 82(4), 1977, pp. 575–578.
4. T. Figiel. A short proof of Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, 33(3), 1970, pp. 207–301.
5. J.P. May. E-infinity ring spaces and E-infinity spectra. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Germany 1977.
6. Mohamed S. El Naschie. Casimir-like energy as a double Eigenvalues of quantumly entangled system leading to the missing dark energy density of the cosmos. *International Journal of High Energy Physics*, 1(5), 2014, pp. 55-63.
7. Mohamed S. El Naschie. From  $E = mc^2$  to  $E = mc^2/22$  – A short account of the most famous equation in physics and its hidden quantum entanglement origin. *Journal of Quantum Information Science*, 4, 2014, pp. 248-291.
8. M. Kaku. *Introduction to Superstrings and M-theory*. Springer, New York (1999).
9. M.S. El Naschie. A review of E-infinity and the mass spectrum of high energy particle physics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19, p. 209-236 (2004).
10. R. Lomas. *The Man Who Invented The Twentieth Century*. First published by Headline Book Publishing 1999. This edition is by QCS e-Books 2011.
11. J. Schwinger. Casimir energy for dielectrics. *Proceedings of the National Academy of Science*, Vol. 89(9), 1992, pp. 4091-4093.
12. O.E. RöSSLer. *Endophysics*. World Scientific, Singapore, 1998.
13. M.S. El Naschie. On a general theory for quantum gravity. In 'Science of the Interface. Editor H. Diebner, T. Druckrey and P. Weibel. Genista Verlag, Tübingen, Germany, 2001.
14. O.E. RöSSLer. Boscovich's observer-centered explanation of the nonclassical nature of reality. In *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, Joensuu, Aug.13-17, 1990 (K.V. Laurikainen, org.), Extended Abstracts, pp.153-156. Turku. Report Series, Publications of the Department of Physical Sciences, University of Turku 1990.
15. O.E. RöSSLer. A possible explanation of quantum mechanics. In "Advances in Information Systems Research" (G.E. Lasker, T. Koizumi and J. Pohl, eds.), pp. 581–589. Windsor: The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics 1991, pp. 581–589.
16. O.E. RöSSLer, *Endophysik. Die Welt des inneren Beobachters* (ed. by Peter Weibel). Berlin. Merve Verlag, 1992.
17. O.E. RöSSLer and J.O. RöSSLer. The endo approach. *Applied Mathematics & Computation* 56, 281–287 (1994).
18. O.E. RöSSLer and M.S. ElNaschie. Interference through causality vacillation. In. *Symposium on the Foundations of Modern Physics 94*, Helsinki, June 13–16, 1994

(T. Hyvönen, org.), Extended Abstracts, Turku. Report Series Publication of the Department of Physical Sciences, University of Turku, 1994.

19. A. Wilson, C. Johansson et al. Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit. *Nature*, Vol. 479(7373), 2011, pp. 376–379.

20. R. Caldwell. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super negative equation of state. *Physics Letters B*, Vol. 45(1-2), 2002, pp. 23–29.

21. J. Cugnon. The Casimir effect and the vacuum energy-duality in the physical interpretation. *Few-Body Systems*, Vol. 53(1-2), 2012, pp. 181–188.

22. M.S. El Naschie. A topological Magueijo-Smolín varying speed of light theory, the accelerated cosmic expansion and the dark energy of pure energy. *Applied Mathematics*, Vol. 5, 2014, pp. 1780–1790.

23. M.S. El Naschie. Cosmic dark energy from ‘tHooft’s dimensional regularization and Witten’s topological quantum field pure gravity. *Journal of Quantum Information Science*, vol. 4(2), 2014, pp. 83–91.

24. M.S. El Naschie. Logarithmic running of ‘tHooft-Polyakov monopole to dark energy. *International Journal of High Energy Physics*, vol. 1(1), 2014, pp. 1–5.

25. M.S. El Naschie. The quantum gravity Immirzi parameter – A general physical and topological interpretation. *Gravitation and Cosmology*, Vol. 19(3), 2013, pp. 151–155.

26. M.S. El Naschie. To dark energy theory from a Cosserat-like model of spacetime. *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, vol. 20(1-41), 2014, pp. 79–98.

27. M.S. El Naschie. The theory of Cantorian spacetime and high energy particle physics (An informal review). *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 41(5), 2009, pp. 2635–2646.

28. M. S. El Naschie, S. Olsen, J. H. He, S. Nada, L. Marek-Crnjac, A. Helal. On the need for fractal logic in high energy quantum physics. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, Vol. 1(3), 2012, pp. 84-92.

29. Mohamed S. El Naschie. A Rindler-KAM spacetime geometry and scaling the Planck scale solves quantum relativity and explains dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 483-493.

30. A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, USA, 1994.

31. M.S. El Naschie. From classical gauge theory back to Weyl scaling via E-infinity spacetime. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 38, 2008, pp. 980-985.

32. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie’s E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 18(1), 2003, pp. 125-133.

33. S. Perlmutter et al. Supernova Cosmology Project Collaboration. “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernova”. *Astrophys. J.* Vol. 517, pp. 565 – 585. *Astro-ph/9812133*, 1999.

34. R. Panek. Dark Energy: The Biggest Mystery in The Universe. *The Smithsonian Magazine*. <http://www.smithsonianmagazine.com/science-nature/Dark-Energy-April, 2010>.

35. Mohamed S. El Naschie. On a new elementary particle from the disintegration of the symplectic ‘t Hooft-Veltman-Wilson fractal spacetime. *World Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 4(4), 2014, pp. 216–221.

36. Mohamed S. El Naschie. Pinched material Einstein space-time produces accelerated cosmic expansion. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 4(1), 2014, pp. 80–90.

37. M. A. Helal, L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. The three page guide to the most important results of M. S. El Naschie’s research in E-infinity quantum physics and cosmology. *Open Journal of Microphysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 141-145.

38. L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. An invitation to El Naschie's theory of Cantorian space-time and dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 464–471.
39. Mohamed S. El Naschie. A Unified Newtonian-Relativistic Quantum Resolution of the Supposedly Missing Dark Energy of the Cosmos and the Constancy of the Speed of Light. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 2(1), 2013, pp. 43–54.
40. Jean-Paul Auffray. E-Infinity dualities, discontinuous spacetimes, Xonic quantum physics and the decisive experiment. *Journal of Modern Physics*, Vol. 5(15), 2014, pp. 1427–1436.
41. Mohamed S. El Naschie. Quantum entanglement as a consequence of a Cantorian micro spacetime geometry. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 1(2), 2011, pp. 50–53.
42. L. Amendola and S. Tsujikawa. *Dark Energy. Theory and Observations*. Cambridge University Press, Cambridge 2010.
43. M.S. El Naschie. A resolution of the cosmic dark energy via quantum entanglement relativity theory. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 3(1), 2013, pp. 23–26.
44. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.
45. M. Kaku. *Strings, Conformal Fields and M-Theory*. Springer, New York, USA, (2000).
46. M. Duff. *The world in eleven dimensions*. IOP Publishing, Bristol, UK. (1999).
47. Mohamed S. El Naschie. Nash embedding of Witten's M-theory and the Hawking-Hartle quantum wave of dark energy. *Journal of Modern Physics*, Vol. 4(10), 2013, pp. 1417–1428.
48. Mohamed S. El Naschie. Entanglement of E8E8 exceptional Lie symmetry group dark energy, Einstein's maximal total energy and the Hartle-Hawking no boundary proposal as the explanation for dark energy world. *Journal of Condensed Matter Physics*, Vol. 4(2), pp. 74–77, 2014.
49. W. Rindler. *Relativity (Special, General and Cosmological)*. Oxford University Press, Oxford. 2004.
50. T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge. Revised Edition. 2010.
51. J.B. Hartle. *Gravity. An Introduction To Einstein's General relativity*. First Edition. Pearson Education Ltd., Einbrugh Gate, Harlow, Essex, England, 2003.
52. M. Tegmark. *Our Mathematical Universe*. Allen Lane, Penguin Books, London 2014.
53. E. Gourgoulhon. *Special Relativity in General Frames*. Springer, Berlin, 2013.
54. Ting Zhong. From the numeric of dynamics to the dynamics of numeric and visa versa in high energy particle physics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 2009, pp. 1780-1783.
55. M.S. El Naschie. On the vital role played by the electron-volts units system in high energy physics and Mach's principle of 'Denkokonomie'. *Chaos, Solitons & Fractals*, 28, 2006, pp. 1366-1371.
56. M.S. El Naschie. The unreasonable effectiveness of the electron-volt units system in high energy physics and the role played by  $\bar{a}_o = 137$ . *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(2), 2006, pp. 119-128.
57. L. Marek-Crnjac. A short history of fractal Cantorian spacetime. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(5), 2009, pp. 2697–2705.
58. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 18(1), 2003, pp. 125–133.
59. M.S. El Naschie. The brain and E-infinity. *International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 7(2), 2006, pp. 129–132.

60. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.
61. H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete and Computational Geometry*, 28(4), 2002, pp. 511–533.
62. M. S. El Naschie. Deterministic quantum mechanics versus classical mechanical indeterminism. *International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 8(1), 2007, pp. 1–10.

**Mohamed S. El Naschie**, Dr., Prof. He was born in Cairo, Egypt in 1943. In 2012 he ran for the Presidency of Egypt. Between these two important dates he went to Germany where he received his high school and University education in Hannover. After attaining a Diploma in structural engineering and working for a few years as a consulting engineer, he moved to the UK where he obtained a Doctor of Philosophy from University College, London in 1974 under the supervision of Prof. J.M.T. Thompson, FRS and became a member of the Stability Research Group founded by Lord Henry Chilver. Subsequent important stations in his career are a full professorship in Kind Saud University, a Visiting Professor in Cornell and a Senior Visiting Professor and Scholar in the University of Cambridge. At a seminal point of time he was associated with Nobel Laureate Ilya Prigogine, Sir Herman Bondi and Prof. S. Al Athel, Minister of Science of Saudi Arabia. In his long research career Prof. El Naschie published more than a thousand papers and articles in engineering sciences, mathematics, theoretical physics, cosmology, political science, history and art and had at one time or another his own weekly TV science program on Egyptian TV and a daily column in *Rose Al-Youssef*. Prof. El Naschie was a long time scientific advisor to the Egyptian and Saudi Arabian governments. Prof. El Naschie is acknowledged as one of the three pioneers of fractal spacetime theory along with Garnet Ord and Laurent Nottale and is the creator of the physical E-infinity theory of high energy physics. He was honoured for his achievements in Arabia, Germany and the USA. He was elected a Fellow of the Institute of Physics in the U.K. and was honoured in Germany by the bestowal of the title of Distinguished Fellow of the Frankfurt Association for the Advancement of Fundamental Research, Johann Wolfgang Goethe University, Frankfurt. He presently works on the development of zero vacuum point energy reactors to utilize and amplify spacetime topological effects such as the Casimir effect and dark energy. El Naschie has recently given a new insightful interpretation of  $E = mc^2$  of Einstein where it was shown to have quantum roots, namely  $E = mc^2/22$  and  $E = mc^2(21/22)$ .

## Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса

М. С. Ел Нэйши

Университет Александрии,  
Александрия, Египет

Приводятся несколько простых выводов для 96% объемной концентрации Банаховых пространств на основе теоремы Дворецкого, а также различных других общих теорий, включая Е-бесконечность. Результаты интерпретируются с точки зрения физики и связаны с измерениями COBE, WMAP и сверхновой типа 1a. Делается вывод о том, что космологическая плотность темной энергии, равная практически 96%, связана с явлениями объемной концентрации на окружающей границе компактифицированной Клейна–Пенроуза голографической и проективной линейной границы группы симметрии Ли нашего реального пространства-времени, напоминающего подобные Банаховым выпуклые пространства, на которых основана теорема Дворецкого. Кроме того, предполагается глубокая связь между экзофизическими эффектами Казимира и эндофизической темной энергией. Следовательно, можно использовать предположение Дж.А. Уилера (J.A. Wheeler) о границе границы для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения нашей Вселенной при помощи внутреннего давления за счет накопления темной энергии на самой дальней границе односторонней границы (по аналогии с геометрией типа Мебиуса) нашего космоса. В заключение автор высказывает мысль о возможном использовании темной энергии через нанотехнологии.

*Ключевые слова:* темная энергия; Банахово пространство; расширение Вселенной.

### 1. Введение

Данная работа представляет собой обобщение различных областей науки, результатов и теорем, которые на первый взгляд кажутся несвязанными [1–62]. Прежде всего, нашей целью является логическое, физическое и математическое доказательство того, что почти 96% плотности темной энергии, установленной точными космологическими измерениями [33, 34] (приведшими к Нобелевской премии за результаты COBE и также к Нобелевской премии 2011 г. за результаты для WMAP и измерений сверхновой типа 1a [33]). Это может объясняться с точки зрения концентрации с геометрической мерой на основании известной теоремы Дворецкого [1–4]. Однако эту ситуацию можно рассматривать и как следствие (из теории Е-бесконечности) разложения для известного уравнения Эйнштейна  $E = mc^2$  на часть, соответствующую квантовой частице, представляющую измеримую обыкновенную энергию  $E(O) = mc^2$ , и на часть, соответствующую квантовой волне, представляющую темную энергию, которую невозможно измерить из коллапса волны  $E(D) = mc^2(21/22)$ . Здесь  $E(O) + E(D)$  опять соответствуют удивительной формуле Эйнштейна [7]. Кроме того, представляется весьма вероятным, что эндофизическая энергия квантовой волны [14–18] должна быть как-то связана с экзофизической волновой энергией Казимира квантового вакуума [22–26], положенной в основу экзофизического эффекта Казимира [6, 19–21]. Тот факт, что обыкновенная энергия квантовой частицы связана с неаддитивной мультипликативной энтропией типа Реньи [23], в то время как темная энергия квантовой волны является аддитивной, дает дополнительное подтверждение нашего предположения [35–39]. Мы не стали на этом останавливаться и решили связать наш результат с границей нулевой

границы Уилера (Wheeler) и на ее основе предположили, что ребро (edge) границы голографической границы нашего пространства-времени является односторонним множеством, генерирующим внутреннее давление темной энергии, отвечающее за ускоренное расширение космоса. Другими словами, мы используем основную идею Казимира о квантовом волновом эффекте вакуума и связываем ее с тем фактом, что полностью пустая граница Вселенной – это односторонняя геометрическая структура типа Мебиуса, содержащая только квантовую волновую темную энергию, для того, чтобы объяснить полученное таким образом внутреннее давление, вызывающее наблюдаемое ускорение нашей Вселенной.

Автор опасается, что может показаться нескромным то, что он считает данную работу предшественником эры, которую можно назвать постмодернистской физикой, в рамках которой обоснованный математический аппарат и корректная физика – это одно и то же. В связи с этим мы признаем, что считаем следующую теорему из области топологии и упрощение [61] привлекательными.

### **Теорема.**

Не существует непустых 3-мерных циклов и непустых 3-мерных границ, так что  $Z_3 = B_3 = (\emptyset)$ , следовательно, граница вихря пустая. Отмечая, как много Галактик нашей Вселенной напоминают вихри, читатель сразу поймет связь.

Статья организована следующим образом:

После короткой, но содержательной, вступительной части представлен раздел 2, в котором содержится все необходимое для выполнения анализа. В разделе 3 приводятся подробные рассуждения о выводе 96-процентной концентрации с мерой на основе теоремы Дворецкого. В разделе 4 приводится в некоторой степени неожиданный вывод плотности темной энергии при помощи общей теории относительности Эйнштейна. В разделе 5 получены те же результаты, что и упомянутые, при помощи бозонных струн. В разделе 6 это всё связывается с вейлевским масштабированием ренормалона 'т Хоофта ('t Hooft). В разделе 7 на основе бозонных струн приводятся разъяснения по теории темной энергии. В разделе 8 показана ошибочность любого заявления о том, что наш результат может быть численным совпадением [54–57]. В разделе 9 обсуждается глубокая связь между темной энергией и энергией Казимира, а также рассматривается наше предложение о распространении предположения Уилера о нулевой границе и его последствия в связи с односторонней геометрией типа Мебиуса. Наконец, в разделе 10 даны выводы и перспективы возможной технологии использования темной энергии [6, 10, 19–21].

## **2. Реалистическое представление о квантовой запутанности, размерной регуляризации, темной энергии и теореме Дворецкого в физике частиц**

### **2.1. Е-бесконечность, некоммутативная геометрия и квантовая запутанность Харди**

Безусловно, один из наиболее важных результатов современной квантовой механики – запутанность Харди, в которой рассчитанная квантовая вероятность для запутанности точно равна золотому среднему  $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$  в степени пять [35–39]. Чтобы оценить значимость этого результата для физики высоких энергий и квантовой космологии, необходимо разделить его на три основных шага. Во-первых, упрощенный мысленный эксперимент Харди и его точное решение при помощи формализма Дирака. Во-вторых, надо понять, что результат в 9% квантовой вероятности для запутанности двух квантовых частиц – это, на самом деле, аппроксимация золотого среднего в степени пять. В-третьих, надо понять, что этот результат напрямую следует из результатов,

полученных А.Коннесом и автором данной статьи в работе, посвященной некоммутативной фрактальной канторовой природе квантового пространства-времени, и что структурные элементы этого канторова многообразия – это просто случайное канторово множество с хаусдорфовой размерностью, равной золотому среднему в степени  $n$ , где  $-\infty \leq n \leq +\infty$  содержит в себе все натуральные целые числа. С этой точки зрения результат Харди  $P(\text{Hardy}) = \phi^5$  – это следствие из двух канторово-фрактальных «точек», коррелирующих в канторовом пространстве, состоящем из бесконечного числа канторовых множеств. С другой стороны, количество точек в одном множестве бесконечно велико, т.е. оно содержит  $\infty^\infty$  точек. Следовательно, общее количество точек в канторовом пространстве

$$(\infty^\infty)^\infty + \infty(\infty^\infty) \quad (\text{Alef})^\infty. \quad (1)$$

Несмотря на то, что записанное выше символическое равенство, на первый взгляд, не имеет практического применения и не позволяет проводить реальные расчеты, оно чрезвычайно полезно для поиска способа практических расчетов, что мы сейчас и покажем. Т.к. хаусдорфова размерность  $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$  и хаусдорфова размерность в  $n$  измерении записывается с помощью уравнения Неймана – Конне – Ел Нэйши для взаимно-однозначной размерной функции [9, 30]

$$D = a + b\phi \quad (2)$$

где  $a, b \in \mathbb{Z}$  и  $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$ , а  $E$ -бесконечность записывается эквивалентно

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{n-1} \quad (3)$$

Тогда отсюда следует, что нулевое множество [9, 30]

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{n-1} = \phi \quad (4)$$

а пустое ( $n = -1$ ) множество

$$d_c^{(n)} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{-1-1} = \left( \frac{1}{\phi} \right)^{-2} = \phi^2 \quad (5)$$

Для двух «частиц» в одном канторовом множестве топологическая вероятность «совпадения», т.е. для запутанности:

$$P_1 = (\phi)(\phi) = \phi^2 \quad (6)$$

С другой стороны, для самого пространства имеем размерность

$$\langle d_c \rangle = \frac{1}{\phi(1-\phi)} = 4 + \phi^3 \quad (7)$$

и следовательно, вероятность

$$P_2 = \frac{1}{\langle d_c \rangle} = \phi^3 \quad (8)$$

Следовательно, совместная вероятность:

$$P(total) = (P_1)(P_2) = \phi^2(\phi^3) = \phi^5 \quad (9)$$

что является вероятностью Харди. Кроме того, это является вероятностью нахождения точки во фрактальной М-теории Виттена [23, 38]:

$$D_F^M = 11 + \frac{1}{11 + \frac{1}{11 + \dots}} = 11 + \phi \quad (10)$$

Это значит [37, 38]

$$P(total) = \frac{1}{D_F^M} = \frac{1}{11 + \phi^5} = \phi^5 \quad (11)$$

Только с учетом этого уже можно понять значимость и частичную реальность М-теории Виттена [23, 38]. Кроме того, и это еще важнее, мы видим, что в этом случае математическая логика была вполне традиционной. Другими словами, квантовая физика может быть не интуитивно понятной, но логика у нее такая же, т.к. только одна единственная логика обоснованна, а именно – математическая логика.

## 2.2. Обыкновенная энергия и темная энергия как результат квантовой запутанности

Из приведенного выше нетрудно видеть, что доля каждой частицы в сценарии Харди должна быть  $\phi^5 / 2$ , и ее можно распространить на  $n$  измерений. Таким образом, при  $n$  измерениях доля запутанности будет  $\phi^5 / n$ . Это ведет к сокращению  $n - n(\phi^5 / 2)$ , а это отношение между незапутанной частью и полным множеством измерений, что ведет к коэффициенту приведения, равному плотности темной энергии, что будет подробнее доказываться ниже. Таким образом, имеем [38–41]

$$\gamma(D) = \frac{n - (\phi^5 / 2)n}{n} = \frac{n - (1 - (\phi^5 / 2))}{n} = 1 - \left( \frac{\phi^5}{2} \right) = \frac{21 + k}{22 + k} \quad (12)$$

где  $k = 2\phi^5$ . Мы не устаем напоминать себе и читателям, что этот результат полностью согласуется с космическими измерениями и не является фантастической теорией. Поставим перед собой цель доказать, что  $\phi^5 / 2$  можно считать частицей-вестником запутанности, мы называем ее энтанглион, и что ренормалон  $k$  делается топологическим из четырех таких энтанглионов. Этот  $k$  – фиксированный параметр возмущений в известном методе размерной регуляризации (ренормализации),  $D = 4 - (\varepsilon = k)$  [35]. Фактически, уравнение (12) дает даже больше, т.к. его можно записать так:

$$\left( \frac{1}{\gamma} \right) \leq \frac{1}{(\gamma(O))} + \frac{1}{(\gamma(O))} \quad (13)$$

в соответствии с теоремой Данкерли о кратных собственных значениях, которая использовалась вместе с идеей о фазовой синхронизации в применении к квантовому пространству-времени как автором данной работы [58-60], так и математиком Л.Мареком-Црнжаком [58]. Отсюда следует, что есть соответствующий квантовый



гамильтониан, ограниченный снизу, и это последнее уравнение (13) представляет собой утверждение о сохранении энергии, в котором отсутствующая часть, необходимая для знака равенства, точно равна имеющейся диссипации. В отношении этого важнейшего результата хорошая новость состоит в том, что наше разложение  $E = E(O) + E(D)$  непосредственно указывает, что можно получить диссипативную динамику, а с точки зрения современной нелинейной динамики – детерминированная квантовая динамика будет полностью согласовываться с нормированным уравнением и результатом, полученным на основе теоремы Дворецкого [2]. Другими словами, канторово-фрактальная квантовая механика, предложенная Ел Нэйши и Ордом, и детерминированная квантовая механика, предложенная Нобелевским лауреатом 'т Хоофтом [62], – фактически, всего лишь две стороны одной медали.

### 2.3. Теорема Дворецкого и концентрация меры E-бесконечности

Теперь необходимо обсудить важнейший вопрос, связанный с тем, как распределяется  $\gamma(\text{Dark})$ , из которого получается  $E = \gamma(\text{Dark}) = mc^2 \cong mc^2(21/22)$ , – этот вопрос тесно связан с сутью теоремы Дворецкого и ее следствиями [1-7]. Чтобы это выяснить, необходима информация еще о двух аспектах. Во-первых,  $n$  связанных частиц Харди записываются так:

$$P(\text{Hardy}) = P_1 P_L = \phi^n \phi^4 = \phi^{n+3} \quad (14)$$

Во-вторых, необходимо знать, что мозаика Клейна-Пенроуза – это разветвляющийся «волоконнооптический жгут», представляющий собой голографическую границу нашего E-бесконечного канторова фрактального пространства. Следовательно, границу границы, найденную Уилером для «нулевого множества» много лет назад, можно логически экстраполировать пустым множеством темной энергии наиболее удаленной границы на бесконечности голографической границы с последующим полностью пустым множеством, где размерность Менгера-Урысона начинается с минус единицы и соответствующей хаусдорфовой размерности  $\phi^2$  и заканчивается топологической размерностью Менгера-Урысона, равной минус  $\infty$  и абсолютным нулем в качестве соответствующей хаусдорфовой размерности. С другой стороны, в середине нашей голографической границы размерность Менгера-Урысона равна нулю, а хаусдорфова размерность равна  $\phi$ . Наиболее удаленная граница нашей Вселенной, таким образом, является односторонней, т.е. имеет только внутреннюю сторону и не имеет наружной, по аналогии с лентой Мебиуса. Объединяя обе размерности обеих частей, имеем

$$0-1=-1 \quad \text{и} \quad \phi^2 + \phi = 1. \quad (15)$$

В то же время, произведение дает  $(-1)(0)=0$  и  $\phi^2\phi=\phi^3$ . Так мы приходим к процессу Бернулли  $(1, 0)$  и анти-Бернулли  $(1,0,-1)$ , как в спиральной модели Дж.Орда. Множество Хаусдорфа этих процессов – просто фрактал  $\phi^3$ , в свою очередь соответствующий пространству-времени хаусдорфовой размерности пространства-времени  $1/\phi^3 = 4 + \phi^3 = 4.23606799$ . Из вышесказанного видно, что темная энергия сконцентрирована на поверхности канторова многообразия нашего пространства-времени на бесконечности, что объясняет, почему разбиение формулы Эйнштейна на обыкновенную энергию  $E(O) = mc^2/22 + k$  и темную энергию  $E(D) = mc^2(21 + k/22 + k)$  не наблюдается за исключением случая, когда мы исследуем и измеряем Вселенную в целом, т.е. эндофизически, как в случае с COBE, WMAP и измерениями Планка и в

отличие от экспериментов Казимира и традиционных локальных проверок специальной теории относительности [33–39].

Вышеизложенные утверждения о концентрации темной энергии могут показаться несколько неправдоподобными тем читателям, которые не знакомы с Е-бесконечностью и фракталами. Однако мы заверяем читателя, что существуют *неопровержимые* математические теоремы; среди них, например:

**Теорема.**

Девяносто шесть процентов объема сферического шара достаточно большой размерности сконцентрировано на поверхности сферы [1–4].

В следующем разделе мы покажем правильность этого утверждения при помощи двух различных цепочек математических рассуждений.

### 3. Теоретическое отклонение с мерой объемной концентрации по теореме Дворецкого

#### 3.1. Традиционный вывод

Возьмем евклидов шар. Из традиционной формы записи [1–4] имеем

$$B_2^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}. \quad (16)$$

В этом случае объем задается известной формулой [1–4][6]

$$\text{vol}(n) = \frac{(\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (17)$$

Здесь  $\Gamma$  – обобщение функции факториала ( $n!$ ) до нецелого,  $n$  – измерение. Для больших  $n$  можно использовать формулу аппроксимации Стирлинга, откуда объем приближенно равен [1–4]

$$\text{vol}(n) = \left( \sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \right)^n. \quad (18)$$

Заметим, что сфера радиусом  $r=1$  – это поверхность шара, которая обозначается  $S^{n-1}$ , а величина  $r$ , фактически, неожиданно большая. Это доказывает, что в области геометрии и топологии высоких измерений интуиция может приводить к неверным результатам [1–4].

Нашей следующей задачей является обратить внимание на распределение массы в шаре. Для этого необходимо сначала определить  $n-1$ -мерный объем слоя в центре шара объемом 1, где радиус шара задается как [1–4]

$$r = \frac{1}{\sqrt{\text{vol}(n)}}. \quad (19)$$

Таким образом, слой – это  $n-1$ -мерный шар радиусом, как показано выше, и объемом, приближенно посчитанным, опять же, по формуле Стирлинга для больших  $n$  [1–4]:

$$\text{vol}(n-1)r^{n-1} = \sqrt{e}. \quad (20)$$

Соответственно,  $n-1$ -мерный объем параллельных слоев на расстоянии  $x$  от центра – это  $n-1$ -мерный шар радиусом  $\sqrt{r^2 - x^2}$ , поэтому объем меньших слоев приблизительно равен

$$\text{vol}(1) = \sqrt{e} \exp(-\pi e x^2). \quad (21)$$

Проецируя на одно направление, получим гауссово распределение (аналогичное гамма-распределению), которое мы изучали в предыдущих публикациях по COBE и сферической укладке [37–39]. Дисперсия этого распределения, опять же, что удивительно, не зависит от  $n$  и записывается как  $\text{var} = (1/2\pi e)$ . Несмотря на то, что радиус шара объемом 1 растет как  $\sqrt{n}/(2\pi e)$ , почти весь этот объем заключается в полосе определенной ширины [1–4]. Это утверждение противоречит интуиции, но оно верное. Применяя предыдущее уравнение, можно увидеть, что для полосы, задаваемой [1–4]

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (22)$$

около 96% объема шаров различного числа измерений сосредоточено в пределах этой полосы. Это легко показать оценкой  $\text{vol}(1)$  для  $x = 1/2$ , умножая затем на объем пятимерного шара. Подставляя  $x = 1/2$ , получаем [1–4]

$$\text{vol}(1) = (1.64721281)(0.11825244) = 0.194786946 \quad (23)$$

и

$$\text{vol}(1)\text{vol}(B_5) = \text{vol}(1)(4.9348) = 0.96123 \cong 96\% \quad (24)$$

что доказывает наш основной тезис.

### 3.2. Короткий вывод концентрации объема при помощи Е-бесконечности

Предыдущее приближение легко сделать точным при помощи метода трансфинитной коррекции Е-бесконечной теории [9, 13]. Легко видеть, что необходимо следующее преобразование [9, 13, 35–39]

$$\text{Vol}(1) \rightarrow \left( \frac{1}{\phi} \right) \left( \frac{k+1}{10} \right) \quad (25)$$

при

$$\sqrt{e} \rightarrow \frac{1}{\phi} \quad (26)$$

и

$$\exp(-\pi e x^2) \rightarrow \frac{(k+1)}{10}. \quad (27)$$

Следовательно

$$(5)(\text{Vol}(1)) \Rightarrow \left( \frac{5\phi^2}{2} \right) = \frac{(21+k)}{(22+k)}. \quad (28)$$

Это точная величина плотности темной энергии, которая ранее была найдена различными методами [36–39].

#### 4. Плотность темной энергии на основании фундаментальной математической структуры общей теории относительности

Может показаться удивительным то, что мы смогли определить плотность обыкновенной энергии космоса [19–54] напрямую из математической формулировки общей теории относительности [52]. Для этого мы сначала взяли двойное число компонентов тензора Римана в четырех измерениях. Они задаются величиной  $(4)^4 = 256$ , поэтому имеем [53, 54]

$$N = (2)(256) = 512 \quad (29)$$

Это число сопоставимо с  $|E8 E8| = 496$  из теории суперструн [8, 9], 528 из модели пятимерных бранов Виттена в 11 измерениях [45–48] и 504 из гетеротической теории суперструн [45]. При выводе  $E = mc^2$  Эйнштейн рассматривал 4-мерное пространство-время, поэтому мы имеем  $26 - 4 = 22$  измерения бозонных струн. Эти 22 измерения необходимо проанализировать с точки зрения  $N = 512$ , за вычетом 20-ти измерений, представляющих степени свободы вакуума или абсолютной (pure) гравитации для супер пространства  $D=8$ . Следовательно, имеем [45–48]

$$N(\gamma) = 512 - (20 + 8) = 484 \quad (30)$$

измерений или квази степеней свободы. Отношение, представляющее собой Лоренц-фактор или плотность энергии, записывается в виде

$$\gamma = \frac{26 - 4}{512 - (20 + 8)} = \frac{22}{484} = \frac{1}{22} = 0.04545 \quad (31)$$

в точности, как и ожидалось. Далее заметим, что  $|E8 E8| = 496$  также равняется размерности антисимметричного тензора второго порядка и  $SU(32)$ :

$$\gamma = \frac{26 - 4}{512 - (20 + 8)} = \frac{22}{484} = \frac{1}{22} = 0.04545 \quad (31)$$

Другими словами, имеем [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 496 \quad (33)$$

для соответствующего симметричного случая имеем [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 528 \quad (34)$$

Последнее значение дает число векторных полей Киллинга для  $n=32$ , т.е. максимальный центральный заряд, и в точности совпадает с моделью Виттена [46]

$$N_K^{(11)} = \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{5} = 11 + 55 + 462 = 528 \quad (35)$$

#### 5. Точное ограничивающее целое значение общей плотности темной энергии из критической размерности бозонных струн

Далее получаем целочисленное значение плотности темной энергии, которое в точности равно значению, найденному по основному целочисленному уравнению [6, 7, 54, 55]

$$\sum_1^4 \overline{\alpha_i} = 100 \quad (36)$$

Это весьма интересно в связи с несколькими аспектами. В частности, стоит отметить предел при  $k \rightarrow 0$ . Вспомним, что в теории бозонных струн имеется две критических размерности пространства–времени в теории «без духов» (ghost free theory). Это  $D=26$  и  $D=25$ . Соответствующие трансфинитные значения, очевидно, составляют  $D = 26 + k = 26,18033989$  и  $D = 25 + k = 25,18033989$ , где  $k = \phi^3(1-\phi^3)$  – ренормалон ‘т Хоофта (‘t Hooft). Отмечая, что в обоих случаях  $D = D(\text{Einstein}) = 4$ , видим, что  $\gamma(D)$  суммарной темной энергии, т.е. и темной энергии, и темной материи, дается в [54, 55] как

$$\gamma(D) = \frac{(25 + k) - 4}{(26 + k) - 4} = \frac{21 + k}{22 + k} \quad (37)$$

а это точная трансфинитная величина. Чтобы получить нормальное целое отношение, примем  $k=0$  и найдем ранее установленное известное значение

$$\gamma(D) = \frac{21}{22} = 0.954545 = 95.45\% \quad (38)$$

Однако существует более тонкий способ получить не только целое отношение, но и точное целое значение  $\gamma(D) = 96$ , согласующееся с нормированным основным уравнением

$$\sum_1^4 \overline{\alpha_i} - D^{(4)} = 100 - 4 = 96\% \quad (39)$$

Для этого не нужно вычитать  $D(4)$  из отношения  $\gamma(D)$ . Записываем

$$\gamma(D) = \frac{25 + k}{26 + k} = 0.9618033989 \quad (40)$$

Другими словами,

$$\gamma(D) = 0.96 + \frac{k}{(10)^2} \quad (41)$$

Теперь пусть  $k \rightarrow 0$ , тогда

$$\gamma = 0.96 = 96\% \quad (42)$$

Это полностью согласуется с нормированным уравнением и результатом, полученным на основе теоремы Дворецкого [2]. Фактически, можно применить теоретико-числовую «анатомию» к норме

$$\sum_1^5 \gamma_i = 1 + 3 + 22 + 74 = \sum_1^4 \gamma_i = 4 + 22 + 74 \quad (43)$$

и заметить, что данное выражение можно переписать простыми числами

$$\sum_1^5 \gamma_i = 1 + 3 + 2(11) + (2)(37) \quad (44)$$

где  $1 + 3 + 11 + 37 = 52$  и размерность исключительной группы симметрии Ли точно равняется  $|F4| = 52$ . Если учитывать трансфинитное точное значение  $52 + k = 52.3606799$ , то становится видимой теоретическая космическая гармония (cosmic symphony).

## 6. Ряд ренормалоноров

Далее выполнен анализ осреднения, т.е. квази интегрирования нормалона 'т Хоофта ( $k = \phi^3(1 - \phi^3)$ ).

$$(k) \left( \frac{1}{\phi} \right)^n \quad \begin{array}{ll} \underline{n=1} & 0.18033 = k \\ \underline{n=2} & 0.29179 \\ \underline{n=3} & 0.472135 \\ \underline{n=4} & 0.7638320334 \\ \underline{n=5} & 1 + \phi^3 \\ \underline{n=6} & 2 \text{ World sheet} \\ \underline{n=7} & 3 + \phi^3 \text{ Fractal 3D space} \\ \underline{n=8} & 5 + \phi^3 \text{ Fractal Kaluza-Klein} \\ \underline{n=9} & 8.47... \\ \underline{n=10} & \overline{\alpha_0} / 10 \\ \underline{n=11} & 2 / \phi^5 = (2)(11 + \phi^5) \\ \underline{n=12} & \frac{SL(2,7) + R^{(8)} + 16k}{D^{(10)}} = 35.888544 \end{array} \quad (45)$$

где  $\overline{\alpha_0}$  – обратная электромагнитная постоянная тонкой структуры,  $2(11 + \phi^5) = 22 + k$  – обратная плотность обыкновенной энергии космоса,  $R^{(8)} = 20$  – степени свободы суперсимметричного вакуума Эйнштейна в D=8 измерениях или в абсолютной (pure) гравитации, и 358,88544 – компактифицированные степени свободы голографической границы плюс 20 от Эйнштейновской абсолютной гравитации, которая численно равна  $R^{(4)} = 20$ , а именно числу независимых компонент тензора Римана в D=4. Читатель может видеть, что существует на самом деле тесная взаимосвязь приведенного выше, и это одновременно просто для понимания и невероятно.

## 7. Бозонная связь света и темной энергии

Кажется, что теория струн обладает встроенным математическим сенсором, который предвидит существование двух различных типов пространства-времени, содержащего различные типы энергии. Это, на самом деле, неожиданная интерпретация некоторых фактов, хорошо известных тем, кто знаком с начальным этапом развития теории струн [45, 46]. Смысл в том, что бозонные струны имеют не одно, а два измерения, которые исключают отрицательную норму [45]. Первый – это знакомое D=26, при котором условие Лавлейса (Love Lase) [45] тождественно исчезает, если отрезок  $a$  на координатной оси равен единице ( $a=1$ ). Однако существует и известное альтернативное решение, а именно [45]  $D \leq 25$  и  $a \leq 1$ . Таким образом, максимально возможные измерения без введения нефизических состояний D=26 и D=25. Именно взаимодействие между этими двумя измерениями с завихренностью и четырьмя видимыми измерениями пространства-времени Эйнштейна D=4 соответствует двум принципиально различным типам плотности энергии, обнаруженным COBE и WMAP,

космическими измерениями *сверхновой типа Ia* и анализом, результаты которого удостоились Нобелевской премии по физике [33–39].

Если не вдаваться в подробности, то формула Эйнштейна  $E = mc^2$  основывается на  $D=4$ . Однако бывает и  $D=26$ , и  $D=25$ . Об этом во времена Эйнштейна известно не было, следовательно, «реальная» энергия, которая измеряется при  $4D$ , является подмножеством части энергии, связанной с  $D=26$  и  $D=25$ . Тогда точное значение плотности энергии должно быть

$$\gamma(O) = \frac{1}{26-4} = \frac{1}{22} = 4.5\% \quad (46)$$

и

$$\gamma(D) = \frac{25-4}{26-4} = \frac{21}{22} = 95.5\% \quad (47)$$

где

$$\gamma(O) + \gamma(D) = \frac{1}{22} + \frac{22}{22} = 1 = \gamma(Einstein) \quad (48)$$

В рамках указанной выше целочисленной теории можно также выяснить, что чистая темная энергия равняется отношению 25 измерений с завихренностью за вычетом шести измерений пространства Калаби-Яу к размерности, равной 26 с завихренностью. Таким образом, не вдаваясь в подробности, плотность чистой темной энергии

$$\gamma(D - pure) = \frac{25-6}{26} = \frac{19}{26} = 73\% \quad (49)$$

что хорошо согласуется с измерениями. Перед тем как переходить к следующему разделу, кратко рассмотрим существование двух измерений с завихренностью с точки зрения математической физики. Основное здесь заключается в следующем условии [8, 45]

$$\langle \theta | \theta \rangle = \frac{2}{25} a^2 (D-1)(26-D). \quad (50)$$

Таким образом, у пространства-времени не может быть больше 26 измерений, иначе будут существовать состояния отрицательной нормы как часть физических состояний. В целом, в теории струн в пространстве-времени «духов» (побочных воздействий) не существует, если у пространства-времени менее 26 или ровно 26 измерений. Это означает [45]

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad D = 26, \\ a &\leq 1, \quad D \leq 25. \end{aligned} \quad (51)$$

## 8. Почти нулевая вероятность того, что $\gamma(O) = 0.045$ и $\gamma(D) = 0.955$ могут быть численным совпадением

Всегда есть любители безосновательно обвинять того, кто предлагает действительно новую идею или делает открытие, в «гадании по числам». Данная теория также не избежала подобной неаргументированной критики. Однако совсем не трудно отместить эти необоснованные обвинения. Приведем следующие аргументы:

1. Во-первых, наш результат полностью соответствует экспериментам и наблюдениям. Можно указать как минимум 4 экспериментальных проекта, в которых получены

практически те же результаты: COBE, WMAP, сверхновая 1a типа и измерения Планка. Если есть 50% вероятность того, что какой-либо из четырех экспериментов неверный, то вероятность ошибочности всех четырех не превышает 6,25%.

2. Учитывая теоретический вывод, приходим к следующему. За почти три года мы использовали, по крайней мере, 25 теорий и различных методов, начиная от специальных до чисто математических. В итоге мы получили почти точный результат, полностью согласующийся с измерениями и наблюдениями. Опять, при предположении о 50% вероятности того, что эти результаты ошибочны, имеется максимальная вероятность (0,5) в степени 25, т.е. вероятность  $(2,9)(10)^{-8}$  того, что наш результат – ошибка или численное совпадение.

3. Если взять результат измерения и теоретическое отклонение, то максимальная вероятность ошибки или численного совпадения составляет  $(0,0625)(2,9)(10)^{-8} @ (1,86)(10)^{-9}$ , т.е. менее диаметра атома водорода, если измерить его в сантиметрах и взять как отвлеченное число.

## 9. Обыкновенная энергия и темная энергия в пределе бесконечно большого числа измерений совершенно различны

Если сравнивать эффект Казимира с темной энергией, необходимо все время учитывать два важнейших момента. Во-первых, основа обоих типов энергии одинакова, а именно: предполагаемый пустой вакуум [10, 11, 21]; во-вторых, несоответствие порядков величины просто огромное. В связи с этим нужно обратить внимание на предел  $n \rightarrow \infty$  плотности обыкновенной энергии  $\gamma(O)$  и темной энергии  $\gamma(D)$ , где  $n$  – формальное число измерений канторова пространства-времени [6-9]. Таким образом, имеем совершенно другой предел, а именно [6-9]

$$\gamma(O) = \frac{\phi^n}{2}, \quad \underline{n \rightarrow \infty}, \quad \text{zero} \quad (52)$$

в то же время

$$\gamma(D) = \frac{n\phi^2}{2}, \quad \underline{n \rightarrow \infty}, \quad \text{infinity}. \quad (53)$$

Мы здесь не учитывали тот факт, что мы имеем характерное  $\phi^3$  для самого пространства-времени без сравнения  $\gamma(O)$  с  $\gamma(D)$  в пределе  $n \rightarrow \infty$ . Другими словами, существует реальная вероятность того, что на границе Вселенной объемная концентрация и голография могут привести к огромной плотности энергии в результате эффекта Казимира в нашем малоразмерном «лабораторном» пространстве и времени, где до сих пор проводились все эксперименты по эффекту Казимира. Фактически, если принять  $5 + \phi^3$ , т.е. фрактальную размерность Калузы-Клейна вместо 5 в  $\gamma(D)$ , то темная энергия достигнет максимума, равного плотности энергии Эйнштейна, т.к. [22–32]

$$\gamma_F(D) = (5 + \phi^3)(\phi^2)/2 = (5\phi^2/2) + (\phi^5/2) = \gamma(D) + \gamma(O) = 0.954545 = 1 \quad (54)$$

Этим демонстрируется важнейшая роль тонкой структуры канторова фрактального пространства-времени. Однако следует признать, что она сама по себе не объясняет, почему мы можем измерять ничтожную энергию Казимира напрямую, но можем обосновать существование темной энергии только косвенно, несмотря на то, что оба вида энергии связаны с квантовыми волновыми явлениями [6, 9, 21].



## 10. Выводы

В данной работе на основе различных фундаментальных теорий, включая теорию струн, общую и специальную теорию относительности, явления объемной концентрации, основанные на указанной теореме Дворецкого, мы доказываем, что [2]:

1. Практически 96% плотности темной энергии, обнаруженной в космологических измерениях и наблюдениях, можно понимать как геометрическое отражение объемной концентрации меры или как кинетическую энергию квантовой волны с предполагаемым отсутствием энергии.
2. Темная энергия – эндофизическое явление, имеющее отношение ко всей Вселенной, может иметь локальные экзофизические проявления в энергии Казимира. Следовательно, если это верно, и мы считаем это верным, то в конечном итоге мы найдем реальный научный путь к бесконечной свободной энергии, конкурирующий с научными мечтами Н.Теслы, но не пересекающий границу между фактами и фантазией.
3. Идея Дж.А.Уилера о «границе границы, равной нулю», в данной работе ведет к выводу, что граница нашей Вселенной – это слой пустых множеств, заканчивающийся абсолютно пустым множеством, которое является односторонним по аналогии с лентой Мебиуса. В этом смысле: в результате наличия темной энергии типа казимировой обеспечивается сосредоточенное усилие, в результате которого появляется давление с внутренней стороны, не уравновешенное чем-либо снаружи (где ничего не существует), следовательно, появляется отрицательная гравитация, вызывающая наблюдаемое ускоряющееся расширение космоса.
4. Разумное объяснение механизма образования «границы границы с абсолютно пустой границей» можно на простейшем (и одновременно классическом) уровне понимать так: вспомним, что плотность энергии Казимира – это разница между плотностью в пределах двух пластин Казимира в мысленном и реальном эксперименте и плотности свободной энергии пространства в целом за пределами двух пластин; тогда понятно, что суммарная темная энергия нашей Вселенной соответствует ограниченной энергии, в то время как плотность свободной энергии снаружи теперь равна абсолютному нулю абсолютно пустого множества «последней границы границы». Следовательно, в пределе классической механики энергия Казимира будет нулевой, поэтому мы не сможем измерить ни энергию Казимира, ни темную энергию. Однако можно заключить, что эта энергия существует, судя по ускоряющемуся расширению Вселенной, о чем говорилось выше в п.3. Таким образом, принципиально мечта о свободной энергии теоретически обоснована и частично подтверждена экспериментально. На данный момент требуются технологии и инновации, вероятно, из области нанотехнологий.

## Литература

1. Y. Godon. Gaussian processes and almost spherical sections of convex bodies. *Annals of Probability*, 16(1), 1988, pp. 180–188.
2. A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proceedings International Symposium on Linear Spaces*, Jerusalem. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, Israel, 1960.
3. T. Figiel, J. Linden Strauss and V. Milman. The dimension of almost spherical section of convex bodies. *Bulletin American Mathematical Society*, 82(4), 1977, pp. 575–578.
4. T. Figiel. A short proof of Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, 33(3), 1970, pp. 207–301.

5. J.P. May. E-infinity ring spaces and E-infinity spectra. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, Germany 1977.
6. Mohamed S. El Naschie. Casimir-like energy as a double Eigenvalues of quantumly entangled system leading to the missing dark energy density of the cosmos. International Journal of High Energy Physics, 1(5), 2014, pp. 55-63.
7. Mohamed S. El Naschie. From  $E = mc^2$  to  $E = mc^2/22$  – A short account of the most famous equation in physics and its hidden quantum entanglement origin. Journal of Quantum Information Science, 4, 2014, pp. 248-291.
8. M. Kaku. Introduction to Superstrings and M-theory. Springer, New York (1999).
9. M.S. El Naschie. A review of E-infinity and the mass spectrum of high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals, 19, p. 209-236 (2004).
10. R. Lomas. The Man Who Invented The Twentieth Century. First published by Headline Book Publishing 1999. This edition is by QCS e-Books 2011.
11. J. Schwinger. Casimir energy for dielectrics. Proceedings of the National Academy of Science, Vol. 89(9), 1992, pp. 4091-4093.
12. O.E. RöSSLer. Endophysics. World Scientific, Singapore, 1998.
13. M.S. El Naschie. On a general theory for quantum gravity. In ‘Science of the Interface. Editor H. Diebner, T. Druckrey and P. Weibel. Genista Verlag, Tübingen, Germany, 2001.
14. O.E. RöSSLer. Boscovich’s observer-centered explanation of the nonclassical nature of reality. In Symposium on the Foundations of Modern Physics, Joensuu, Aug.13-17, 1990 (K.V. Laurikainen, org.), Extended Abstracts, pp.153-156. Turku. Report Series, Publications of the Department of Physical Sciences, University of Turku 1990.
15. O.E. RöSSLer. A possible explanation of quantum mechanics. In “Advances in Information Systems Research” (G.E. Lasker, T. Koizumi and J. Pohl, eds.), pp. 581–589. Windsor: The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics 1991, pp. 581–589.
16. O.E. RöSSLer, Endophysik. Die Welt des inneren Beobachters (ed. by Peter Weibel). Berlin. Merve Verlag, 1992.
17. O.E. RöSSLer and J.O. RöSSLer. The endo approach. Applied Mathematics & Computation 56, 281–287 (1994).
18. O.E. RöSSLer and M.S. ElNaschie. Interference through causality vacillation. In. Symposium on the Foundations of Modern Physics 94, Helsinki, June 13–16, 1994 (T. Hyvönen, org.), Extended Abstracts, Turku. Report Series Publication of the Department of Physical Sciences, University of Turku, 1994.
19. A. Wilson, C. Johansson et al. Observation of the dynamical Casimir effect in a super conducting circuit. Nature, Vol. 479(7373), 2011, pp. 376–379.
20. R. Caldwell. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super negative equation of state. Physics Letters B, Vol. 45(1-2), 2002, pp. 23–29.
21. J. Cugnon. The Casimir effect and the vacuum energy-duality in the physical interpretation. Few-Body Systems, Vol. 53(1-2), 2012, pp. 181–188.
22. M.S. El Naschie. A topological Magueijo-Smolín varying speed of light theory, the accelerated cosmic expansion and the dark energy of pure energy. Applied Mathematics, Vol. 5, 2014, pp. 1780–1790.
23. M.S. El Naschie. Cosmic dark energy from ‘tHooft’s dimensional regularization and Witten’s topological quantum field pure gravity. Journal of Quantum Information Science, vol. 4(2), 2014, pp. 83–91.
24. M.S. El Naschie. Logarithmic running of ‘tHooft-Polyakov monopole to dark energy. International Journal of High Energy Physics, vol. 1(1), 2014, pp. 1–5.

25. M.S. El Naschie. The quantum gravity Immirzi parameter – A general physical and topological interpretation. *Gravitation and Cosmology*, Vol. 19(3), 2013, pp. 151–155.
26. М.С. Ел Нэйши. К теории темной энергии на основе модели пространства–времени Коссера. *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*. № 1(41), т. 20, 2014, с. 99–120.
27. M.S. El Naschie. The theory of Cantorian spacetime and high energy particle physics (An informal review). *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 41(5), 2009, pp. 2635–2646.
28. M. S. El Naschie, S. Olsen, J. H. He, S. Nada, L. Marek-Crnjac, A. Helal. On the need for fractal logic in high energy quantum physics. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, Vol. 1(3), 2012, pp. 84-92.
29. Mohamed S. El Naschie. A Rindler-KAM spacetime geometry and scaling the Planck scale solves quantum relativity and explains dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 483-493.
30. A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, USA, 1994.
31. M.S. El Naschie. From classical gauge theory back to Weyl scaling via E-infinity spacetime. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 38, 2008, pp. 980-985.
32. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 18(1), 2003, pp. 125-133.
33. S. Perlmutter et al. Supernova Cosmology Project Collaboration. "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernova". *Astrophys. J.* Vol. 517, pp. 565 – 585. *Astro-ph/9812133*, 1999.
34. R. Panek. Dark Energy: The Biggest Mystery in The Universe. *The Smithsonian Magazine*. <http://www.smithsonianmagazine.com/science-nature/Dark-Energy-April>, 2010.
35. Mohamed S. El Naschie. On a new elementary particle from the disintegration of the symplectic 't Hooft-Veltman-Wilson fractal spacetime. *World Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 4(4), 2014, pp. 216–221.
36. Mohamed S. El Naschie. Pinched material Einstein space-time produces accelerated cosmic expansion. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 4(1), 2014, pp. 80–90.
37. M. A. Helal, L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. The three page guide to the most important results of M. S. El Naschie's research in E-infinity quantum physics and cosmology. *Open Journal of Microphysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 141-145.
38. L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. An invitation to El Naschie's theory of Cantorian space-time and dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 464–471.
39. Mohamed S. El Naschie. A Unified Newtonian-Relativistic Quantum Resolution of the Supposedly Missing Dark Energy of the Cosmos and the Constancy of the Speed of Light. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 2(1), 2013, pp. 43–54.
40. Jean-Paul Auffray. E-Infinity dualities, discontinuous spacetimes, Xonic quantum physics and the decisive experiment. *Journal of Modern Physics*, Vol. 5(15), 2014, pp. 1427–1436.
41. Mohamed S. El Naschie. Quantum entanglement as a consequence of a Cantorian micro spacetime geometry. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 1(2), 2011, pp. 50–53.
42. L. Amendola and S. Tsujikawa. *Dark Energy. Theory and Observations*. Cambridge University Press, Cambridge 2010.
43. M.S. El Naschie. A resolution of the cosmic dark energy via quantum entanglement relativity theory. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 3(1), 2013, pp. 23–26.
44. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.

45. M. Kaku. Strings, Conformal Fields and M-Theory. Springer, New York, USA, (2000).
46. M. Duff. The world in eleven dimensions. IOP Publishing, Bristol, UK. (1999).
47. Mohamed S. El Naschie. Nash embedding of Witten's M-theory and the Hawking-Hartle quantum wave of dark energy. Journal of Modern Physics, Vol. 4(10), 2013, pp. 1417–1428.
48. Mohamed S. El Naschie. Entanglement of E8E8 exceptional Lie symmetry group dark energy, Einstein's maximal total energy and the Hartle-Hawking no boundary proposal as the explanation for dark energy world. Journal of Condensed Matter Physics, Vol. 4(2), pp. 74–77, 2014.
49. W. Rindler. Relativity (Special, General and Cosmological). Oxford University Press, Oxford. 2004.
50. T. Padmanabhan. Gravitation, Foundations and Frontiers. Cambridge University Press, Cambridge. Revised Edition. 2010.
51. J.B. Hartle. Gravity. An Introduction To Einstein's General relativity. First Edition. Pearson Education Ltd., Einbrugh Gate, Harlow, Essex, England, 2003.
52. M. Tegmark. Our Mathematical Universe. Allen Lane, Penguin Books, London 2014.
53. E.ourgoulhon. Special Relativity in General Frames. Springer, Berlin, 2013.
54. Ting Zhong. From the numeric of dynamics to the dynamics of numeric and visa versa in high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals, 42, 2009, pp. 1780-1783.
55. M.S. El Naschie. On the vital role played by the electron-volts units system in high energy physics and Mach's principle of 'Denkokonomie'. Chaos, Solitons & Fractals, 28, 2006, pp. 1366-1371.
56. M.S. El Naschie. The unreasonable effectiveness of the electron-volt units system in high energy physics and the role played by  $\bar{a}_o = 137$ . International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(2), 2006, pp. 119-128.
57. L. Marek-Crnjac. A short history of fractal Cantorian spacetime. Chaos, Solitons & Fractals, 41(5), 2009, pp. 2697–2705.
58. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 18(1), 2003, pp. 125–133.
59. M.S. El Naschie. The brain and E-infinity. International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation, 7(2), 2006, pp. 129–132.
60. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.
61. H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. Discrete and Computational Geometry, 28(4), 2002, pp. 511–533.
62. M. S. El Naschie. Deterministic quantum mechanics versus classical mechanical indeterminism. International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation, 8(1), 2007, pp. 1–10.

**Мохаммед С. Ел Нэйши**, Др., Проф. Он родился в Каире (Египет). В 2012 г. он баллотировался на выборах Президента Египта. До 2012 г. сначала он был в Германии, где получил образование в Ганновере в средней школе и университете. Получив диплом по строительной механике и проработав несколько лет инженером-консультантом, он переехал в Великобританию, где получил степень PhD в Университетском колледже Лондона (University College London) под руководством профессора, члена Королевского общества Дж.М.Т.Томсона и стал членом Группы по исследованию устойчивости (Stability Research Group), основанной лордом Генри Чилвером. Последующие важнейшие моменты биографии: звание профессора в

университете короля Сауда (Kind Saud University), приглашенный профессор в Корнеле, научный сотрудник и приглашенный профессор в Кембриджском университете. Сотрудничал с нобелевским лауреатом Ильей Пригожиным, сэром Германом Бонди, профессором С. Аль Ател, министром науки Саудовской Аравии. За время своей длинной научной карьеры профессор Ел Нэйши опубликовал более тысячи работ в области инженерных наук, математики, теоретической физики, космологии, политологии, истории и искусства. В течение некоторого времени он вел свою еженедельную научную передачу на египетском телевидении и ежедневную колонку в журнале *Rose Al-Youssef*. Профессор Ел Нэйши долгое время был научным советником правительств Египта и Саудовской Аравии. Профессор Ел Нэйши считается одним из трех основоположников фрактальной теории пространства-времени (вместе с Гарнетом Ордом и Лорентом Нотталем). Он является создателем физической теории Е-бесконечности в физике высоких энергий. За свои достижения он удостоивался наград в Саудовской Аравии, Германии, США. Избран действительным членом Института физики в Великобритании (Institute of Physics). В Германии удостоен чести получить титул Заслуженного члена Франкфуртского общества фундаментальных исследований (Frankfurt Association for the Advancement of Fundamental Research) Франкфуртского университета им. Иоганна Вольфганга Гете. В настоящее время разрабатывает реактор, предназначенный для использования и усиления пространственно-временных топологических эффектов, например, эффекта Казимира и темной энергии. Ел Нэйши недавно предложил новое содержательное объяснение формулы Эйнштейна  $E = mc^2$ , в котором показал, что она имеет квантовые корни, а именно  $E = mc^2/22$  и  $E = mc^2(21/22)$ .

## **Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method**

**A.I. Grebennikov**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Av. San Claudio y Río verde, Ciudad Universitaria,  
CP 72570, Puebla, Pue., México

A new fast method for identification of source distribution in heterogeneous plane domain is proposed. Its mathematical model is constructed on the basis of general ray principle, proposed by the author for distribution of different fields, in particular – thermostatic field. Proposed model leads to the new general ray method that use explicit formulas with classic inverse Radon transformation. Method is realized as fast algorithms and programs in MATLAB system and illustrated by numerical experiment.

*Key words:* thermostatic field; identification; Radon transformation.

### **1. Traditional statement of a problem**

In some applied problems, related to engineering investigations [1–9], it appears the necessity to recognize of the source distribution of thermostatic field [1]. In a plane case it can be mathematically described as an inverse problem for recuperation of the right hand side of the Poisson equation

$$\nabla(\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

where,  $\Omega$  – some limited region on a plane,  $\varepsilon(x, y) > 0$  is a known thermostatic characteristic of the material,  $u(x, y)$  is an unknown distribution of temperature; the function  $f = f(x, y)$  characterizes desired source distribution of the thermostatic field.

In traditional statement [2] it is supposed also that functions  $J_n(x, y)$ ,  $u^0(x, y)$  are known on the boundary curve  $\Gamma$  and the next boundary conditions are satisfied:

$$\varepsilon(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = J_n(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, y) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

where  $\frac{\partial}{\partial n}$  is the normal derivative in the points of the curve  $\Gamma$ .

Equations (1) – (3) serve as the mathematical model for solution of described problem, when there is known a family of boundary conditions that corresponds to different parameters of measurement scheme.

We will name this problem as identification of source distribution (ISD). Traditional approach for solving ISD leads to ill-posed problem. A lot of investigations are dedicated to existence,

uniqueness and construction of numerical solution of this problem [2], but up to now there are not sufficiently general theoretical and constructive results. Known numerical schemes are difficult in computing realization.

Here we propose a new approach for construction of the mathematical model of ISD based on the general ray principle [3] that require some different input data, but give possibility to construct fast algorithms for numerical solution of ISD.

## 2. General ray principle and new mathematical model for ISD

General ray principle [3] consists in considering of physical field as a stream flow of “general rays”. Each one of these rays corresponds to some straight line  $l$ . The mathematical part of the general ray principle consists in reduction a partial differential equation (PDE), to which satisfies the function  $u(x, y)$ , to a family of ordinary differential equations (ODE). Such ODE describes the distribution of the characteristic of the field on the segment of the straight line. To construct the mentioned family of ODE we will use the family of all straight lines  $l$  that intersect the domain  $\Omega$ . Let the line  $l$  has the parametric presentation:

$$x = p \cos \phi - t \sin \phi, \quad y = p \sin \phi + t \cos \phi,$$

where  $|p|$  is a length of the perpendicular, passed from the centre of coordinates to the line  $l$ ,  $\phi$  is the angle between the axis  $X$  and this perpendicular,  $t$  – numerical parameter, changing in limits defined by boundary of the domain [4]. Then, using the Radon idea [4], we shall consider for each line  $l$  equation (1) that describes the characteristic  $u(x, y)$  of the field with corresponding functions  $\varepsilon(x, y)$ ,  $f(x, y)$  for  $(x, y) \in l$  using one dimensional functions (traces)  $\bar{u}(t)$ ,  $\bar{\varepsilon}(t)$  and  $\bar{f}(t)$  of variable  $t$ . In our case the equation (1) for variable  $t$  in one dimensional domain (segment  $[a, b]$  of a straight line  $l$ ) can be written in the next form:

$$\left( \bar{\varepsilon}(t) \bar{u}'_t(t) \right)' = \bar{f}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (4)$$

For simplicity of the next explication let suppose that domain is the circle of radius  $r$ . Hence, we have for every fixed angle  $\phi$  and given  $p$  the next formula for limits of the segment  $[a, b]$  at each line:

$$a = -b = -\sqrt{r^2 - p^2}.$$

We suppose that functions  $v(p, \phi)$  and  $J(p, \phi)$  are given for  $\phi \in [0, \pi]$ ,  $-r < p < r$  and we can write boundary conditions

$$\bar{\varepsilon}(a) \bar{u}'_t(a) = J(p, \phi), \quad (5)$$

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) = v(p, \phi). \quad (6)$$

Equations (4) – (6) are considered as the new type of basic mathematical model for ISD.

### 3. General ray method for solution of ISD

Integrating the equation (4) we obtain the consequence of relations

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(t)\bar{u}'_t(t) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) &= \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\ \bar{u}'_t(t) - \frac{\bar{\varepsilon}(a)}{\bar{\varepsilon}(t)}\bar{u}'_t(a) &= \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\ \bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt &= \int_a^b \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt.\end{aligned}\quad (7)$$

Let us define the function

$$\bar{f}_1(t) = \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi. \quad (8)$$

Clear that there exists one function  $f_1(x, y), (x, y) \in \Omega$ , for which it is fulfilled:

$$\bar{f}_1(t) = f_1(x, y), (x, y) \in l.$$

We also define function

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(x, y)} f_1(x, y), (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

for which obviously the next relation is fulfilled

$$\bar{f}_2(t) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \bar{f}_1(t), (x, y) \in l.$$

We shall consider further extensions of functions  $f(x, y)$ ,  $f_1(x, y)$  and  $f_2(x, y)$  out of the domain  $\Omega$  as zeros. So, we can use the traditional Radon transform  $R$  and write the right hand side of equation (7) as

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt = R[f_2(x, y)](p, \varphi) \quad (10)$$

Using relations (5), (6) we can write the left hand side of (7) in the next form:

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt = v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right], \quad (11)$$



and for variable  $p \notin [-r, r]$  we use extension of this function as zero. So, substituting formulas (10) – (11) to (7), we obtain equation

$$R[f_2(x, y)](p, \varphi) = v(p, \varphi) - (b - a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right],$$

from which and formula (9) we have formula for the function  $f_1(x, y)$ :

$$f_1(x, y) = \varepsilon(x, y)R^{-1}[v(p, \varphi) - (b - a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right]], \quad (12)$$

where  $R^{-1}$  is the inverse Radon transform operator [5].

Hence, we can calculate values of function  $\bar{f}_1(b)$  for every angle  $\phi$  and variable  $p$ . From formula (8) it follows that  $\bar{f}_1(b)$  coincides with the direct Radon transform of the desired function  $f(x, y)$ . So, the final formula of general ray method (*GRM*) for solution of ISD is:

$$f(x, y) = R^{-1}[\bar{f}_1(b)]. \quad (13)$$

*GRM* gives the explicit solution of the ISD problem for considering case. It can be generalized and applied also for any convex domain. The numerical realization of formulas (12) – (13) can be constructed as fast algorithm, because it does not require solving any equation and the Radon transform can be inversed by fast manner using discrete fast Fourier transform algorithm [6].

At the same time, formulas (12) – (13) are unstable with respect of the data perturbation. This instability is initiated by application of two inverse Radon transform and is equivalent to double differentiation [5]. So, in numerical realization of constructed variant of *GR*-method it is necessary to use some regularization [6]. Most simple and fast in its realization is recursive spline smoothing method, based on cubic local basic splines, which guarantees regularization effect for considering case [6].

#### 4. Numerical experiment

Let us consider model numerical example with domain as unit circle and all known functions in equation (1):

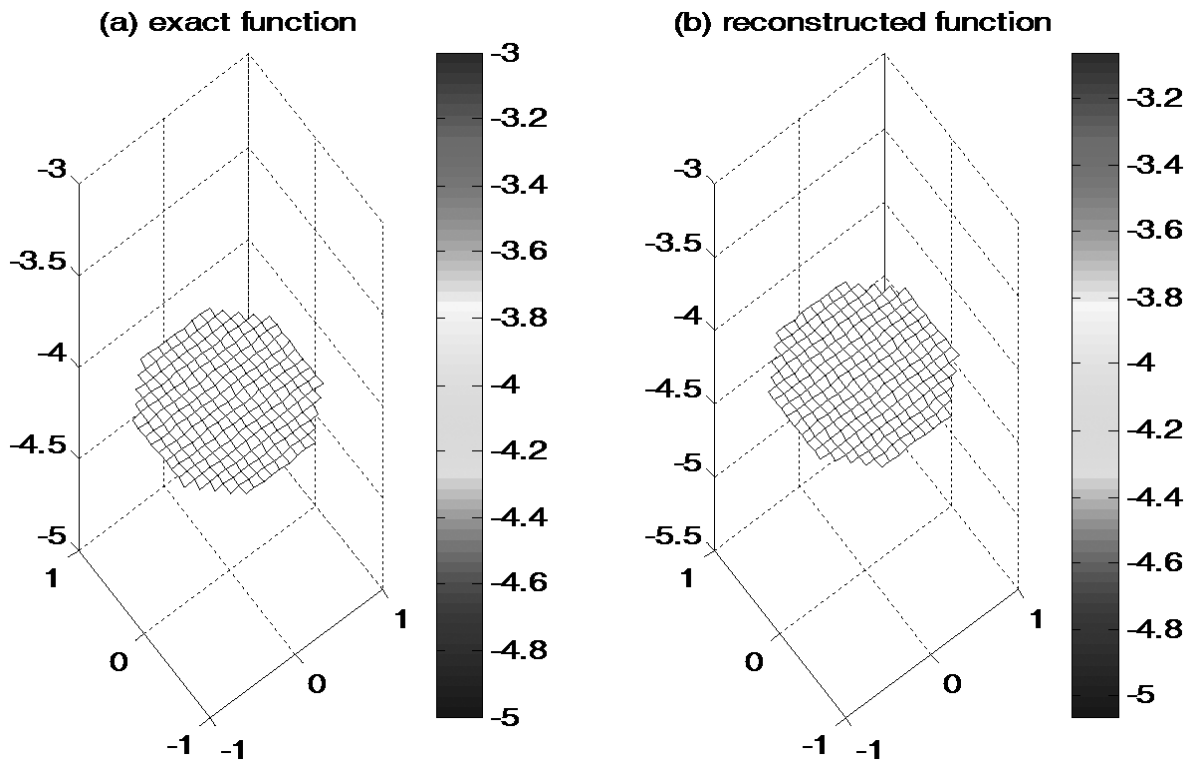
$$\varepsilon(x, y) = 1, \quad u(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad f(x, y) = -4.$$

In this case functions corresponding of the boundary conditions are the following:

$$v(p, \varphi) = 0, \quad J(p, \varphi) = 2\sqrt{1 - p^2}, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad -1 < p < 1.$$

We used discrete values of exact functions  $v(p, \varphi)$  and  $J(p, \varphi)$  at the net with 21x21 nodes as input data. Even for exact input data it was necessary to use regularization with Recursive

Spline Smoothing to obtain appropriated result. At Fig.1 are presented: (a) – exact function  $f(x, y)$ ; (b) – reconstructed function.



**Fig.1.** Results of numerical experiment.

### References

1. O.M. Alifanov. Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
2. R.A. Williams, and M.S. Beck. *Process Tomography: Principles, Techniques and Applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1995.
3. A.I. Grebennikov. A novel approach for solution of direct and inverse problems for some equations of mathematical physics. *Proceedings of the 5-th International conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice* (ed. D. Lesnic), Vol. II, Leeds University Press, Leeds, UK, chapter G04, 1–10, 2005.
4. J. Radon. Über Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integrawerte Langs Gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte Sachsische Academic der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys.* K1. 69, 262–267, 1917.
5. Helganson Sigurdur. The Radon Transform, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1999.
6. V.A. Morozov, and A.I. Grebennikov. *Methods for Solution of Ill-Posed Problems: Algorithmic Aspects*, Moscow University Press, Moscow, 1992 (English edition in 2005).

7. S. Reyes Mora, Alexandre I. Grebennikov, “Unicidad de Solución del Problema Inverso de Identificación de Coeficiente en Ecuación de Tipo Laplace con Condiciones de Contorno Parcialmente Reducidos”. *Boletín de la sociedad cubana de Matemática y Computación*, Numero especial Editorial de Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, M-99, 2009.
8. A. Grebennikov, General Ray Method for Solution of Inverse Coefficient Problems for Laplace Equation. Proceedings of International Conference on Inverse Problems in Engineering, May 4-6, 2011, Orlando, Florida, Centecorp Publishing, USA, 7 – 13.
9. A. I. Grebennikov, J. G. Vázquez Luna, T. Valencia Pérez, M. Najera Enriquez. Realization of Rotating Projection Algorithm for Computer Tomography Using Visual Modeling Components of Matlab Package. Proceedings of the VIII International Scientific-Technical Conference “Computing Modeling 2007”, S.-Petersburg Polytechnic University, pp. 2-5, 2007.

**Alexandre Ivanovich Grebennikov**, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Faculty of Physic and Mathematic Sciences of Merited Autonomous University of Puebla, Mexico. Scientific interests: splines; data processing; inverse and ill-posed problems; fast algorithms in numerical analysis and applications.

E-mail: [agrebe@fcfm.buap.mx](mailto:agrebe@fcfm.buap.mx)

## Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей

А.И. Гребенников

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Av. San Claudio y Río verde, Ciudad Universitaria, CP 72570, Puebla, Pue., México

Предлагается новый быстрый метод для идентификации распределения термостатического источника в неоднородной плоской области. Математическая модель построена на основе принципа обобщенных лучей, предложенного автором для распределения различных полей, в частности - термостатического поля. Предлагаемая модель приводит к новому методу обобщенных лучей, который использует классические явные формулы с обратным преобразованием Радона. Метод реализован в виде быстрых алгоритмов и программ в системе МАТЛАБ и проиллюстрирован численным экспериментом.

*Ключевые слова:* термостатическое поле; идентификация распределения; преобразование Радона.

### 1. Традиционная постановка задачи

В некоторых задачах, связанных с исследованиями в различных областях [1–9], появляется необходимость идентификации источника распределения термостатического поля [1]. В случае плоскости это может математически описываться как обратная задача для восстановления правой части уравнения

$$\nabla(\varepsilon(x, y)\nabla u(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

где  $\Omega$  – некоторая ограниченная область на плоскости,  $\varepsilon(x, y) > 0$  – известная термостатическая характеристика материала,  $u(x, y)$  – неизвестное распределение температуры; функция  $f = f(x, y)$  характеризует распределение искомого источника термостатического поля.

В традиционной постановке [2] предполагается также, что известны функции  $J_n(x, y)$ ,  $u^0(x, y)$  на граничной кривой  $\Gamma$  и соблюдены следующие граничные условия:

$$\varepsilon(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = J_n(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, y) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  нормальная производная в точках контура  $\Gamma$ .

Соотношения (1)–(3) служат математической моделью для решения описанной проблемы, когда известно семейство граничных условий, соответствующих различным параметрам схемы измерения.

Мы назовем эту задачу проблемой идентификации распределения источника (ИРИ). Традиционный подход для решения проблемы «ИРИ» ведет к некорректно поставленной задаче. Много исследований посвящено существованию, единственности и построению численного решения этой проблемы [2], но до сих пор не существует достаточно общих теоретических и конструктивных результатов. Известные численные схемы трудны в реализации вычислений.

Здесь мы предлагаем новый подход для построения математической модели «ИРИ», основанный на принципе обобщенных лучей [3], который требует представления входных данных в несколько иной форме, но дает возможность создавать быстрые алгоритмы для численного решения «ИРИ»

## 2. Принцип обобщенных лучей и новая математическая модель «ИРИ»

Принципе обобщенных лучей [3] состоит в рассмотрении физического поля как потока «обобщенных лучей». Каждый из этих лучей соответствует некоторой прямой линии  $l$ . Математическая часть принципа обобщенных лучей состоит в преобразовании Уравнения в частных производных (УЧП), которому удовлетворяет функция  $u(x, y)$ , в семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Каждое такое семейство ОДУ описывает распределение характеристик поля на сегменте прямой линии. Для конструирования упомянутого семейства ОДУ мы будем использовать семейство всех прямых линий  $l$ , пересекающих область  $\Omega$ . Пусть линия  $l$  имеет параметрическое представление:

$$x = p \cos \phi - t \sin \phi, \quad y = p \sin \phi + t \cos \phi,$$

где  $|p|$  длина перпендикуляра, проходящего от центра координат к линии  $l$ ,  $\phi$  это угол между осью  $X$  и этим перпендикуляром,  $t$  - числовой параметр, меняющийся в пределах, определяемых границей области [4]. Затем, используя идею Радона [4], мы рассмотрим для каждой линии  $l$  уравнение (1), которое описывает характеристику  $u(x, y)$  поля с соответствующими функциями  $\varepsilon(x, y)$ ,  $f(x, y)$  для  $(x, y) \in l$ , используя одномерные функции (traces)  $\bar{u}(t)$ ,  $\bar{\varepsilon}(t)$  и  $\bar{f}(t)$  переменной  $t$ . В нашем случае уравнение (1) для переменной  $t$  в одномерной области (на отрезке  $[a, b]$  прямой линии  $l$ ) может быть записано в следующей форме

$$\left( \bar{\varepsilon}(t) \bar{u}'_t(t) \right)' = \bar{f}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (4)$$

Для простоты последующего изложения предположим, что область является кругом радиуса  $r$ . Следовательно, для каждого фиксированного угла  $\phi$  и заданного  $p$  мы имеем следующую формулу для пределов сегмента  $[a, b]$  на каждой линии:

$$a = -b = -\sqrt{r^2 - p^2}.$$

Мы предполагаем, что заданы функции  $v(p, \phi)$  и  $J(p, \phi)$  для  $\phi \in [0, \pi]$ ,  $-r < p < r$  и мы можем написать граничные условия

$$\bar{\varepsilon}(a) \bar{u}'_t(a) = J(p, \phi), \quad (5)$$

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) = v(p, \phi). \quad (6)$$

Уравнения (4) – (6), рассматриваются как новый тип базовой математической модели для «ИРИ».

## 3. Метод обобщенных лучей для решения «ИРИ»

Интегрируя уравнение (4), мы получаем последовательность соотношений

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}(t)\bar{u}'_t(t) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) &= \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\
 \bar{u}'_t(t) - \frac{\bar{\varepsilon}(a)}{\bar{\varepsilon}(t)}\bar{u}'_t(a) &= \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\
 \bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt &= \int_a^b \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Определим функцию

$$\bar{f}_1(t) = \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Ясно, что существует одна функция  $f_1(x, y), (x, y) \in \Omega$ , для которой выполнено:

$$\bar{f}_1(t) = f_1(x, y), (x, y) \in l.$$

Мы также определим функцию

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(x, y)} f_1(x, y), (x, y) \in \Omega, \tag{9}$$

Для которой, очевидно, выполнено следующее соотношение

$$\bar{f}_2(t) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \bar{f}_1(t), (x, y) \in l.$$

Мы далее будем рассматривать расширения функций  $f(x, y)$ ,  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  вне области  $\Omega$ , полагая их равными нулю. Следовательно, мы можем использовать традиционное преобразование Радона, обозначив преобразование символом  $R$ , и можем записать правую часть уравнения (7) как

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt = R[f_2(x, y)](p, \varphi) \tag{10}$$

Используя соотношения (5) и (6), мы можем записать левую часть уравнения (7) в следующей форме:

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt = v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right], \tag{11}$$

и для переменной  $p \notin [-r, r]$  мы используем расширение этой функции равное нулю. Итак, подставляя формулы (10) – (11) в (7), мы получаем уравнение

$$R[f_2(x, y)](p, \varphi) = v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right],$$

из которого и формулы (9) мы имеем формулу для функции  $f_1(x, y)$ :

$$f_1(x, y) = \varepsilon(x, y)R^{-1}[v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right]], \tag{12}$$

где  $R^{-1}$  есть оператор обратного преобразования Радона [5].

Следовательно, мы можем вычислять значения функции  $\bar{f}_1(b)$  для каждого угла  $\phi$  и переменной  $p$ . Из формулы (8) следует, что  $\bar{f}_1(b)$  совпадает с прямым преобразованием Радона искомой функции  $f(x, y)$ . Таким образом, окончательная формула метода обобщенных лучей (МОЛ) для решения «ИРИ» следующая:

$$f(x, y) = R^{-1}[\bar{f}_1(b)]. \quad (13)$$

МОЛ дает явное решение проблемы «ИРИ» для рассматриваемого случая. Метод можно обобщить и применять также для любой выпуклой области. Численная реализация формул (12)–(13) может быть построена как быстрый алгоритм, потому что она не требует решения никаких уравнений и преобразование Радона может быть инвертировано быстрым способом с использованием дискретного алгоритма быстрого преобразования Фурье [6].

В то же время формулы (12) - (13) являются неустойчивыми соотношениями относительно возмущений в исходных данных. Эта нестабильность инициируется применением двух обратных преобразований Радона и эквивалентна двойному дифференцированию [5]. Следовательно, в численной реализации сконструированного варианта МОЛ необходимо использовать некоторую регуляризацию [6]. Самым простым и быстрым в реализации является метод рекурсивного сплайн сглаживания, основанный на кубический базисных сплайнах, который гарантирует эффект регуляризации для рассмотренного случая [6].

#### 4. Численный эксперимент

Рассмотрим модельный численный пример с областью в форме единичной окружности и со всеми известными функциями в уравнении (1):

$$\varepsilon(x, y) = 1, \quad u(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad f(x, y) = -4.$$

В этом случае функциями, соответствующими граничным условиям, являются следующие:

$$v(p, \phi) = 0, \quad J(p, \phi) = 2\sqrt{1 - p^2}, \quad \phi \in [0, \pi], \quad -1 < p < 1.$$

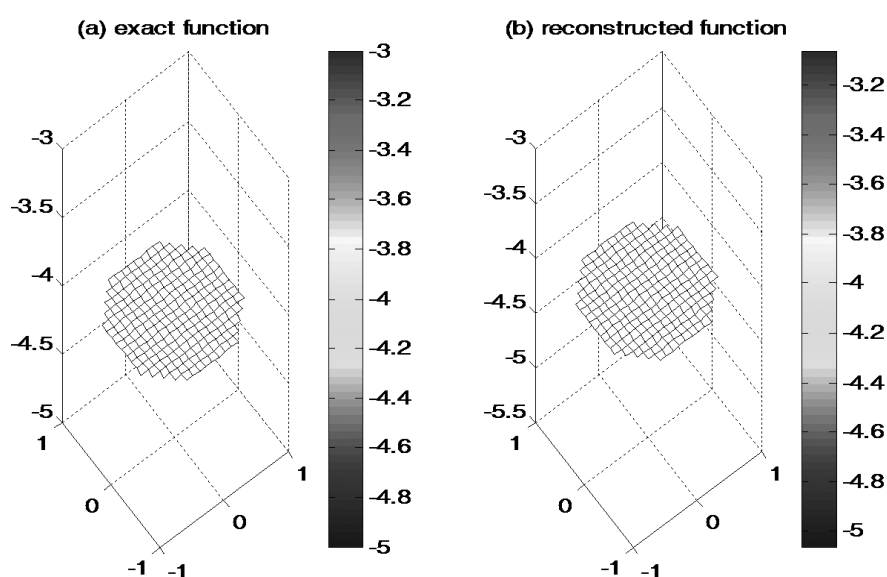


Рис. 1. Результаты численного эксперимента.

Мы использовали дискретные значения точных функций  $v(p, \phi)$  и  $J(p, \phi)$  на сетке с  $21 \times 21$  узлами в качестве входных данных. Даже для точных входных данных было необходимо использовать регуляризацию с Рекурсивным Сплайн Сглаживанием для получения приемлемого результата. На рис.1 представлены: (a) – точная функция  $f(x, y)$ ; (b) – восстановленная функция.

### Литература

1. O.M. Alifanov. Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
2. R.A. Williams, and M.S. Beck. *Process Tomography: Principles, Techniques and Applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1995.
3. A. I. Grebennikov. A novel approach for solution of direct and inverse problems for some equations of mathematical physics. *Proceedings of the 5-th International conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice* (ed. D. Lesnic), Vol. II, Leeds University Press, Leeds, UK, chapter G04, 1–10, 2005.
4. J. Radon. Über Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integrawerte Langs Gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte Sachsische Academic der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys.* K1. 69, 262-267, 1917.
5. Helganson Sigurdur. The Radon Transform, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1999.
6. В.А. Морозов, А.И. Гребенников. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. Изд-во Моск. Ун-та, Москва, 1992 (English edition in 2005).
7. S. Reyes Mora, Alexandre I. Grebennikov, “Unicidad de Solución del Problema Inverso de Identificación de Coeficiente en Ecuación de Tipo Laplace con Condiciones de Contorno Parcialmente Reducidos”. *Boletín de la sociedad cubana de Matemática y Computación*, Numero especial Editorial de Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, M-99, 2009.
8. A. Grebennikov, General Ray Method for Solution of Inverse Coefficient Problems for Laplace Equation. *Proceedings of International Conference on Inverse Problems in Engineering*, May 4-6, 2011, Orlando, Florida, Centecorp Publishing, USA, 7 – 13.
9. A. I. Grebennikov, J. G. Vázquez Luna, T. Valencia Pérez, M. Najera Enriquez. Realization of Rotating Projection Algorithm for Computer Tomography Using Visual Modeling Components of Matlab Package. *Proceedings of the VIII International Scientific-Technical Conference “Computing Modeling 2007”*, S.-Petersburg Polytechnic University, pp. 2-5, 2007.

**Александр Иванович Гребенников**, доктор физическо-математических наук, профессор факультета физико-математических наук Автономного университета (г. Пуэбла, Мексика). Научные интересы: сплайны; обработка данных; обратные и некорректно поставленные задачи; быстрые алгоритмы численного анализа и приложения.



## Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

М.В. Левский

НИИ Космических Систем ГКНПЦ им. М.В. Хруничева,  
141092, Россия, г. Юбилейный Московской области, ул. Тихонравова, 27

Предлагается универсальный подход к решению задач оптимального управления ориентацией космических аппаратов (КА) на основе принципа максимума Понтрягина. Демонстрируется, что в случаях, когда критерий оптимальности (минимизируемый функционал) не содержит в явном виде угловых координат (параметров положения), окончательное решение и оптимальное движение КА не зависят от вида кинематических уравнений (от типа параметров, описывающих угловое положение КА в пространстве). Сопряженная система уравнений, соответствующая кинематике вращения КА, приводится к каноническому виду. Определены такие унифицированные характеристики (аналоги сопряженных переменных), которые позволяют записать необходимые условия оптимальности безотносительно способа описания кинематики вращения КА. Дается сравнительный пример построения оптимального управления для разных вариантов выбора системы кинематических параметров (направляющие косинусы, кватернионы и пр.). Приводится решение известных задач оптимального управления движением КА разработанным методом.

Под управлением пространственной переориентацией понимается приведение связанных с корпусом космического аппарата (КА) осей  $OXYZ$  из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение [1]. При этом угловая ориентация правой прямоугольной системы координат  $OXYZ$  (равно как ее начальное  $OX_{st}Y_{st}Z_{st}$  и конечное  $OX_fY_fZ_f$  положения) определяется относительно выбранного опорного базиса  $\mathbf{I}$ . В работе рассматривается наиболее распространенный случай, когда опорной является инерциальная система координат  $OX_{in}Y_{in}Z_{in}$  (ИСК). Ниже показана возможность решения задач оптимального управления пространственной ориентацией КА с помощью единых математических приемов независимо от выбора кинематических параметров, задающих угловое положение твердого тела относительно инерциальной системы координат (опорного базиса). Необходимые условия оптимальности формулируются в соответствии с принципом максимума Понтрягина.

**Ключевые слова:** оптимальное управление; пространственная ориентация; принцип максимума Понтрягина

### 1. Общая постановка задачи и уравнения движения

Предполагается, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных органов системы ориентации, создающих моменты относительно главных центральных осей инерции КА. Уравнения вращательного движения КА как твердого тела имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \quad J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J_i$  – главные центральные моменты инерции КА,  $M_i$  – проекции главного момента сил  $\mathbf{M}$  на главные центральные оси эллипсоида инерции КА,  $\omega_i$  – проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА ( $i = 1, 2, 3$ ).

Для описания пространственного движения КА вокруг центра масс могут привлекаться различные системы параметров – углы Эйлера (или Крылова), направляющие косину-

сы, кватернион (параметры Родрига-Гамильтона) и др. Наиболее удобными для решения задач управления ориентацией являются направляющие косинусы либо кватернионы, так как в обоих случаях кинематические уравнения имеют линейную форму. Рассмотрим начнем с кватернионов [3], как наиболее простого варианта, имеющего минимальную размерность системы кинематических уравнений движения (используются четыре переменные вместо девяти). Движение связанного базиса **E** относительно опорного базиса **I** будем задавать кватернионом  $\Lambda$ . Для определенности базис **I** считаем инерциальным. В этом случае справедливы следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, & 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, & 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \quad (2)$$

или в кватернионной форме:  $2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega$  [3], где  $\lambda_j$  – компоненты кватерниона  $\Lambda$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), причем  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$  (кватернион  $\Lambda$  считается нормированным [3]).

Управляемым процессом рассматриваем поворотный маневр [1]. Граничные условия задачи оптимального разворота зададим следующими равенствами:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{st}, \quad \Lambda(T) = \Lambda_f \quad (3)$$

и

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(T) = \omega_T \quad (4)$$

где  $T$  – время окончания приведения связанного базиса в требуемое положение.

В статье исследуется случай, когда критерий оптимальности, отражающий физический смысл оптимизации, определяется интегральным функционалом

$$G = \int_0^T g dt \quad (5)$$

где  $g$  – неотрицательная функция времени, не зависящая явно от положения КА.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом: необходимо перевести КА из состояния, соответствующего первому условию (3), в состояние, соответствующее второму условию (3), в соответствии с уравнениями (1) и (2) так, чтобы значение функционала (5) было минимальным. Кроме того, в постановке задачи, как правило, имеется ограничение для управляющих переменных –  $M_i$  или  $\omega_i$  в зависимости от типа решаемой задачи (динамическая или кинематическая задача разворота [3]). Считается, что управляющие переменные принадлежат классу кусочно-непрерывных функций. Если решается динамическая задача разворота, в которой управлением является момент сил **M**, то сформулированную выше задачу оптимального управления необходимо дополнить условиями (4).

Такая постановка охватывает достаточно большой перечень разнообразных задач; к ним относятся как задачи максимального быстродействия (приведение КА в требуемое ориентированное положение за минимальное время), так и оптимизационные задачи с минимизацией величины или суммарного расхода управляющих ресурсов. В частности, в задаче оптимального быстродействия  $g = 1$ , а для задачи управления с минимальными энергозатратами  $g = g(M_1, M_2, M_3)$  – положительно-определенная функция моментов  $M_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Возможны и другие варианты (например, когда  $g$  есть функция угловых скоростей  $\omega_i$  и их производных). Случаи, когда критерий (5) и функция  $g$  зависят от угловых координат, здесь не рассматриваются.

## 2. Методология решения задачи управления ориентацией

Наличие интегрального показателя оптимальности (5) позволяет решить задачу оптимального управления с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [4] и выписать необходимые условия оптимальности в конечной форме – в виде уравнений (дифференциальных и алгебраических). Введем сопряженные переменные  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), соответствующие переменным  $\omega_i$ , и  $\psi_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), соответствующие компонентам кватерниона  $\lambda_j$ . Функция Гамильтона (гамильтониан) имеет вид:  $H = -g + H_{\text{din}} + H_{\text{kin}}$ , где слагаемое  $g$  назовем расходной частью функции  $H$  (она соответствует выбранному критерию оптимальности),  $\partial g / \partial \lambda_j = 0$ ;  $H_{\text{din}}$  – динамическая и  $H_{\text{kin}}$  – кинематическая части.

$$H_{\text{kin}} = -\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)/2 + \psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2)/2 + \\ + \psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3)/2 + \psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1)/2; \\ H_{\text{din}} = \varphi_1\left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3\right) + \varphi_2\left(\frac{M_2}{J_2} + \frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3\right) + \varphi_3\left(\frac{M_3}{J_3} + \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2\right).$$

Запишем уравнения для сопряженных переменных  $\varphi_i$  и  $\psi_j$  [4].

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= -\partial H / \partial \omega_i \quad (i = \overline{1,3}) \\ \dot{\psi}_j &= -\partial H / \partial \lambda_j \quad (j = \overline{0,3}), \end{aligned} \quad (6)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= -(\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_1 = (\psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2)/2, \\ \dot{\psi}_2 &= (\psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_3 = (\psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1)/2 \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем функцию  $H_{\text{kin}}$ , выделив в явном виде угловые скорости  $\omega_i$ , и получим

$$H_{\text{kin}} = \omega_1(\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2 + \omega_2(\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2 + \\ + \omega_3(\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3,$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2; \quad p_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2; \\ p_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2. \end{aligned}$$

Будем полагать, что  $p_1, p_2, p_3$  есть проекции некоторого вектора  $\mathbf{p}$  на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ . Из уравнений (7) следует, что совокупность переменных  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  обладает свойствами кватернионов. Далее принимаем, что сопряженные переменные  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  являются компонентами некоего кватерниона  $\Psi$ , для которого справедливо соотношение  $2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega$ . Тогда введенный нами вектор  $\mathbf{p}$  может быть записан в кватернионной форме  $\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2$ , а кинематическая часть функции  $H$  принимает вид  $H_{\text{kin}} = \omega \cdot \mathbf{p}$ . Здесь  $\text{vect}(\bullet)$  – операция выделения векторной части кватерниона [3],  $\tilde{\Lambda}$  – кватернион, сопряженный кватерниону  $\Lambda$ .

Системы уравнений (2) и (7) имеют одинаковую структуру и являются кинематическими уравнениями для одной и той же угловой скорости  $\omega$ . Решения кинематических уравнений (2) для переменных  $\lambda_j$  и уравнений (7) для сопряженных переменных  $\psi_j$  от-

личаются начальными условиями, а сами кватернионы  $\Psi$  и  $\Lambda$  отличаются на константу (постоянный кватернион).  $\Psi = C_E \circ \Lambda$ , где  $C_E = \text{const}$  – постоянный кватернион. Для совместной невырожденности системы уравнений (2), (7) необходимо и достаточно, чтобы  $\text{vect} C_E \neq 0$  (в противном случае  $\psi_0 : \lambda_0 = \psi_1 : \lambda_1 = \psi_2 : \lambda_2 = \psi_3 : \lambda_3$ , уравнения (2) и (7) не будут независимыми,  $\mathbf{p} = 0$  и решение задачи теряет смысл). Поэтому, для оптимального управления кватернионы  $\Lambda$  и  $\Psi$  считаются не тождественными (функции  $\psi_j$  не пропорциональны переменным  $\lambda_j$ ), и рассматривается только вариант, когда  $\mathbf{p} \neq 0$ .

Дифференцируя выражения для  $p_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и вычислив производные функций  $\lambda_j$  и  $\psi_j$  ( $j = \overline{0,3}$ ) согласно (2) и (7), получим необходимые дифференциальные уравнения для временных функций  $p_i$ . Изменение вектора  $\mathbf{p}$  определяется решением уравнений

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (8)$$

или

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (9)$$

где  $p_i$  – проекции вектора  $\mathbf{p}$  на оси связанного базиса  $\mathbf{E}$ , « $\times$ » – символ операции векторного произведения векторов. Полученное дифференциальное уравнение (9) для вектора  $\mathbf{p}$  отражает его вращение с угловой скоростью  $-\boldsymbol{\omega}$  относительно связанного базиса  $\mathbf{E}$ . В свою очередь сам связанный базис  $\mathbf{E}$  совершает угловое движение относительно опорного базиса  $\mathbf{I}$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , в результате вектор  $\mathbf{p}$  является неподвижным в опорной системе отсчета (по теореме сложения скоростей). Очевидно  $|\mathbf{p}| = \text{const}$ .

Таким образом, задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений (1), (2), (6) и (8) при условии, что само управление выбрано из требования максимизации гамильтониана  $H$ . Граничные значения по угловому положению  $\Lambda_{\text{st}}$  и  $\Lambda_f$  определяют семейство решений  $\mathbf{p}(t)$ , которое имеет вид [3]  $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda$ , где  $\mathbf{c}_E = \Lambda_{\text{st}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{st}} = \text{const}$ . Направление  $\mathbf{c}_E$  зависит от начального и конечного положений КА. Задача нахождения оптимального управления состоит в исследовании динамических уравнений Эйлера (1) и сопряженных им уравнений (6) при указанном движении вектора  $\mathbf{p}$  (согласно (9) или (8)). Система дифференциальных уравнений (8) и (6), если (6) присутствуют (исходя из постановки задачи), совместно с требованием максимальности функции Гамильтона  $H$  являются необходимыми условиями оптимальности. Значение  $\mathbf{p}(0)$  (ему соответствует кватернион  $\Psi(0)$ ) рассчитывается так, чтобы краевая задача принципа максимума имела решение. Уравнения связи выражаются системами уравнений (1), (2) с одновременным выполнением ограничения, накладываемого на движение КА (для каждой конкретной задачи оно свое). Граничные условия и условия максимума функции  $H$  (в рамках допустимых управлений) определяют оптимальное движение  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ; начальное  $\Lambda_{\text{st}}$  и конечное  $\Lambda_f$  положения КА определяют функции  $\Lambda(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$ .

Для переменных  $\varphi_i$  введем вектор  $\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \}$ . Краевая задача принципа максимума заключается в определении  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  и  $\mathbf{p}(0)$ , при которых решение системы дифференциальных уравнений (1), (2), (6), (8) с одновременной максимизацией в каждый момент времени функции Гамильтона  $H$  удовлетворяло условиям разворота (3) (и равенству (4) для динамической задачи разворота). Так как решаемая оптимизационная задача разворота – это задача оптимального управления с закрепленным правым концом, то условия трансверсальности имеют вид  $\varphi_i(T) = v_i$ ,  $\psi_j(T) = v_{j+4}$  ( $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{0,3}$ ), где  $v_1, v_2, \dots$

$v_7$  – числа одновременно не равные нулю [4]. Исходя из того, что сопряженные переменные  $\psi_j$  являются компонентами кватерниона  $\Psi$ , а норма кватерниона  $\|\Psi\| = \text{const} \neq 0$  (это утверждение следует из свойств решения уравнений (7)), приходим к выводу о том, что условия трансверсальности выполняются.

Для новых переменных  $p_i$  условия трансверсальности принимают вид  $|\mathbf{p}(T)| > 0$ . Ранее мы оговорили, что оптимальное решение задачи разворота строится при условии  $\mathbf{p} \neq 0$ . Отличительным свойством вектора  $\mathbf{p}$  является постоянство его величины  $|\mathbf{p}| = \text{const}$  (в силу наличия уравнений (8), как необходимого условия оптимальности). Поэтому  $|\mathbf{p}(T)| = |\mathbf{p}(0)| > 0$ , что указывает на выполнение условий трансверсальности.

При построении оптимальных решений  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t)$  определяющим является значение вектора  $\mathbf{p}$  в момент времени  $t=0$ . По начальному  $\Lambda_{st}$  и конечному  $\Lambda_f$  положениям КА определяется вектор управления на начало разворота  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ . Решая согласно уравнениям (2) краевую задачу принципа максимума, получим расчетное значение вектора  $\mathbf{p}_0$  и соответствующий ему вектор  $\mathbf{c}_E = \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} = \text{const}$ . Значение вектора  $\mathbf{p}$  на момент окончания разворота находится по формуле

$$\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t, \text{ где } \Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f - \text{кватернион разворота.}$$

Конкретный вид функции  $g$  зависит от типа решаемой задачи оптимального управления и используемых системой ориентации КА исполнительных органов. Наличие (или отсутствие) переменных  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), соответствующих переменным  $\omega_i$ , и динамической части  $H_{din}$  в функции Гамильтона  $H$  зависит от того, решается ли кинематическая задача ориентации или динамическая задача. Многообразие задач управления пространственной ориентацией обусловлено всевозможным сочетанием различных критериев оптимальности и ограничений, накладываемых на управляющие переменные (а в некоторых исключительных случаях и на фазовые переменные). При прочих равных условиях задачи максимального быстродействия оказываются более простыми; особой аккуратности требуют задачи, в которых критерий оптимальности включает угловую скорость КА.

В подавляющем числе случаев в задачах на быстродействие считается, что управляющие переменные ограничены (или на движение КА наложено какое-то другое ограничение, формализованный вид которого зависит от конкретного содержания физической постановки задачи управления ориентацией). Именно исходя из этого условия (на множестве возможных управлений), ищется максимум функции Гамильтона и соответствующее ему оптимальное решение –  $\mathbf{M}(t)$  для динамических задач управления и  $\boldsymbol{\omega}(t)$  для кинематических задач управления. В любом случае кинематическая часть функции Гамильтона и соответствующая ей сопряженная система дифференциальных уравнений (как одно из необходимых условий оптимальности) остаются неизменными. Введенный выше вектор  $\mathbf{p}$  в этом смысле становится удобным математическим инструментом, а его использование делает систему уравнений в форме (8) (или (9)), отвечающую за кинематику вращения КА и геометрические свойства оптимального движения, универсальной.

### 3. Схема решения задач оптимального управления ориентацией с использованием матрицы направляющих косинусов

Рассмотрим теперь случай, когда относительное положение связанной и опорной (инерциальной) систем координат определяется матрицей направляющих косинусов. Для направляющих косинусов справедливо следующее уравнение [2]:

$$\dot{A} = -\Omega \cdot A,$$

где  $A = \|a_{ik}\|$  – матрица направляющих косинусов ( $i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$ );

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \text{ – матрица угловых скоростей в связанной системе координат}$$

(ССК);  $a_{ik}$  – косинус угла между  $i$ -й осью ССК и  $k$ -й осью ИСК (опорного базиса).

Уравнение связи выглядит следующим образом:  $A^{-1} = A^T$ , где  $A^T$  – транспонированная по отношению к  $A$  матрица. В развернутой форме кинематические уравнения для направляющих косинусов выглядят так

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}, \quad \dot{a}_{12} = \omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}, \quad \dot{a}_{13} = \omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33} \\ \dot{a}_{21} &= \omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}, \quad \dot{a}_{22} = \omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}, \quad \dot{a}_{23} = \omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13} \\ \dot{a}_{31} &= \omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}, \quad \dot{a}_{32} = \omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}, \quad \dot{a}_{33} = \omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23} \end{aligned} \quad (10)$$

Это известные уравнения Пуассона [5].

Граничные условия задачи оптимального разворота аналогичны (3)

$$A(0) = A_{st}, \quad A(T) = A_f \quad (11)$$

Введем сопряженные переменные  $b_{ik}$ , соответствующие переменным  $a_{ik}$ . В направляющих косинусах кинематическая часть  $H_k$  функции Гамильтона выглядит так

$$\begin{aligned} H_k &= b_{11}(\omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}) + b_{12}(\omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}) + b_{13}(\omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33}) + \\ &+ b_{21}(\omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}) + b_{22}(\omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}) + b_{23}(\omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13}) + \\ &+ b_{31}(\omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}) + b_{32}(\omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}) + b_{33}(\omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23}) \end{aligned}$$

Расходная и динамическая (если она необходима) части функции Гамильтона остаются без изменений (так как они не зависят от кинематических параметров по положению);  $\partial g / \partial a_{ik} = 0$ ,  $\partial H_{\text{дин}} / \partial a_{ik} = 0$ . Выпишем сопряженную систему уравнений [4]

$\dot{b}_{ik} = -\partial H / \partial a_{ik}$  ( $i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$ ), а в развернутом виде

$$\begin{aligned} \dot{b}_{11} &= \omega_3 b_{21} - \omega_2 b_{31}, \quad \dot{b}_{12} = \omega_3 b_{22} - \omega_2 b_{32}, \quad \dot{b}_{13} = \omega_3 b_{23} - \omega_2 b_{33} \\ \dot{b}_{21} &= \omega_1 b_{31} - \omega_3 b_{11}, \quad \dot{b}_{22} = \omega_1 b_{32} - \omega_3 b_{12}, \quad \dot{b}_{23} = \omega_1 b_{33} - \omega_3 b_{13} \\ \dot{b}_{31} &= \omega_2 b_{11} - \omega_1 b_{21}, \quad \dot{b}_{32} = \omega_2 b_{12} - \omega_1 b_{22}, \quad \dot{b}_{33} = \omega_2 b_{13} - \omega_1 b_{23} \end{aligned} \quad (12)$$

Объединив переменные  $b_{ik}$  в матрицу  $B = \|b_{ik}\|_{3 \times 3}$ , запишем систему уравнений для сопряженных переменных в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \dot{b}_{11} & \dot{b}_{12} & \dot{b}_{13} \\ \dot{b}_{21} & \dot{b}_{22} & \dot{b}_{23} \\ \dot{b}_{31} & \dot{b}_{32} & \dot{b}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \dot{B} = -\Omega \cdot B,$$

где  $\Omega$  – матрица угловых скоростей, раскрытая выше.

Из полученной системы дифференциальных уравнений видно, что переменные  $b_{ik}$  могут быть приняты за величины, пропорциональные направляющим косинусам. Так как уравнения (10) для фазовых переменных  $a_{ik}$  и уравнения (12) для сопряженных переменных  $b_{ik}$  однотипны и являются кинематическими уравнениями для одной и той же угловой скорости  $\omega$  (в правых частях уравнений (10) и (12) фигурирует одни и те же функции  $\omega_i$ ), то матрицы  $A$  и  $B$  отличаются на постоянную матрицу  $C$ , которая не меняется со временем. Решение сопряженной системы уравнений (12) имеет вид  $B = A \cdot C$ , где  $C = \text{const}$  ( $C = \|c_{ik}\|_{3 \times 3}$ ,  $c_{ik} = \text{const}$ ). Сгруппировав и выделив в явном виде множители при  $\omega_i$ , представим функцию  $H_k$  в виде:  $H_k = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ , где

$$\begin{aligned} r_1 &= b_{21}a_{31} + b_{22}a_{32} + b_{23}a_{33} - b_{31}a_{21} - b_{32}a_{22} - b_{33}a_{23}, \\ r_2 &= b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} - b_{11}a_{31} - b_{12}a_{32} - b_{13}a_{33}, \\ r_3 &= b_{11}a_{21} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{23} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{12} - b_{23}a_{13}. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы при любом  $t \in [0, T]$  не выполнялись равенства  $a_{ik} = \chi b_{ik}$  ( $\chi$  – некоторая скалярная величина), потому что при их выполнении  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  и дальнейшее решение задачи теряет смысл.

Изучим свойства решения  $B(t)$  системы сопряженных уравнений (12). Из физического смысла следует, что сопряженные переменные  $b_{ik}$  есть числа, пропорциональные направляющим косинусам между осями КА и положительными направлениями осей неподвижной (зафиксированной в инерциальном пространстве) системы координат, а матрица  $B$ , составленная из элементов  $b_{ik}$ , – матрица перехода от какой-то не вращающейся (по сути инерциальной), но не совпадающей с опорной  $I$ , системы координат к связанной с КА системе координат, умноженная на постоянный множитель. Естественно, матрицы  $A$  и  $B$  разные,  $B \neq A$ . Системы уравнений (10) и (12) однотипны относительно коэффициентов  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Решения кинематических уравнений (10) для переменных  $a_{ik}$  и (12) для переменных  $b_{ik}$  отличаются начальными условиями, а сами матрицы  $A$  и  $B$  отличаются на постоянную матрицу  $B = A \cdot C$ , где  $C = \text{const}$  ( $\dot{B} = \dot{A} \cdot C = -\Omega \cdot A \cdot C = -\Omega \cdot B$ ).

При определении оптимального управления матрицы  $A$  и  $B$  считаются не тождественными (функции  $b_{ik}$  не пропорциональны переменным  $a_{ik}$ ), и рассматривается только вариант  $r \neq 0$ . Дифференцируя по времени равенства для  $r_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и подставляя в них выражения для  $\dot{a}_{ik}$  и  $\dot{b}_{ik}$ , получим дифференциальные уравнения для временных функций  $r_i(t)$ . Так, в итоге будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= b_{21}\dot{a}_{31} + \dot{b}_{21}a_{31} + b_{22}\dot{a}_{32} + \dot{b}_{22}a_{32} + b_{23}\dot{a}_{33} + \dot{b}_{23}a_{33} - b_{31}\dot{a}_{21} - \dot{b}_{31}a_{21} - b_{32}\dot{a}_{22} - \\ &- \dot{b}_{32}a_{22} - b_{33}\dot{a}_{23} - \dot{b}_{33}a_{23} = \omega_2(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{23}a_{13} - b_{11}a_{21} - b_{12}a_{22} - b_{13}a_{23}) + \\ &+ \omega_3(b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} - b_{11}a_{31} - b_{12}a_{32} - b_{13}a_{33}) = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получим и для переменных  $r_2, r_3$ . Изменение вектора  $r = \{r_1, r_2, r_3\}$  определяется решением системы уравнений

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2 \quad (13)$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

где  $r_i$  – проекции вектора  $\mathbf{r}$  на оси связанной системы координат.

Полученное дифференциальное уравнение (14) для вектора  $\mathbf{r}$  указывает на вращение его с угловой скоростью  $-\boldsymbol{\omega}$  относительно связанной системы координат (базиса  $\mathbf{E}$ ). В свою очередь сам связанный базис  $\mathbf{E}$  поворачивается относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , в результате чего вектор  $\mathbf{r}$  остается неподвижным в инерциальной системе отсчета (согласно теореме сложения скоростей) и  $|\mathbf{r}| = \text{const}$ . Уравнения (13) и (14) полностью аналогичны уравнениям (8) и (9) для вектора  $\mathbf{p}$ .

Таким образом, и в случае использования направляющих косинусов задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений (1), (6), (10) и (13) при условии, что само управление выбирается из требования максимальности гамильтониана. Граничные условия по угловому положению (матрицы  $A_{st} = A(0)$  и  $A_f = A(T)$ ) определяют семейство решений  $\mathbf{r}(t)$ , которое имеет вид  $\mathbf{r}(t) = A\mathbf{c}_t$ , где  $\mathbf{c}_t = A^T(0)\mathbf{r}(0) = \text{const}$ ;  $A^T$  – транспонированная по отношению к  $A$  матрица.

Краевая задача принципа максимума состоит в нахождении таких значений  $\boldsymbol{\phi}(0)$  и  $\mathbf{r}(0)$ , которые будучи приняты за начальные условия вместе с первым равенством (11) (и (4) для динамической задачи разворота) приводят движение системы уравнений (1), (10), (6), (13), удовлетворяющее в каждый момент времени  $t$  условиям максимума функции Гамильтона  $H$ , к выполнению второго равенства (11) (а также равенства (4), если решается динамическая задача разворота). Граничные условия и условия максимума функции  $H$  (в рамках допустимых управлений) определяют оптимальное движение  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ; начальное  $A_{st}$  и конечное  $A_f$  положения определяют решения  $A(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$ . Как и ранее, вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  должна удовлетворять равенству  $\mathbf{r}(T) = A_f A_{st}^T \mathbf{r}(0) = A_t \mathbf{r}_0$ , где  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ ;  $A_t = A_f A_{st}^T$  – матрица направляющих косинусов осей связанной системы координат в конечный момент времени относительно положения связанной системы координат в начальный момент времени (верхний индекс  $T$  означает, что матрица транспонированная).

В силу того, что решаемая задача оптимизации разворота – это задача оптимального управления с закрепленным правым концом, условия трансверсальности имеют вид

$\varphi_i(T) = w_i$ ,  $b_{kl}(T) = w_{l+3k}$  ( $k = \overline{1,3}$ ,  $l = \overline{1,3}$ ), где  $w_1, w_2, \dots, w_{12}$  – числа одновременно не равные нулю [4, 6]. Сопряженные переменные  $b_{kl}$  пропорциональны некоторым направляющим косинусам (имеют свойства направляющих косинусов), и поэтому все  $b_{kl}$  не могут быть одновременно равны нулю, в том числе и на конечный момент времени  $t = T$  (это утверждение следует из свойств решения уравнений (12)). В итоге, условия трансверсальности всегда выполняются. Условия трансверсальности для новых переменных  $r_i$  принимают вид  $|\mathbf{r}(T)| > 0$ . Выше мы оговорили, что оптимальное решение задачи разворота строится при условии  $\mathbf{r} \neq 0$ . Ключевым свойством вектора  $\mathbf{r}$  является постоянство его величины  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  (в силу наличия необходимого условия оптимальности в виде уравнений (13)). Поэтому  $|\mathbf{r}(T)| = |\mathbf{r}(0)| > 0$ , и дополнительный анализ выполнения условий трансверсальности для переменных  $r_i$  (или  $b_{ik}$ ) не требуется.

Получили необходимые условия оптимальности и соотношения для переменных  $r_i$ , аналогичные тем, что имели место при решении задачи оптимального управления ориентацией КА на базе кватернионов. Сравнивая кинематические части функции Гамильтона, записанные в кватернионных переменных и в направляющих косинусах, а также учиты-



вая дифференциальные уравнения (8), (13) для векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$ , приходим к однозначному выводу – функции Гамильтона  $H_{\text{kin}}$  (записанная для кватерниона  $\Lambda$ ) и  $H_k$  (записанная для матрицы  $A$  направляющих косинусов) тождественны, если считать  $\mathbf{r} = \mathbf{p}$ . Таким образом доказано, что для задач, в которых оптимизируемый функционал не содержит в явном виде позиционных координат, вид кинематической части функции Гамильтона (а значит и самой функции Гамильтона) не зависит от типа переменных, которыми описывается пространственное положение связанной системы координат относительно опорной системы координат и определяется как  $H_{\text{kin}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$  независимо от формы кинематических уравнений, где вектор  $\mathbf{r}$  неподвижен в инерциальной системе координат, так как  $\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$ .

Следовательно, оптимальное управление и движение КА вокруг центра масс (как результат применения принципа максимума) не зависят от формы кинематических уравнений (т.е. от выбора переменных, задающих движение связанных осей относительно опорного базиса). Введенный вектор  $\mathbf{r}$ , неподвижный в инерциальной системе координат, является универсальным, а его компоненты  $r_i$  могут рассматриваться как универсальные сопряженные переменные при решении задач оптимального управления вращениями твердого тела с помощью принципа максимума. Использование вектора  $\mathbf{r}$  позволяет найти не только необходимые условия оптимальности и формализовать их, но и определить характер (ключевые свойства) оптимального управления и построить оптимальное движение  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , отвечающее заданному критерию оптимальности.

Таким образом, решение задачи оптимального управления ориентацией КА сводится к решению замкнутой системы дифференциальных уравнений, вид которой не зависит от типа кинематических параметров (будь то кватернион или направляющие косинусы), и интегрированию системы кинематических уравнений движения КА относительно центра масс, записанной в том виде, который наиболее удобен для решения конкретной задачи. Унифицированная (общая) часть системы уравнений основывается на использовании переменных  $r_i$  – составляющих вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего основные свойства оптимального движения  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Структура оптимального управления определяется однозначно решением замкнутой системы девяти – для динамической задачи (или трех – для кинематической задачи) дифференциальных уравнений, при котором соответствующая функция Гамильтона  $H$  максимальна; именно условие максимальности функции Гамильтона делает систему девяти (или трех) дифференциальных уравнений замкнутой и дает уравнение связи управляющих переменных с фазовыми (или сопряженными) координатами. Конкретное оптимальное решение задачи переориентации (оптимальное значение  $\mathbf{r}_0$  и оптимальные функции  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$ ) определяются решением кинематических уравнений ( $\Lambda(t)$  или  $A(t)$ ), удовлетворяющим начальному и конечному положениям связанной системы координат.

Структура системы уравнений, определяющих оптимальное (по Понтрягину) решение, схематично изображена на рис.1. Структурная схема в верхней части рис.1 соответствует кинематической задаче ориентации, а в нижней части рис.1 – динамической задаче ориентации. Для кинематической задачи управляющей функцией служит вектор-функция  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \Theta$ , где  $\Theta$  – область допустимых движений; для динамической задачи – вектор-функция  $\mathbf{M}(t) \in U$ , где  $U$  – область возможных управлений. В обоих случаях оптимальное движение  $\boldsymbol{\omega}(t)$  определяется однозначно (в случае решения динамической задачи оптимального управления оптимальная функция  $\boldsymbol{\omega}(t)$  вычисляется путем подстановки найденного решения  $\mathbf{M}(t)$  в уравнения (1) и интегрированием системы (1) с начальными условиями  $\boldsymbol{\omega}(0)$ , которые заданы по условиям исходной задачи управления

ориентацией КА, и поэтому они известны). Вид кинематических уравнений влияет лишь на выбор способа решения краевой задачи принципа максимума (в части удовлетворения граничным условиям по положению). Решение основной задачи – определение оптимальных управляющих функций – не зависит от типа кинематических параметров движения вокруг центра масс, а оптимальное вращение КА определяют требование максимальности функции Гамильтона и замкнутая система трех (для кинематических задач ориентации) или девяти (для динамических задач ориентации) дифференциальных уравнений, которые имеют универсальную форму. Интегрирование замкнутой системы уравнений даст оптимальное движение  $\omega(t)$ , качественный вид которого инвариантен относительно формы кинематических уравнений, описывающих угловое движение КА.

В задачах управления, когда функция  $g$  в интеграле (5) не зависит явным образом от угловых скоростей  $\omega_i$ , сопряженные уравнения (6) могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= -\omega_3 n_2 \varphi_2 - \omega_2 n_3 \varphi_3 - r_1, \quad \dot{\varphi}_2 = -\omega_3 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_3 \varphi_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= -\omega_2 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_2 \varphi_2 - r_3\end{aligned}\quad (15)$$

где  $n_1 = (J_2 - J_3)/J_1$ ,  $n_2 = (J_3 - J_1)/J_2$ ,  $n_3 = (J_1 - J_2)/J_3$  есть постоянные коэффициенты.

Продemonстрируем технику построения оптимального управления ориентацией КА, основанную на использовании универсальных переменных  $r_i$ , на конкретных примерах.

#### 4. Пример решения динамической задачи разворота

Рассмотрим задачу оптимального управления разворотом КА из одного стабилизированного положения (состояния покоя) в другое стабилизированное положение, когда управлением (т.е. управляющей функцией) является момент сил  $\mathbf{M}$  (в этом случае в условии (4) значения  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_T = 0$ ). Пусть необходимо минимизировать величину

$$\int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt \quad (16)$$

а область  $U$  возможных управлений описывается неравенством

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \leq m_0^2 \quad (17)$$

где  $m_0 = \text{const} > 0$  – максимально допустимая величина управляющего момента  $\mathbf{M}$ .

Функционал (16) является типовым и характеризует работу управляющих сил.

Движение связанной системы координат относительно инерциальной системы координат (опорного базиса) зададим кватернионом  $\Lambda(t)$ . Конкретная постановка задачи оптимального управления состоит в следующем: необходимо КА перевести из состояния, соответствующего первому условию (3), в состояние, соответствующее второму условию (3), в соответствии с уравнениями (1), (2) при наличии ограничения (17) и равенств (4) так, чтобы значение функционала (16) было минимальным.

Критерий оптимальности в явном виде включает моменты  $M_i$ , поэтому размерность краевой задачи принципа максимума наибольшая и равна тринадцати (при использовании направляющих косинусов она больше – восемнадцать). Сопряженные переменные  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) соответствуют переменным  $\omega_i$  вектора состояния динамической системы, а сопряженные переменные  $\psi_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) соответствуют компонентам кватерниона  $\lambda_j$ . Запишем функцию Гамильтона для решаемой задачи (1)–(4), (16)–(17).

$$H = H_{\text{din}} + H_{\text{kin}} - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = \\ = M_1 \varphi_1 / J_1 + M_2 \varphi_2 / J_2 + M_3 \varphi_3 / J_3 - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2 + H_{\text{inv}},$$

где  $H_{\text{kin}} = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3$ ;  $H_{\text{inv}}$  не зависит явно от управляющих функций  $M_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Решение  $\mathbf{M}(t)$  ищется в классе кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию (17). Сделав замену переменных  $\mu_i = \varphi_i / J_i$ , представим функцию  $H$  в виде

$$H = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mu} - \mathbf{M}^2 + H_{\text{inv}} = |\mathbf{M}| (|\boldsymbol{\mu}| \cos \gamma - |\mathbf{M}|) + H_{\text{inv}},$$

где  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ ,  $\gamma$  – угол между векторами  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ .

Функция Гамильтона  $H$  при ограничении  $|\mathbf{M}| \leq m_0$  принимает максимальное значение, если  $\gamma = 0$ , векторы  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  одинаково направлены, а величина момента  $|\mathbf{M}|$  равна  $m_0$ , если  $|\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0$ , или  $|\boldsymbol{\mu}|/2$ , если  $|\boldsymbol{\mu}| < 2m_0$ . Рис.2 наглядно поясняет сказанное (максимум функции  $H$  по параметру  $m = |\mathbf{M}|$  ищется на отрезке  $0 \leq m \leq m_0$ ). Оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{M} = m_0 \boldsymbol{\mu} / |\boldsymbol{\mu}|, \text{ если } |\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0; \text{ или } \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} / 2, \text{ если } |\boldsymbol{\mu}| < 2m_0;$$

а для моментов

$$M_i = \frac{m_0 \varphi_i}{J_i \sqrt{\varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2}}, \text{ if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 \geq 4m_0^2 \quad (18)$$

$$M_i = \varphi_i / (2J_i), \quad \text{if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 < 4m_0^2$$

Поскольку минимизируемый функционал (16) не зависит явным образом от угловых скоростей  $\omega_i$ , то уравнения (6) принимают форму (15), в которых  $r_i = p_i$ . Оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), (8), (15) и (18). В общем виде решить ее не представляется возможным, интегрирование этой системы уравнений наталкивается на математические трудности и сопряжено со значительными вычислительными затратами. Тип разворота достаточно сложный и не имеет аналитического описания (в виде конечных уравнений). Поэтому краевая задача принципа максимума (определение численных значений  $\mathbf{p}(0)$  и  $\boldsymbol{\varphi}(0)$ ) может быть решена исключительно численными методами (например, методом прогонки [6] и др.).

Для частного случая, когда  $J_1 = J_2 = J_3$ , существует аналитическое решение сформулированной задачи (1), (2), (3), (4), (16), (17) и это решение единственно. В этом случае  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  и системы уравнений (1) и (15) существенно упрощаются – они становятся линейными и приобретают вид  $\dot{\omega}_i = M_i / J_i$  и  $\dot{\varphi}_i = -p_i$ . Решение последних дифференциальных уравнений совместно с уравнениями (8), (18) и равенством (4) имеет вид:

$$\varphi_i = a(t) p_i \quad (19)$$

где  $a(t)$  скалярная функция времени ( $i = \overline{1,3}$ ).

Решение (19) единственно. Обозначим  $\varepsilon$  – угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ ). Из (18) следует, что векторы  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  имеют одинаковое направление (так как  $J_1 = J_2 = J_3$ ). Если  $\varepsilon \neq 0$  и  $\varepsilon \neq \pi$ , то  $d|\boldsymbol{\omega}|/dt > 0$  всегда, на всем отрезке времени  $0 \leq t \leq T$ , включая  $t = T$ . В такой ситуации граничное условие  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  не будет выполнено. Значит любое

решение, при котором  $\varepsilon \neq 0$  и  $\varepsilon \neq \pi$  (т.е.  $\varphi(0) \neq a \mathbf{p}(0)$ , где  $a$  – некоторое число), не достигнет цели разворота и не приведет КА в требуемое состояние  $\omega(T) = 0$ ,  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ . Остается единственное решение  $\varphi(t) = a(t)\mathbf{p}(t)$ , удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности (8), (15), (18) (в соответствии с принципом максимума) и граничным условиям (3), (4) для решения  $\omega(t)$ ,  $\Lambda(t)$  уравнений движения (1), (2).

Подставим функции  $\varphi_i$ , вычисленные по формулам (19), в уравнения (15), приняв во внимание. В результате получим соотношения  $\dot{a} = -1$  и  $\dot{p}_i = 0$  для всех  $i = \overline{1,3}$  (а следовательно,  $|\mathbf{p}| = \text{const}$ ). Для этого достаточно продифференцировать левые и правые части равенств (19), взять квадраты от левой и правой частей полученного после дифференцирования равенства и вместо  $\dot{p}_i$  подставить правые части уравнений (8).

$$\dot{a}^2 + a^2(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2)/(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 1$$

Это первое уравнение (напомним  $\mathbf{p} \neq 0$ ). Теперь умножим уравнения  $p_i \dot{a} + \dot{p}_i a = -p_i$  на  $p_i$  слева и справа и сложим полученные равенства. Получим второе уравнение

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dot{a} = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

откуда  $\dot{a} \equiv -1$ , а из первого уравнения  $\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2 = 0$ , что возможно только, если  $\dot{p}_i = 0$ .

Случай  $\varepsilon = \pi$  ( $\varphi(0) \cdot \mathbf{p}(0) < 0$ ) не рассматривается, так как тогда в силу (15) вектор  $\varphi$  будет все время иметь одно и то же направление, противоположное направлению вектора  $\mathbf{p}$ , и при этом возрастать по величине (как следует из (15)). Момент  $\mathbf{M}$  также будет в этом случае иметь постоянное направление и возрастать по величине (с начального уровня до порогового значения  $m_0$ ), и граничное условие задачи (4) не сможет быть выполнено, а значит такое решение недопустимо. В итоге оптимальное решение для сопряженных переменных  $\varphi_i$  перепишем в виде  $\varphi_i(t) = (a(0) - t)p_i$ , где  $p_i = \text{const} = p_i(0)$ .

Учитывая соотношения (19), связывающие сопряженные переменные  $\varphi_i$  и  $p_i$ , и условие (18) максимума функции Гамильтона, оптимальное управление (моменты  $M_i$ ) удовлетворяет уравнению

$$M_i = \chi(t)p_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (20)$$

где  $\chi(t)$  – скалярная функция времени, отвечающая неравенству  $-m_0 \leq \chi(t) \leq m_0$ .

Разворот КА осуществляется из состояния покоя. Решая дифференциальные уравнения (1) совместно с равенствами (20), будем иметь  $J_i \dot{\omega}_i = \chi(t)p_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ .

Решение  $\omega(t)$  получается интегрированием приведенной системы дифференциальных уравнений с учетом (8) и с начальными условиями  $\omega(0) = 0$ . В окрестности точки  $t = 0$  будет  $J_i \omega_i = J_i \dot{\omega}_i dt = \chi dt p_i$ . Дальнейшее интегрирование указанной системы уравнений совместно с системой (15) для начальных условий  $\omega_i(0) = 0$  приводит к равенству

$$J_i \omega_i = p_i \int_0^t \chi dt.$$

Действительно, подставляя указанное равенство в последнюю систему дифференциальных уравнений, получим тождества  $J_i \dot{\omega}_i = \dot{p}_i \int_0^t \chi dt + p_i \chi = p_i \chi = M_i \equiv J_i \dot{\omega}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

Имея в виду, что  $J_i \omega_i = L_i$ ,  $|\mathbf{L}| = \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2}$ , а  $\int_0^t \chi dt = f(t)$  – есть скалярная

величина, заключаем, что при оптимальном движении  $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$  и  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{p}$  (так как  $J_1 = J_2 = J_3$ ). Если в начальный момент времени  $a(t) > 0$ , то с момента  $t=0$  векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{p}$  будут иметь одинаковое направление. В силу (15) для переменных  $\varphi_i$  необходимо, чтобы  $\dot{a} < 0$ . Поэтому  $a(0) > 0$  (в противном случае  $\text{sign}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}) = \text{const}$  и условие  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  не сможет выполняться никогда). Таким образом доказано, что в оптимальном по критерию (16) движении сферически симметричного КА вектор  $\mathbf{L}$  кинетического момента имеет постоянное направление, а величина его меняется с нуля до максимального значения и обратно до нуля. КА вращается вокруг оси Эйлера с изменяющейся по величине угловой скоростью (направление вектора угловой скорости остается неизменным). Угловое ускорение максимально в начале разворота, затем оно уменьшается до нуля, меняет знак и начинает гасить угловую скорость с нарастающей интенсивностью (увеличивается по модулю, достигая максимально отрицательного значения).

Анализируя необходимые условия оптимальности (8), (15), (18) совместно с уравнениями движения (1), (2) приходим к выводу, что формально в рамках решения (19) возможны два сочетания функций  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$ . В первом случае вращение КА из положения  $\Lambda_{st}$  в положение  $\Lambda_f$  происходит в направлении минимального угла разворота ( $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \geq 0$ ). Написание  $\text{sqal}(\bullet)$  означает операцию выделения скалярной части кватерниона [3]. Вторая комбинация  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  соответствует повороту КА из положения  $\Lambda_{st}$  в положение  $\Lambda_f$  в направлении, противоположном минимальному углу разворота ( $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \leq 0$ ). Очевидно, последний случай не может считаться оптимальным, так как при одном и том же времени разворота  $T$  потребуется большая средняя скорость вращения, а значит значение показателя (16) будет заведомо больше, чем в первом случае, когда  $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \geq 0$ . Таким образом, решение задачи (1)–(4), (16), (17) – начальные условия  $p_i(0)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  и оптимальные функции  $\varphi_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  – определяется однозначно (оно единственно для заданных значений  $\Lambda_{st}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $m_0$ ,  $J_i$ ,  $T$ ). Поэтому оптимальное значение  $\mathbf{p}(0)$  принимаем равным

$\mathbf{p}(0) = \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) / |\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)|$  (здесь  $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \neq 0$ , иначе  $\Lambda_{st} \equiv \Lambda_f$  и разворот не нужен, оптимальное управление –  $\mathbf{M} = 0$ ).

Более подробное изучение программных функций  $M_i(t)$  и свойств оптимального движения  $\boldsymbol{\omega}(t)$  (в том числе временных характеристик) – отдельная тема и требует самостоятельной детальной проработки. Скажем лишь, что в зависимости от условий разворота (угла конечного поворота  $\vartheta = 2\arccos(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f))$ , времени разворота  $T$  и соотношения максимального момента  $m_0$  к моменту инерции КА  $J_1 = J_2 = J_3$ ) возможны три варианта оптимального управления и, соответственно, три оптимальных движения:

1) вращение с максимальным моментом  $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$ , направленным по положительному направлению оси Эйлера; затем движение с линейно уменьшающимся по величине (с  $m_0$  до нуля) моментом  $\mathbf{M}$ , направленным по вектору  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости ( $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$ ); далее движение с линейно увеличивающимся по величине (с нуля до  $m_0$ ) моментом  $\mathbf{M}$ , но имеющим противоположное с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  направление ( $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$ ); и последняя фаза – вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$ , направленным противоположно положительному направлению оси Эйлера.

2) вращение с линейно уменьшающимся по модулю (с некоторого  $m(0)$  до нуля) моментом  $\mathbf{M}$ , направленным по положительному направлению оси Эйлера ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} > 0$ ), и затем вращение с линейно увеличивающимся по модулю (с нуля до  $m(0)$ ) моментом  $\mathbf{M}$ , но имеющим противоположное с угловой скоростью  $\omega$  направление ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} < 0$ );  $m(0) \leq m_0$ .

3) вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$ , направленным по положительному направлению оси Эйлера, а затем вращение с максимально возможным моментом  $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$  противоположного направления. Это – релейное управление, и оно соответствует максимальному быстродействию (развороту КА за минимальное время). Описанные типы разворота наглядно отражает рис.3. Здесь предполагается, что управляющий момент представлен в виде  $\mathbf{M} = s(t)\mathbf{p}$ , где  $s(t)$  – скалярная функция времени, а  $|\mathbf{p}| = 1$ . Верхняя часть рис.3 соответствует первому типу оптимального движения (линейное управление с насыщением), средняя часть – второму типу (линейное управление) и нижняя часть – третьему типу (релейному управлению). Для нулевых граничных угловых скоростей ( $\omega(0) = \omega(T) = 0$ ) времена  $t_1, t_2$  удовлетворяют уравнению  $t_1 + t_2 = T$ . Второй тип управления реализуется в случае, если заданное  $T$  велико (разворот совершается с относительно малой угловой скоростью).

Для всех трех типов управления смена направления момента  $\mathbf{M}$  происходит в точке  $t = T/2$ . Если величина момента  $|\mathbf{M}|$  линейно изменяется, то в момент времени  $t = T/2$  момент  $\mathbf{M}$  равен нулю ( $\mathbf{M}(T/2) = 0$ ). Если реализуется релейное управление ( $T$  – минимально возможное значение), то момент времени  $t = T/2$  – точка переключения (в этот момент времени все три управляющие функции  $M_i$  меняют свой знак на обратный). Следует подчеркнуть, что не всегда при заданных значениях  $\Lambda_{st}, \Lambda_f, m_0, J_i$  можно осуществить разворот за отведенное время  $T$ . Если соотношение параметров  $\vartheta, T, m_0, J_i$  таково, что решение задачи оптимального быстродействия при ограничении (17) дает значение  $T_{fast} > T$ , где  $T$  – заданное время разворота, то реализация маневра разворота с такими исходными данными  $\Lambda_{st}, \Lambda_f, m_0, J_i, T$  невозможна, и поставленная задача оптимального управления (1)–(4), (16), (17) не имеет решения. Принимая во внимание линейный характер изменения модуля угловой скорости при управлении максимального быстродействия, время  $T_{fast}$  находится из уравнения  $T_{fast} = 4J_i\vartheta/(m_0T_{fast})$ . Отсюда,  $T^2 = 4J_i\vartheta/m_0$  – условие осуществимости разворота.

В рассмотренном примере вектор  $\mathbf{p}$  определяет положительное направление оси Эйлера. В других случаях оптимального разворота [7] вектор  $\mathbf{p}$  интерпретируется как орт кинетического момента КА во время разворота (заметим, что для сферически симметричных тел  $J_1 = J_2 = J_3$  направление кинетического момента совпадает с положительным направлением оси Эйлера).

Если решается кинематическая задача разворота, то построение оптимальной программы управления значительно упрощается – размерность краевой задачи принципа максимума снижается с восемнадцати (для динамической задачи разворота) до двенадцати (для кинематической задачи разворота), если используются направляющие косинусы, и с тринадцати до семи, если используется кватернионная форма записи кинематических уравнений движения КА вокруг центра масс. Размерность замкнутой системы уравнений уменьшается с девяти до трех, что позволяет во многих случаях довести решение оптимизационной задачи до конечных соотношений и получить искомое решение в виде конкретных математических зависимостей.

## 5. Заключение

В статье выявлены соотношения и уравнения, которые являются общими при решении с помощью принципа максимума задач оптимального управления ориентацией твердого тела (и, в частности, КА) независимо от формы описания кинематики вращений (используя направляющие косинусы, кватернионы и т.д.). Предполагается, что оптимальная программа управления строится на основе принципа максимума Понтрягина. Демонстрируется, что независимо от типа используемых параметров движения и формы представления кинематических уравнений существуют такие универсальные сопряженные переменные, которые приводят к одному и тому же виду записи функции Гамильтона и делают едиными технологию и алгоритм поиска результирующего решения, оптимального по назначенному критерию.

Предложена замена переменных, с помощью которой сопряженная система уравнений, соответствующая кинематическим параметрам вращения КА, приводится к каноническому виду – линейной однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой коэффициентами являются компоненты вектора угловой скорости КА. Показано, что для решения многих задач оптимального управления пространственной ориентацией КА (как твердого тела) остается справедливой предложенная система уравнений и структура функции Гамильтона независимо от выбора кинематических параметров, задающих угловое положение связанных осей относительно опорной системы координат. Тип и свойства оптимального движения КА полностью определяются решением замкнутой системы девяти (для динамической задачи ориентации, где  $M_i$  – управляющие переменные) или трех (для кинематической задачи ориентации, где  $\omega_i$  – управляющие переменные) дифференциальных уравнений, используя компоненты универсального вектора  $\mathbf{r}$  (неподвижного в инерциальной системе координат), независимо от выбора кинематических уравнений, описывающих угловое движение связанных осей КА. Для наглядности приводится пример последовательного применения описанной технологии решения задач оптимального управления.

## Литература

1. Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
2. А.П. Маркеев. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.
3. В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
4. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1988.
6. Н.Н. Моисеев. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
7. М.В. Левский. Об одной задаче пространственного разворота космического аппарата // Известия ВУЗов. Приборостроение, 2008. Т.51. № 7.

**Левский Михаил Валерьевич**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник; ведущий научный сотрудник Государственного Космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева (Научно-исследовательский институт Космических систем, Московская область). Автор более 150 научных трудов (научные статьи) и автор 25 изобретений и патентов, лауреат премии С.П. Королева, международный Педагог Года 2007; представлен в изданиях Who's Who in Science and Engi-

neering, Who's Who in the World, 2006, 2007, 2008, 2009 гг. Специалист в области теории управления и приборов и систем автоматического управления. Сфера научных интересов: механика космического полета, теория систем ориентации, навигации и стабилизации летательных аппаратов, движение вокруг центра масс космических аппаратов, разгонных блоков и орбитальных станций.



## About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation

M.V. Levskii

Research Institute of Space systems, Khrunichev State research and production Space Center  
Tihonravov street, 27, Jubilejny, Moscow region, 141092, Russia

Universal approach to solving optimal control problems concerning spacecrafts attitude on the basis of the Pontryagin maximum principle is offered. It is shown that in cases when criterion of optimality (the minimized functional) does not contain explicitly angular coordinates (position parameters) resulting solution and optimal motion of a spacecraft not depend from a form of kinematic equations (from type of the parameters describing angular position of a spacecraft in space). The conjugate system of the equations corresponding to kinematics of spacecraft rotation is led to the canonical form. Such unified characteristics (analogues of conjugate variables) which allow to write the necessary conditions of optimality independently from the way of description of kinematics of spacecraft rotation are defined. Comparative example of construction of optimal control for different variants of a choice of system of kinematic parameters (the directing cosines, quaternions and so forth) is presented. Solving known problems of optimal control concerning spacecraft motion using this designed method is demonstrated.

We mean that control of spatial reorientation is a transfer of spacecraft-fixed axes  $OXYZ$  from one known angular position into another known (usually given) angular position [1]. Angular orientation of the right-hand rectangular coordinate system  $OXYZ$  (as well as its initial and final positions,  $OX_{st}Y_{st}Z_{st}$  and  $OX_fY_fZ_f$ ) is defined relative to a chosen reference basis  $\mathbf{I}$ . In this paper the most popular case is considered: when the reference basis coincides with inertial coordinate system  $OX_{in}Y_{in}Z_{in}$  (ICS). Possibility of a solving of optimal control problems for spacecraft's spatial orientation with use of uniform mathematical tools independently from a choice of kinematic parameters defining angular position of solid body relative to inertial coordinates system (reference basis) is shown further. Necessary conditions of optimality are formulated according to Pontryagin's maximum principle.

*Key words:* optimal control; spatial orientation; Pontryagin's maximum principle.

### 1. General statement of the problem and the equations of motion

It is assumed that the spacecraft attitude control is made using executive devices that generate torques relative to principal central moments of inertia of the spacecraft. The equations of rotary motion of a spacecraft as a solid body have the form [1, 2]

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \quad J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

where  $J_i$  are the principal central moment of inertia of the spacecraft,  $M_i$  are projections of the principal moment of the forces onto principal central axis of the spacecraft's ellipsoid of inertia;  $\omega_i$  are the projections of absolute velocity vector  $\boldsymbol{\omega}$  onto the axes of spacecraft-fixed basis  $\mathbf{E}$  formed by the principal central axes of spacecraft's ellipsoid of inertia ( $i = 1, 2, 3$ ).

In order to describe three-dimensional motion of a spacecraft around a centre of mass can be used various systems of parameters – Euler's angles (or Krylov), the directing cosines, the quaternion (Rodrigues-Hamilton parameters), etc. Most convenient for solving the problems of attitude control are the directing cosines or quaternions because in both cases the kinematic equations have the linear form. Consideration we will begin with quaternions [3] as the most simple variant having the minimum dimension of system of the kinematic equations of mo-

tion (four variables instead of nine are used). The motion of spacecraft-fixed basis  $\mathbf{E}$  relative to reference basis  $\mathbf{I}$  we will specify by quaternion  $\Lambda$ . For the sake of definiteness we consider that basis  $\mathbf{I}$  is inertial. In this case, the following kinematic equations [3] are fair:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, & 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, & 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \quad (2)$$

or, in the quaternion form:  $2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}$  [3], where  $\lambda_j$  are components of quaternion  $\Lambda$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), so that  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$  (quaternion  $\Lambda$  is assumed to be normalized [3]).

We consider that controlled process is rotary maneuver [1]. We will give boundary conditions of a problem of an optimal turn by the following equalities:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{st}, \quad \Lambda(T) = \Lambda_f \quad (3)$$

and

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T \quad (4)$$

where  $T$  is the time of transfer finishing of spacecraft-fixed basis into prescribed position.

In article the case when the criterion of optimality reflecting physical sense of optimization is defined by integrated functional

$$G = \int_0^T g dt \quad (5)$$

is investigated, where  $g$  is nonnegative time function not depending from spacecraft position. We will formulate optimal control problem as follows: it is required to transfer the spacecraft from state corresponding to the former condition (3), into state corresponding to the latter condition (3) in accordance with the equations (1) and (2) so that value of functional (5) was minimum. Besides, at problem statement, as a rule, the constraint is present for the controlling variables  $M_i$  or  $\omega_i$  depending on type of a solved problem (a dynamic or kinematic problem of a turn [3]). It is considered that controlling variables belong to a class of piecewise-continuous functions. If the dynamic problem of a turn in which control is the moment of forces  $\mathbf{M}$  then it is necessary to add conditions (4) in optimal control problem formulated above.

Such formulation covers enough the big list of various problems; them concern a problem of the fast response (transfer of a spacecraft into the required orientated position at minimal time) and optimization problems with minimization of volume or total expense of the controlling resources. In particular, in the problem of the time-optimal control we have  $g = 1$ , and for the control problem with the minimum energy consumption  $g = g(M_1, M_2, M_3)$  is a positive defined function of moments  $M_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Other variants are possible also (for example when  $g$  is the function of angular velocities  $\omega_i$  and their derivatives). Cases when criterion (5) and function  $g$  depend on angular coordinates are not considered here.

## 2. Methodology of the solving the problem of attitude control

Presence of an integrated indicator of optimality (5) allows to solve a problem of optimal control using Pontryagin's maximum principle [4] and to write out necessary conditions of optimality in final form – in the form of the equations (differential and algebraic). For this purpose we introduce conjugate variables  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (corresponding to variables  $\omega_i$ ) and  $\psi_j$

( $j=0, 1, 2, 3$ ) (corresponding to quaternion components  $\lambda_j$ ). The Hamilton function (Hamiltonian) has the form:  $H = -g + H_{\text{din}} + H_{\text{kin}}$ , where summand  $g$  is named expense part of the function  $H$  (it corresponds to a chosen criterion of optimality),  $\partial g / \partial \lambda_j = 0$ ;  $H_{\text{din}}$  and  $H_{\text{kin}}$  are dynamical and kinematical parts of the function  $H$ , respectively.

$$H_{\text{kin}} = -\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)/2 + \psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2)/2 + \\ + \psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3)/2 + \psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1)/2; \\ H_{\text{din}} = \varphi_1\left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3\right) + \varphi_2\left(\frac{M_2}{J_2} + \frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3\right) + \varphi_3\left(\frac{M_3}{J_3} + \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2\right).$$

Let's write equations for conjugate functions  $\varphi_i$  и  $\psi_j$  [4].

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= -\partial H / \partial \omega_i \quad (i = \overline{1,3}) \\ \dot{\psi}_j &= -\partial H / \partial \lambda_j \quad (j = \overline{0,3}), \end{aligned} \quad (6)$$

or in the expanded form

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= -(\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_1 = (\psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2)/2, \\ \dot{\psi}_2 &= (\psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_3 = (\psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1)/2 \end{aligned} \quad (7)$$

Let's transform function  $H_{\text{kin}}$  with grouping in an explicit form angular velocities  $\omega_i$ ; and we get

$$H_{\text{kin}} = \omega_1(\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2 + \omega_2(\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2 + \\ + \omega_3(\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3,$$

where

$$\begin{aligned} p_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2; \quad p_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2; \\ p_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2. \end{aligned}$$

We assume that quantities  $p_1, p_2, p_3$  are the projections of a certain vector  $\mathbf{p}$  onto axes of spacecraft-fixed basis  $\mathbf{E}$ . From the equations (7) it follows that the ensemble of variables  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  possesses the quaternion properties. Next we assume that conjugate variables  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  are the components of a certain quaternion  $\Psi$ , for which the following relationship is valid  $2\dot{\Psi} = \Psi \circ \boldsymbol{\omega}$ . Then vector  $\mathbf{p}$  introduced by us can be written in the quaternion form as  $\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2$ , and kinematical part of function  $H$  takes on the form:  $H_{\text{kin}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}$ . Here operator  $\text{vect}(\bullet)$  designates separation of the vector part of a quaternion [3],  $\tilde{\Lambda}$  is the quaternion conjugate to the quaternion  $\Lambda$ .

Systems of the equations (2) and (7) have identical structure, and they are kinematic equations for the same angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$ . The solutions to kinematic equations (2) for variables  $\lambda_j$  and to equations (7) for variables  $\psi_j$  differ by the initial conditions, and quaternions  $\Psi$  and  $\Lambda$  themselves are distinct by a constant (constant quaternion):  $\Psi = C_E \circ \Lambda$ , where  $C_E = \text{const}$  is a constant quaternion. For joint nondegeneracy of systems of equations (2) and (7) it is necessary and sufficient that  $\text{vect}C_E \neq 0$  (in the opposite case  $\psi_0 : \lambda_0 = \psi_1 : \lambda_1 = \psi_2 : \lambda_2 = \psi_3 : \lambda_3$ , equations (2) and (7) are not independent,  $\mathbf{p} = 0$  and to solve the problem makes no sense). Therefore, when determining optimal control, quaternions  $\Lambda$

and  $\Psi$  considered not to be identical (functions  $\psi_j$  are not proportional to variables  $\lambda_j$ ), and only variant  $\mathbf{p} \neq 0$  is considered.

Differentiating expressions for  $p_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) and substituting into them equations for  $\lambda_j$  and  $\psi_j$  ( $j = \overline{0,3}$ ) in accordance with (2) and (7), we get necessary differential equations for time functions  $p_i$ . Variation of vector  $\mathbf{p}$  is determined by solving the following equations

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (8)$$

or

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (9)$$

where  $p_i$  are projections of vector  $\mathbf{p}$  onto axes of spacecraft-fixed basis  $\mathbf{E}$ , the symbol « $\times$ » denotes the operation of vector product of vectors. Obtained differential equation (9) for vector  $\mathbf{p}$  describes its rotation with angular velocity  $-\boldsymbol{\omega}$  relative to spacecraft-fixed basis  $\mathbf{E}$ . In turn, the basis  $\mathbf{E}$  itself executes angular motion relative to reference basis  $\mathbf{I}$  with angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$ ; as a result, vector  $\mathbf{p}$  remains immobile in reference coordinate system (according to the velocity addition theorem). It is obvious that  $|\mathbf{p}| = \text{const}$ .

Thus, the problem of determining optimal control is reduced to solving system of equations (2), (8) provided that the control itself is selected based on the requirement of maximization of the Hamiltonian  $H$ . Boundary conditions for angular position  $\Lambda_{\text{st}}$  and  $\Lambda_f$  determine the family of solutions  $\mathbf{p}(t)$ , which has the form [3]:  $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda$ , where  $\mathbf{c}_E = \Lambda_{\text{st}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{st}} = \text{const}$ . Direction of  $\mathbf{c}_E$  depends on the initial and final positions of a spacecraft. The problem of finding the optimal control consists in investigation of Euler's dynamical equations (1) and equations (6) conjugate to them at the above motion of vector  $\mathbf{p}$  (according to (9) or (8)). System of differential equations (8) and (6), if (6) are present (it follows from problem statement), together with the requirement of maximum of the Hamilton function  $H$  are the necessary conditions of optimality. The value of  $\mathbf{p}(0)$  (the quaternion  $\Psi(0)$  corresponds to it) is calculated in such a way that the boundary value problem of the maximum principle has a solution. The coupling equations are expressed by systems of equations (1), (2) with simultaneous satisfaction of constraint imposed on the motion of the spacecraft (for each concrete problem this constraint is individual and specifically). The boundary conditions and the conditions of maximum of the function  $H$  (within the limits of admissible control) determine optimal motion  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ; initial and final positions of a spacecraft (quaternions  $\Lambda_{\text{st}}$  and  $\Lambda_f$ ) determine the functions  $\Lambda(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$ .

Let's introduce the vector  $\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \}$  for variables  $\varphi_i$ . The boundary value problem for the maximum principle is to determine  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  and  $\mathbf{p}(0)$  for which the solution to system of differential equations (1), (2), (6), (8) with the simultaneous maximization of the Hamilton function  $H$  at each point in time satisfies rotation conditions (3) (and equalities (4) for dynamic problem of a turn). Because optimization problem to be solved is an optimal control problem with fixed right endpoint the transversality conditions have the form  $\varphi_i(T) = v_i$ ,  $\psi_j(T) = v_{j+4}$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{0,3}$ ), where  $v_1, v_2, \dots, v_7$  are the certain numbers which not equal to zero simultaneously [4]. The conjugate variables  $\psi_j$  are the components of the quaternion  $\Psi$ , and norm of quaternion is constant  $\|\Psi\| = \text{const} \neq 0$  (this equality follows from properties of solution of equations (7)); therefore we conclude that the transversality conditions are satisfied.

For new variables  $p_i$  the transversality conditions get to the form  $|\mathbf{p}(T)| > 0$ . Earlier we have stipulated that the optimal solution of the turn problem is constructed under a condition  $\mathbf{p} \neq 0$ . Distinctive property of the vector  $\mathbf{p}$  is a constancy of its size  $|\mathbf{p}| = \text{const}$  (owing to

presence of the equations (8), as the necessary condition of optimality). Therefore  $|\mathbf{p}(T)| = |\mathbf{p}(0)| > 0$ , and this inequality specifies on the satisfaction of the transversality conditions. When constructing the optimal solutions  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t)$  the value of vector  $\mathbf{p}$  at the beginning of a turn  $t=0$  is a decisive factor. The vector of control at the beginning of a turn  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  is determined by initial  $\Lambda_{st}$  and final  $\Lambda_f$  positions of the spacecraft. After solving the boundary value problem for the maximum principle, taking into account the equations (2), we obtain the calculated value of vector  $\mathbf{p}_0$  and vector  $\mathbf{c}_E = \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} = \text{const}$  corresponding to it. The value of vector  $\mathbf{p}$  at the moment of the turn end can be found from the expression

$\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t$ , where  $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f$  is the quaternion of turn. Concrete form of the function  $g$  depends from type of a solved problem of optimal control and executive devices used by system of spacecraft orientation. Presence (or absence) of variables  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) corresponding to variables  $\omega_i$ , and of dynamical part  $H_{din}$  in the Hamilton function  $H$  depends from fact – the kinematic problem of orientation or a dynamic problem is solved. The variety of control problems of spatial orientation is caused by the many-possible combinations of various criteria of optimality and the constraints imposed on the controlling variables (and in some unusual cases – on phase variables also). Other things being equal, the problems of the fast response appear more simple; the problems in which the criterion of optimality includes angular velocity of a spacecraft demands special attentiveness.

In overwhelming number of cases in problems of the fast response it is considered that the controlling variables are limited (or on spacecraft motion any other constraint is imposed, the formalized form of which depends from the concrete maintenance of physical statement of attitude control problem). Going from this condition (on set of possible controls), the maximum of Hamilton function is found and the optimal solution corresponding to it –  $\mathbf{M}(t)$  (for dynamic problems of control) and  $\boldsymbol{\omega}(t)$  (for kinematic problems of control) is computed. In any case, the kinematical part of Hamilton function and conjugate system of the differential equations corresponding to it (as one of necessary conditions of optimality) remain invariable. In this sense, the vector  $\mathbf{p}$  introduced above becomes the convenient mathematical tool, and its use does system of the equations in the form (8) (or (9)), responsible for kinematics of spacecraft rotation and geometrical properties of optimal motion, as universal.

### 3. The scheme of the solving problems of optimal control of attitude with use of directing cosines matrix

Now we will consider the case when relative position of spacecraft-fixed and reference (inertial) coordinate systems is determined by matrix of directing cosines. For the directing cosines, the following equation [2] is valid:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A},$$

where  $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|$  is the matrix of directing cosines ( $i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$ );

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \text{ is the matrix of angular velocities in spacecraft-fixed coordinate}$$

system (SFCS);  $a_{ik}$  is cosines of angle between  $i$ -axis of SFCS and  $k$ -axis of ICS (reference basis).

The coupling equations (conformity equations) are expressed by the form:  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ , where  $\mathbf{A}^T$  is the matrix transposed in relation to matrix  $\mathbf{A}$ . Kinematic equations for the directing cosines in the expanded form look like

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}, \quad \dot{a}_{12} = \omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}, \quad \dot{a}_{13} = \omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33} \\ \dot{a}_{21} &= \omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}, \quad \dot{a}_{22} = \omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}, \quad \dot{a}_{23} = \omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13} \\ \dot{a}_{31} &= \omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}, \quad \dot{a}_{32} = \omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}, \quad \dot{a}_{33} = \omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23} \end{aligned} \quad (10)$$

They are known equations by Puasson [5].

The boundary conditions of a problem of optimal turn are similar (3)

$$A(0) = A_{st}, \quad A(T) = A_f \quad (11)$$

Let us introduce conjugate variables  $b_{ik}$  which correspond to variables  $a_{ik}$ . In the directing cosines kinematical part  $H_k$  of Hamilton function take the form

$$\begin{aligned} H_k &= b_{11}(\omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}) + b_{12}(\omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}) + b_{13}(\omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33}) + \\ &+ b_{21}(\omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}) + b_{22}(\omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}) + b_{23}(\omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13}) + \\ &+ b_{31}(\omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}) + b_{32}(\omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}) + b_{33}(\omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23}) \end{aligned}$$

Expense part and a dynamical part (if it is necessary) of Hamilton function remain without changes (because they not depend from kinematic parameters of position);  $\partial g / \partial a_{ik} = 0$ ,

$\partial H_{\text{din}} / \partial a_{ik} = 0$ . We write conjugate system of equations [4]

$\dot{b}_{ik} = -\partial H / \partial a_{ik}$  ( $i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$ ), and in the expanded form

$$\begin{aligned} \dot{b}_{11} &= \omega_3 b_{21} - \omega_2 b_{31}, \quad \dot{b}_{12} = \omega_3 b_{22} - \omega_2 b_{32}, \quad \dot{b}_{13} = \omega_3 b_{23} - \omega_2 b_{33} \\ \dot{b}_{21} &= \omega_1 b_{31} - \omega_3 b_{11}, \quad \dot{b}_{22} = \omega_1 b_{32} - \omega_3 b_{12}, \quad \dot{b}_{23} = \omega_1 b_{33} - \omega_3 b_{13} \\ \dot{b}_{31} &= \omega_2 b_{11} - \omega_1 b_{21}, \quad \dot{b}_{32} = \omega_2 b_{12} - \omega_1 b_{22}, \quad \dot{b}_{33} = \omega_2 b_{13} - \omega_1 b_{23} \end{aligned} \quad (12)$$

When uniting the variables  $b_{ik}$  into matrix  $B = \|b_{ik}\|_{3 \times 3}$  we write system of equations for conjugate variables in matrix form

$$\begin{vmatrix} \dot{b}_{11} & \dot{b}_{12} & \dot{b}_{13} \\ \dot{b}_{21} & \dot{b}_{22} & \dot{b}_{23} \\ \dot{b}_{31} & \dot{b}_{32} & \dot{b}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad \text{or} \quad \dot{B} = -\Omega \cdot B,$$

where  $\Omega$  is the matrix of angular velocities described before.

From the received system of the differential equations we can see that variables  $b_{ik}$  can be accepted as the parameters which are proportional to the directing cosines. Because the equations (10) (for phase variables  $a_{ik}$ ) and the equations (12) (for conjugate variables  $b_{ik}$ ) have identical structure, and they are kinematic equations for the same angular velocity  $\omega$  (the same functions  $\omega_i$  appear in the right-hand sides of the equations (10) and (12)), the matrix  $A$  and the matrix  $B$  are distinct by constant matrix  $C$  which no varies during a time. Solution of conjugate system of equations (12) has the form:  $B = A \cdot C$ , where  $C = \text{const}$  ( $C = \|c_{ik}\|_{3 \times 3}$ ,  $c_{ik} = \text{const}$ ). Having grouped and having selected in an explicit form the multipliers for  $\omega_i$  we present the function  $H_k$  in the form:  $H_k = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ , Where

$$\begin{aligned} r_1 &= b_{21} a_{31} + b_{22} a_{32} + b_{23} a_{33} - b_{31} a_{21} - b_{32} a_{22} - b_{33} a_{23}, \\ r_2 &= b_{31} a_{11} + b_{32} a_{12} + b_{33} a_{13} - b_{11} a_{31} - b_{12} a_{32} - b_{13} a_{33}, \\ r_3 &= b_{11} a_{21} + b_{12} a_{22} + b_{13} a_{23} - b_{21} a_{11} - b_{22} a_{12} - b_{23} a_{13}. \end{aligned}$$

For existence of nontrivial solution it is necessary that at any  $t \in [0, T]$  equalities  $a_{ik} = \chi b_{ik}$  were not carried out ( $\chi$  is same scalar value) because if they carried out then  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  and the further a solving of a problem loses sense.

We will study properties of the solution  $B(t)$  of the system of conjugate equations (12). From physical sense follows that the conjugate variables  $b_{ik}$  are numbers which are proportional to the directing cosines between axes of spacecraft and positive directions of axis of motionless (fixed in inertial space) coordinate system, and matrix  $B$  formed by elements  $b_{ik}$  is the matrix of transfer from any non-rotated (as a matter of fact inertial) but not coincided with reference coordinate system  $\mathbf{I}$  to spacecraft-fixed coordinate system, increased by a constant multiplier. Naturally, matrixes  $A$  and  $B$  are different,  $B \neq A$ . Systems of the equations (10) and (12) are same concerning coefficients  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Solutions of the kinematic equations (10) for variables  $a_{ik}$  and (12) for variables  $b_{ik}$  differ by the initial conditions, and matrixes  $A$  and  $B$  are distinct by a constant matrix  $B = A \cdot C$ , where  $C = \text{const}$  ( $\dot{B} = \dot{A} \cdot C = -\Omega \cdot A \cdot C = -\Omega \cdot B$ ). At determining the optimal control the matrixes  $A$  and  $B$  are assumed non-identical (the functions  $b_{ik}$  are not proportional to variables  $a_{ik}$ ), and we consider the variant  $\mathbf{r} \neq 0$  only. Differentiating with respect to time the equalities for  $r_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) and substituting into them expressions for  $\dot{a}_{ik}$  and  $\dot{b}_{ik}$ , we obtain differential equations for time functions  $r_i(t)$ . As result, we have

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & b_{21}\dot{a}_{31} + \dot{b}_{21}a_{31} + b_{22}\dot{a}_{32} + \dot{b}_{22}a_{32} + b_{23}\dot{a}_{33} + \dot{b}_{23}a_{33} - b_{31}\dot{a}_{21} - \dot{b}_{31}a_{21} - b_{32}\dot{a}_{22} - \\ & - \dot{b}_{32}a_{22} - b_{33}\dot{a}_{23} - \dot{b}_{33}a_{23} = \omega_2(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{23}a_{13} - b_{11}a_{21} - b_{12}a_{22} - b_{13}a_{23}) + \\ & + \omega_3(b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} - b_{11}a_{31} - b_{12}a_{32} - b_{13}a_{33}) = \omega_3r_2 - \omega_2r_3. \end{aligned}$$

Similar relationships we obtain for variables  $r_2, r_3$  also. Variation of vector  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$  is determined by solving the following equations

$$\dot{r}_1 = \omega_3r_2 - \omega_2r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1r_3 - \omega_3r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2r_1 - \omega_1r_2 \quad (13)$$

or in vector form

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

where  $r_i$  are projections of vector  $\mathbf{r}$  onto axes of spacecraft-fixed coordinate system.

Obtained differential equation (14) for vector  $\mathbf{r}$  specifies its rotation with angular velocity  $-\boldsymbol{\omega}$  relative to spacecraft-fixed coordinate system (basis  $\mathbf{E}$ ). In turn, the basis  $\mathbf{E}$  itself is rotated relative to reference basis  $\mathbf{I}$  with angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$ ; as a result, vector  $\mathbf{r}$  is immovable in inertial coordinate system (according to the velocity addition theorem) and  $|\mathbf{r}| = \text{const}$ . The equations (13) and (14) are completely similar to the equations (8) and (9) for vector  $\mathbf{p}$ .

Thus, in case when directing cosines are used, the problem of determining optimal control is reduced to solving the system of equations (1), (6), (10), and (13) provided that the control itself is chosen based on the requirement of maximum of Hamiltonian. Boundary conditions for angular position (matrixes  $A_{st} = A(0)$  and  $A_f = A(T)$ ) determine the family of solutions  $\mathbf{r}(t)$ , which has the form  $\mathbf{r}(t) = A\mathbf{c}_t$ , where  $\mathbf{c}_t = A^T(0)\mathbf{r}(0) = \text{const}$ ;  $A^T$  is the matrix transposed in relation to matrix  $A$ .

The boundary value problem for the maximum principle is to determine  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  and  $\mathbf{r}(0)$  which result motion of system of equations (1), (10), (6), (13), satisfying in each moment of time  $t$  to conditions of a maximum of Hamilton function  $H$ , to satisfaction of the latter equality (11) (and also equalities (4) if the dynamic problem of a turn is solved); searched values  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  and

$\mathbf{r}(0)$  (they will found) together with the first equality (11) (and (4) for a dynamic problem of a turn) are accepted as initial conditions for constructing motion of system of equations (1), (10), (6), (13). Boundary conditions and conditions of a maximum of function  $H$  (within the limits of admissible control) determine optimal motion  $\omega(t)$ ; initial and final positions ( $A_{st}$  and  $A_f$ ) determine solutions  $A(t)$  and  $\mathbf{r}(t)$ . As well as earlier, the vector function  $\mathbf{r}(t)$  should satisfy to formula  $\mathbf{r}(T) = A_f A_{st}^T \mathbf{r}(0) = A_t \mathbf{r}_0$ , where  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ ;  $A_t = A_f A_{st}^T$  is the matrix of directing cosines of axes of the spacecraft-fixed coordinate system at final moment of time relative to position of spacecraft-fixed coordinate system at initial moment of time (upper index T means that this matrix is transposed).

Because the problem of turn optimization to be solved is an optimal control problem with fixed right endpoint the transversality conditions have the form  $\varphi_i(T) = w_i$ ,  $b_{kl}(T) = w_{l+3k}$  ( $k = 1, 3$ ,  $l = 1, 3$ ), where  $w_1, w_2, \dots, w_{12}$  are the certain numbers which not equal to zero simultaneously [4, 6]. The conjugate variables  $b_{kl}$  are proportional to some directing cosines (they have properties of a directing cosines); and therefore all variables  $b_{kl}$  can not to be equal to zero simultaneously, including final moment of time  $t = T$  (this conclusion follows from properties of solution of equations (12)). As result, the transversality conditions are satisfied. The transversality conditions for new variables  $r_i$  get to the form  $|\mathbf{r}(T)| > 0$ . Earlier we have stipulated that the optimal solution of the turn problem is constructed under a condition  $\mathbf{r} \neq 0$ . Key property of the vector  $\mathbf{r}$  is a constancy of its module  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  (owing to presence of the necessary condition of optimality in the equations form (13)). Therefore  $|\mathbf{r}(T)| = |\mathbf{r}(0)| > 0$ , and additional analyzing of satisfaction of transversality conditions for variables  $r_i$  (or  $b_{ik}$ ) is not required.

We have obtained the necessary conditions of optimality and dependences for variables  $r_i$  which are identical to that took place during the solving the problem of optimal control of spacecraft attitude on quaternion base. When comparing kinematical parts of Hamilton function written for quaternion variables and for the directing cosines, and also taking into account the differential equations (8), (13) for vectors  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{r}$  we come to an unequivocal conclusion – kinematical part of Hamilton function  $H_{kin}$  (written for quaternion  $\Lambda$ ) and  $H_k$  (written for matrix  $A$  of the directing cosines) are identical if we assume that  $\mathbf{r} = \mathbf{p}$ . Thus it is confirmed that for problems when the optimizable functional not includes position coordinates (in an explicit form), the form of kinematical part of Hamilton function (and hence, itself Hamilton function also) not depends from type of variables which describe spatial position of spacecraft-fixed coordinate system relative to reference coordinate system, and it is determined as  $H_{kin} = \omega \cdot \mathbf{r}$  independently from the form of kinematic equations, where vector  $\mathbf{r}$  is immovable in inertial coordinate system because  $\dot{\mathbf{r}} + \omega \times \mathbf{r} = 0$ .

Hence, optimal control and spacecraft motion around a centre of mass (as result of use of maximum principle) not depend from the form of kinematic equations (i.e. from a choice of the variables which describe motion of spacecraft-fixed axes relative to reference basis). The vector  $\mathbf{r}$  introduced by us (immovable in inertial coordinate system) is universal, and its components  $r_i$  can be considered as the universal conjugate variables at solving the optimal control problems concerning rotations of solid body using maximum principle. Use of vector  $\mathbf{r}$  allows to find not only necessary conditions of optimality and to formalize them but also to specify character (key properties) of optimal control and to construct optimal motion  $\omega(t)$  which corresponds to an assigned criterion of optimality.

Thus, a solving the optimal control problem concerning spacecraft orientation is reduced to solving a closed system of differential equations the form of which not depends from a type of



kinematic parameters (whether it be a quaternion or a directing cosines), and to integration of the system of kinematic equations of spacecraft motion around a centre of mass written in such form which is most convenient for solving concrete problem. Unified (general) part of system of equations is based on use of variables  $r_i$  – components of vector  $\mathbf{r}$  defining main properties of optimal motion  $\omega(t)$ . Structure of optimal control is specified unequivocally from solution of a closed system of nine (for dynamic problem) or three (for kinematic problem) differential equations at which the corresponding Hamilton function  $H$  is maximal; only the condition of a maximum of Hamilton function does system of nine (or three) differential equations as closed and gives the coupling equations between the controlling variables and phase coordinates (or with conjugate variables). Concrete optimal solution of reorientation problem (optimal value  $\mathbf{r}_0$  and optimal functions  $\omega(t)$  and  $\mathbf{r}(t)$ ) is determined by solution of kinematic equations ( $\Lambda(t)$  or  $A(t)$ ) which satisfies to initial and final position of spacecraft-fixed coordinate system.

Structure of system of equations defining optimal solution (on Pontryagin) is schematically presented on fig.1. Structure scheme shown at the upper part of fig.1 corresponds to a kinematic problem of orientation, and scheme illustrated by the lower part fig.1 corresponds to a dynamic problem of orientation. For a kinematic problem, vector function,  $\omega(t) \in \Theta$  is a controlling function, where  $\Theta$  is region of admissible motions; for a dynamic problem, vector function  $\mathbf{M}(t) \in U$  is control which must be found, where  $U$  is region of possible control. In both cases, optimal motion  $\omega(t)$  is determined unequivocally (in case of solving a dynamic problem of optimal control, optimal function  $\omega(t)$  is calculated by substitution of the found solution  $\mathbf{M}(t)$  in the equations (1) and integration of system (1) with initial conditions  $\omega(0)$  which are given by conditions of an initial control problem of spacecraft reorientation, and therefore they are known). The form of kinematic equations influences exclusively a choice of a method of a solving the boundary value problem for the maximum principle (regarding satisfaction to boundary conditions with respect to for position). The solving the main problem – determination of optimal controlling functions – not depends from type of kinematic parameters of motion around a centre of mass, and optimal rotation of a spacecraft is determined by the requirement of maximum of Hamilton function and the closed system of three (for kinematic problems of orientation) or nine (for dynamic problems of orientation) differential equations which have universal form. Integration of the closed system of equations gives optimal motion  $\omega(t)$ , its qualitative form is invariant with respect to a form of kinematic equations describing angular motion of a spacecraft.

In control problems when function  $g$  in integral (5) does not depend in an explicit form from angular velocities  $\omega_i$ , the conjugate equations (6) can be written in the following way:

$$\dot{\varphi}_1 = -\omega_3 n_2 \varphi_2 - \omega_2 n_3 \varphi_3 - r_1, \quad \dot{\varphi}_2 = -\omega_3 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_3 \varphi_3 - r_2, \quad \dot{\varphi}_3 = -\omega_2 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_2 \varphi_2 - r_3 \quad (15)$$

where  $n_1 = (J_2 - J_3)/J_1$ ,  $n_2 = (J_3 - J_1)/J_2$ ,  $n_3 = (J_1 - J_2)/J_3$  are constant coefficients.

Further we will demonstrate technology of construction of optimal control of spacecraft orientation based on use of universal variables  $r_i$ , for concrete examples.

#### 4. Example of solving dynamic problem of a turn

Let's consider the optimal control problem concerning spacecraft turn from one stabilized position (state of rest) into another stabilized position when a control (i.e. the controlling function) is moment of the forces  $\mathbf{M}$  (in this case in condition (4) the values  $\omega_0 = 0$  and  $\omega_T = 0$ ). Let it is necessary to minimize the integral

$$\int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt \quad (16)$$

and the region  $U$  of possible control is determined by the inequality

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \leq m_0^2 \quad (17)$$

where  $m_0 = \text{const} > 0$  is maximum-possible magnitude of control moment  $\mathbf{M}$ .

The functional (16) is typical and characterizes a value of the work of control forces.

The motion of spacecraft-fixed coordinate system relative to inertial coordinate system (reference basis) is specified by quaternion  $\Lambda(t)$ . Concrete statement of optimal control problem consists in following: it is required to transfer a spacecraft from the state corresponding to the former condition in (3) into the state corresponding to the latter condition in (3) in accordance with equations (1) and (2) in the presence of constraint (17) and equalities (4) with the condition that functional (16) should have minimal value.

The criterion of optimality in an explicit form includes moments  $M_i$ , therefore the order of the boundary value problem for the maximum principle have maximal size and it is equal thirteen (at use of the directing cosines it becomes more – eighteen). Conjugate variables  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) corresponds to variables  $\omega_i$  of state vector of dynamic system, and conjugate variables  $\psi_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) corresponds to quaternion components  $\lambda_j$ . Let us write the Hamilton function for the problem to be solved (1)–(4), (16)–(17).

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{din}} + H_{\text{kin}} - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = \\ &= M_1 \varphi_1 / J_1 + M_2 \varphi_2 / J_2 + M_3 \varphi_3 / J_3 - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2 + H_{\text{inv}}, \end{aligned}$$

where  $H_{\text{kin}} = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3$ ;  $H_{\text{inv}}$  in an explicit form not depends from controlling functions  $M_i$  ( $i = 1, 3$ ).

Solution  $\mathbf{M}(t)$  is found in a class of piecewise-continuous functions satisfying to condition (17). Passing to new variables  $\mu_i = \varphi_i / J_i$ , we present the function  $H$  in the form

$$H = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mu} - \mathbf{M}^2 + H_{\text{inv}} = |\mathbf{M}| (|\boldsymbol{\mu}| \cos \gamma - |\mathbf{M}|) + H_{\text{inv}},$$

where  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ , and  $\gamma$  is the angle between vectors  $\mathbf{M}$  and  $\boldsymbol{\mu}$ .

Hamilton function  $H$  with the constraint  $|\mathbf{M}| \leq m_0$  takes on a maximum value, if  $\gamma = 0$ , vectors  $\mathbf{M}$  and  $\boldsymbol{\mu}$  have the same direction, and magnitude of control moment  $|\mathbf{M}|$  is equal to  $m_0$ , if  $|\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0$ , or  $|\boldsymbol{\mu}|/2$ , if  $|\boldsymbol{\mu}| < 2m_0$ . Fig.2 visually explains the told (maximum of function  $H$  on parameter  $m = |\mathbf{M}|$  is found within the interval  $0 \leq m \leq m_0$ ). Optimal control has the form

$$\mathbf{M} = m_0 \boldsymbol{\mu} / |\boldsymbol{\mu}|, \text{ if } |\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0; \text{ or } \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} / 2, \text{ if } |\boldsymbol{\mu}| < 2m_0;$$

and, for the torques

$$M_i = \frac{m_0 \varphi_i}{J_i \sqrt{\varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2}}, \text{ if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 \geq 4m_0^2 \quad (18)$$

$$M_i = \varphi_i / (2J_i), \quad \text{if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 < 4m_0^2$$

Because the minimized functional (16) in an explicit form not depends from angular velocities  $\omega_i$ , equations (6) take the form (15), in which  $r_i = p_i$ . Optimal solution is determined by

the closed system of equations (1), (2), (8), (15), and (18). In general case, we not may to solve practically this system of equations; integration of this system of equations encounters mathematical difficulties and demands considerable computing expenses. Type of a turn is difficult enough, and it has no analytical description (in the form of the final equations). Therefore the boundary value problem for the maximum principle (determining the numerical values  $\mathbf{p}(0)$  and  $\boldsymbol{\varphi}(0)$ ) can be solved exclusively numerical methods (for example, a prorage method [6], etc.).

For specific case, when  $J_1 = J_2 = J_3$ , analytical solution of formulated problem (1), (2), (3), (4), (16), (17) exists, and this solution is unique. In this concrete case  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  and systems of equations (1) and (15) have considerably simpler form – they become linear and transform to the form  $\dot{\omega}_i = M_i / J_i$  and  $\dot{\varphi}_i = -p_i$ . Solution of last equations together with equations (8), (18) and equalities (4) has the form:

$$\varphi_i = a(t)p_i \quad (19)$$

where  $a(t)$  is a scalar function of time ( $i = \overline{1,3}$ ).

Solution (19) is unique. Let us designate as  $\varepsilon$  the angle between vectors  $\mathbf{p}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ ). From (18) follows that vectors  $\mathbf{M}$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  have the same direction (because  $J_1 = J_2 = J_3$ ). If  $\varepsilon \neq 0$  and  $\varepsilon \neq \pi$ , then  $d|\boldsymbol{\omega}|/dt > 0$  always, within all interval of time  $0 \leq t \leq T$ , including  $t = T$ . In this situation, boundary condition  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$  will not be reached. Hence, any solution at which  $\varepsilon \neq 0$  and  $\varepsilon \neq \pi$  (i.e.  $\boldsymbol{\varphi}(0) \neq a \mathbf{p}(0)$ , where  $a$  is some number), not satisfies to purpose of a turn and not transfers the spacecraft into the required state  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ ,  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ . Only dependence  $\boldsymbol{\varphi}(t) = a(t)\mathbf{p}(t)$  remains such one solution which satisfies to necessary conditions of optimality (8), (15), (18) (in accordance with Pontryagin's maximum principle) and to the boundary conditions for solution  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ,  $\Lambda(t)$  of equations (1), (2).

We will substitute functions  $\varphi_i$  calculated using the formulas (19), in equalities (15), taking into account the values  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ . As result, we obtain the relations  $\dot{a} = -1$  and  $\dot{p}_i = 0$  for all  $i = \overline{1,3}$  (and hence,  $|\mathbf{p}| = \text{const}$ ). For this purpose it is sufficient to differentiate with respect to time the left-hand and right-hand sides of equality (19), to take squares from the left-hand and right-hand sides of equality received after differentiation, and then, to substitute the right-hand sides of the equations (8) instead  $\dot{p}_i$ .

$$\dot{a}^2 + a^2(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2)/(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 1$$

It is the first equation (we remind that  $\mathbf{p} \neq 0$ ). Now we will increase the equations  $p_i \dot{a} + \dot{p}_i a = -p_i$  on  $p_i$  at the left and on the right, and we will combine the received equalities (we add this equations). We have obtained the second equation

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dot{a} = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

whence we have  $\dot{a} \equiv -1$ , and from first equation will be  $\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2 = 0$  what is possible only if  $\dot{p}_i = 0$ .

The case when  $\varepsilon = \pi$  ( $\boldsymbol{\varphi}(0) \cdot \mathbf{p}(0) < 0$ ) not considered because, in this case, vector  $\boldsymbol{\varphi}$  has the same direction for any moment of time (because (15) presence) opposite to a direction of vector  $\mathbf{p}$ , and magnitude of vector  $\boldsymbol{\varphi}$  increases (it follows from (15)). In this case, moment  $\mathbf{M}$  also will have constant direction and its magnitude will increase (from initial level to threshold

value  $m_0$ ), and boundary condition (4) of control problem cannot be satisfied, and hence such solution is inadmissible. In final, we rewrite optimal solution for conjugate variables  $\varphi_i$  in the form  $\varphi_i(t) = (a(0) - t)p_i$ , where  $p_i = \text{const} = p_i(0)$ .

Taking into account expressions (19) connecting the conjugate variables  $\varphi_i$  and  $p_i$ , and the condition of maximum of Hamilton function (18), we conclude that optimal control (moments  $M_i$ ) satisfies to the equations

$$M_i = \chi(t) p_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (20)$$

where  $\chi(t)$  is scalar function of time satisfying to an inequality  $-m_0 \leq \chi(t) \leq m_0$ .

Turn of a spacecraft is executed from a state of rest. Solving the differential equations (1) together with equalities (20), we will have  $J_i \dot{\omega}_i = \chi(t) p_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ .

Solution  $\omega(t)$  is obtained by integration of this system of equations with accounting for equations (8) and with initial condition  $\omega(0) = 0$ . In the neighborhood of point  $t = 0$  we have  $J_i \omega_i = J_i \dot{\omega}_i dt = \chi dt p_i$ . Further integration of this specified system of the equations together with system (15) for initial condition  $\omega_i(0) = 0$  gives the equality

$$J_i \omega_i = p_i \int_0^t \chi dt.$$

It is valid, substituting the above equality into the last system of differential equations, we get

$$\text{identities } J_i \dot{\omega}_i = \dot{p}_i \int_0^t \chi dt + p_i \chi = p_i \chi = M_i \equiv J_i \dot{\omega}_i \quad (i = \overline{1,3}).$$

Taking into account  $J_i \omega_i = L_i$ ,  $|\mathbf{L}| = \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2}$ , and  $\int_0^t \chi dt = f(t)$  is scalar value,

we conclude that at optimal motion  $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$  and  $\omega \parallel \mathbf{p}$  (because  $J_1 = J_2 = J_3$ ). If at initial moment of time  $a(t) > 0$  then vectors  $\omega$  and  $\mathbf{p}$  will have same direction since the moment  $t = 0$ . Owing to (15) for variables  $\varphi_i$  it is necessary that  $\dot{a} < 0$ . Therefore  $a(0) > 0$  (otherwise,  $\text{sign}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}) = \text{const}$ , and the condition  $\omega(T) = 0$  cannot be never satisfied). Thus, we have proved that at optimal motion of spherical-symmetric spacecraft, with respect to the criterion (16), vector  $\mathbf{L}$  of angular momentum has a constant direction, but its module varies from zero to maximum value and back to zero. Spacecraft rotates around the Euler axis with angular velocity changing on magnitude (the direction of a vector of angular velocity remains invariable). Angular acceleration is maximum in the turn beginning, then it decreases to zero, changes a sign to the opposite one and damps angular velocity with accruing intensity (it increases on the module, reaching as much as possible negative value).

Analyzing the necessary conditions of optimality (8), (15), (18) together with equations of motion (1), (2) we come to conclusion that formally for solution (19) two combinations of functions  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  are possible. In the first case rotation of a spacecraft from position  $\Lambda_{\text{st}}$  into position  $\Lambda_f$  occurs in the direction of minimal angle of a turn ( $(\omega(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{\text{st}} \circ \Lambda_f)) \text{sign}(\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{st}} \circ \Lambda_f)) \geq 0$ ). The designation  $\text{sqa}(\bullet)$  means operation of separation of the scalar part of a quaternion [3]. The second combination  $\varphi_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  corresponds to turn of a spacecraft from position  $\Lambda_{\text{st}}$  into position  $\Lambda_f$  in the direction opposite to the minimal angle of a turn ( $(\omega(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{\text{st}} \circ \Lambda_f)) \text{sign}(\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{st}} \circ \Lambda_f)) \leq 0$ ). Obvi-

ously, last case cannot be considered optimum, because for same time of turn  $T$  the big average velocity of rotation is required, so value of an index (16) will be obviously more than in the first case, when  $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \geq 0$ . Thus, the decision of a problem (1)–(4), (16), (17) – initial conditions  $p_i(0)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  and optimal functions  $\varphi_i(t)$ ,  $M_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  – is determined unequivocally (it is unique for given values  $\Lambda_{st}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $m_0$ ,  $J_i$ ,  $T$ ). Therefore, optimal value  $\mathbf{p}(0)$  is accepted by the equal

$\mathbf{p}(0) = \text{sign}(\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) / |\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)|$  (here  $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \neq 0$ , otherwise  $\Lambda_{st} \equiv \Lambda_f$ , and a turn is not required, optimal control is  $\mathbf{M} = 0$ ).

More detailed studying of programmed functions  $M_i(t)$  and properties of optimal motion  $\boldsymbol{\omega}(t)$  (including time characteristics) is a separate problem, and it demands independent investigation in detail. We will tell only, that in dependence from the turn conditions (from the angle of final turn  $\vartheta = 2\arccos(\text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f))$ , time of turn  $T$  and parity of the maximal moment  $m_0$  and moment of inertia of the spacecraft  $J_1 = J_2 = J_3$ ) are possible three variants of optimal control and, accordingly, three optimal motions:

- 1) rotation with the maximal moment  $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$  directed in a positive direction of the Euler axis; next motion with linearly decreasing on magnitude (from  $m_0$  to zero) moment  $\mathbf{M}$  directed along vector  $\boldsymbol{\omega}$  of absolute angular velocity ( $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$ ); further, motion with linearly increasing on magnitude (from zero to  $m_0$ ) moment  $\mathbf{M}$  which have the direction opposite to angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$  ( $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$ ); and last phase – rotation with the greatest possible moment  $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$  opposite directed to positive direction of the Euler axis.
- 2) rotation with linearly decreasing on module (from some  $m(0)$  to zero) the moment  $\mathbf{M}$  directed along positive direction of the Euler axis ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} > 0$ ), and then rotation with linearly increasing on module (from zero to  $m(0)$ ) moment  $\mathbf{M}$ , but its direction oppositely to angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$  ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} < 0$ );  $m(0) \leq m_0$ .
- 3) rotation with the greatest possible moment  $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$  directed along positive direction of the Euler axis, and then rotation with the greatest possible moment  $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$  with opposite direction. It is relay control, and it corresponds to the maximum fast response (to a turn of a spacecraft for minimal time).

The described types of a turn are explained visually by fig.3. Here it is supposed that the controlling moment is presented in the form  $\mathbf{M} = s(t)\mathbf{p}$ , where  $s(t)$  is scalar function of time, and  $|\mathbf{p}| = 1$ . The upper part of fig.3 corresponds to the first type of optimal motion (linear control with saturation), the middle part – to the second type (linear control) and the lower part – to the third type (relay control). For zero boundary angular velocities ( $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ ) times  $t_1$ ,  $t_2$  satisfy to the equation  $t_1 + t_2 = T$ . The second type of control is realized in the case when the given time  $T$  is great (a turn is made with rather small angular velocity).

For all three types of control, change of a direction of moment  $\mathbf{M}$  occurs at the point  $t = T/2$ . If magnitude of moment  $|\mathbf{M}|$  varies linearly, moment  $\mathbf{M}$  is equal to zero at the moment of time  $t = T/2$  ( $\mathbf{M}(T/2) = 0$ ). If relay control is realized ( $T$  is minimum possible value), time moment  $t = T/2$  is point of a switching (in this moment of time, sign of all three controlling functions  $M_i$  is changed to the opposite). It is worthwhile to note that not always it is possible to carry out a turn for the assigned time  $T$ , having the preset values  $\Lambda_{st}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $m_0$ ,  $J_i$ . If a parity of parametres  $\vartheta$ ,  $T$ ,  $m_0$ ,  $J_i$  (them combination) is such at which the solving of a problem of optimal fast response at constraint (17) gives value  $T_{\text{fast}} > T$ , where  $T$  is the given time of a turn, the realisation of maneuver of a turn with such original data  $\Lambda_{st}$ ,  $\Lambda_f$ ,  $m_0$ ,  $J_i$ ,  $T$  is impos-

sible, and the formulated problem of optimal control (1)–(4), (16), (17) has no decision. Taking into account linear character of variation of angular velocity module during control of fast response, the time  $T_{\text{fast}}$  is found from expression  $T_{\text{fast}} = 4J_i \vartheta / (m_0 T_{\text{fast}})$ . From here,  $T^2 = 4J_i \vartheta / m_0$  is the condition of practicability of a turn.

In the considered particular example the vector  $\mathbf{p}$  determines a positive direction of the Euler axis. In other cases of optimal turn [7], the vector  $\mathbf{p}$  is interpreted as the unit vector of angular momentum of a spacecraft during a turn (we will notice that for spherical-symmetric bodies  $J_1 = J_2 = J_3$  the direction of angular momentum coincides with positive direction of the Euler axis). If a kinematic problem of a turn is solved then a constructing the optimal program of control becomes considerably simpler – the order of the boundary value problem for the maximum principle varies from eighteen (for a dynamic problem of a turn) to twelve (for a kinematic problem of a turn) if are used the directing cosines, and from thirteen to seven if we use quaternion form of representation of a kinematic equations of spacecraft motion around a centre of mass. The order of the closed system of equations decreases from nine to three, and, in many cases, this fact allows to lead up solution of optimization problem to final relationships and to obtain the required solution in the form of concrete mathematical expressions.

## 5. Conclusion

In this article, relations and equations which are general at the solving the optimal control problems concerning orientation of solid body (and, in particular, a spacecraft) with use of maximum principle independently from a form of description of rotation kinematics (using the directing cosines, quaternions, etc.) are revealed. It is supposed that the optimal program of control is constructed on basis of maximum principle by Pontryagin. It is demonstrated that independently from type of the used parameters of motion and from a form of representation of a kinematic equations there are such universal conjugate variables which lead to same form of the writing of the Hamilton function, and they made technology and algorithm of search of resulting solution, which is optimal in sense of an assigned criterion, as uniform technics.

Variables replacement with help of which the conjugate system of equations corresponding to kinematic parameters of spacecraft rotation is led into a canonical form – linear system of the ordinary differential equations in which coefficients are components of angular velocity vector of a spacecraft, is offered. It is shown that for the decision of many optimal control problems of spatial orientation of a spacecraft (as solid body) an offered system of the equations and structure of the Hamilton function are valid independently from choice of kinematic parameters specifying angular position of spacecraft-fixed axes relative to reference coordinate system. Type and properties of optimal motion of a spacecraft are completely determined by solution of the closed system of nine (for a dynamic problem of orientation, where  $M_i$  are the controlling variables) or three (for a kinematic problem of orientation, where  $\omega_i$  are the controlling variables) differential equations, using components of universal vector  $\mathbf{r}$  (motionless in inertial coordinate system), independently from choice of kinematic equations describing angular motion of the spacecraft-fixed axes. For visual representation, example of consecutive use of the described technology of the solving the optimal control problems is given.

## References (in Russian)

1. B.V. Raushenbakh and E.N. Tokar'. Upravlenie orientatsiey kosmicheskikh apparatov [Spacecraft orientation control]. Moscow: Nauka, 1974.

2. A.P. Markeev. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow: Nauka, 1990.
3. V.N. Branets and I.P. Shmygalevskii. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of quaternions in problems of orientation of solid body]. Moscow: Nauka, 1973.
4. L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1983.
5. G. Korn and T. Korn. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook on mathematics for scientific employees and engineers]. Moscow: Nauka, 1988.
6. N.N. Moiseev. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow: Nauka, 1971.
7. M.V. Levskii. *Ob odnoy zadache prostranstvennogo razvorota kosmicheskogo apparata* [About one problem of spacecraft's spatial turn]. *Izv. VUZ. Instrument making*. Vol.51, No. 7, 2008.

**Levskii, Mikhail Valer'evich**, PhD (engineering science), senior researcher; leading researcher of Khrunichev State Research-and-Production Space Center (Research Institute of Space Systems, Moscow region). Published more than 150 scientific papers (scientific articles) and author of 25 inventions (Russian patents), laureate of Korolev Prize, International Educator of the Year 2007; member of the Marquis Who's Who family (9-th and 10-th Anniversary Editions of Who's Who in Science and Engineering, 25-th Silver Anniversary Edition of Who's Who in the World, and Who's Who in the World 2009). He specializes in control theory and automatic control systems and devices. Area of scientific interests: mechanics of spaceflight, theory of attitude control systems, a navigating and stabilization of flying vehicles, motion around a center of mass of spacecrafts, booster units and orbital stations.

## Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

Р.П. Мошкин

Московский Государственный университет им М.В. Ломоносова  
119991, Россия, Москва, Ленинские Горы, д. 1

При подготовке к спортивным соревнованиям и Олимпийским зимним Играм с помощью компьютера и специальных датчиков имитатора движения, прикрепленных к телу спортсмена, рассчитываются наиболее уязвимые (хоккей) и наиболее нагружаемые элементы – мышцы спортсмена, несущие основную нагрузку (лыжный спорт). Спортивные снаряды, как правило, изготавливаются индивидуально по «слепок» тела спортсмена (сани, коньки) и продвигаются в специальной аэродинамической трубе. Например, при изготовлении клюшек в хоккее учитывается сила удара и изгиб самой клюшки при ударе в трех основных местах: основание и те места, за которые руками держится непосредственно сама клюшка. В основном, учитывается сопротивление воздуха и направление ветра, а также технические характеристики, полученные опытным путем при прохождении спортсменом самой трассы. Так, сани изготавливаются таким образом, чтобы поворот на трассе при скорости свыше 130 км/ч осуществлялся приподнятием и одновременным поворотом головы и приподнятием ноги.

Но при этом в процессе подготовки к соревнованиям, как правило, не используются физико-математические аспекты, модели и расчеты в том виде, в котором они должны преобладать на самом деле, обеспечивая квалифицированную поддержку для спортсмена. Уравнения Пуанкаре-Четаева позволяют это сделать.

*Ключевые слова:* олимпийские игры, твердое тело, механическая система, алгебраические уравнения Пуанкаре-Четаева, обобщенная функция Лагранжа, линейные дифференциальные формы, структурные коэффициенты, инфинитезимальные линейные операторы, обобщенная непотенциальная сила

### 1. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на плоскости

Пусть твердое тело в форме пластинки опирается на наклонную плоскость острым полукруговым лезвием, жестко соединенным с пластинкой. Предполагается, что точка опоры лезвия может свободно двигаться по плоскости вдоль касательной к лезвию, но не может передвигаться в перпендикулярном направлении; проекция центра тяжести плоскости пусть совпадает с точкой опоры  $S$  лезвия. Составим уравнения движения построенной механической системы, используя обобщенную функцию Лагранжа, линейные дифференциальные формы, структурные коэффициенты, замкнутую систему инфинитезимальных линейных операторов и обобщенную непотенциальную силу [1–7]. Рассмотрен основной пример – сани Чаплыгина на наклонной плоскости [5–6]. Используются обобщенные уравнения Пуанкаре и Четаева для неголономных систем в случаях  $c_{rs}^m = \text{const}, Q_s^* = 0$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

$$r, s = 1, \dots, l, \quad m = 1, \dots, k$$

где  $L^*$  - обобщенная функция Лагранжа,  $\eta_s$  - линейные дифференциальные формы,  $c_{rs}^m$  - структурные коэффициенты,  $X_s$  - замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов,  $Q_s^*$  - обобщенная непотенциальная сила. Находится общее решение [1]:



$$\eta_1 = C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \phi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t, \quad C = \text{const},$$

$$x = x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \phi - \sin \phi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\phi_0 - \cos 2\phi),$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega} (\cos \phi_0 - \cos \phi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega} t$$

Обозначим через  $x, y$  координаты точки  $S$  в системе координат, жестко связанной с наклонной плоскостью (ось  $x$  направлена вдоль линии наклона вниз),  $\phi$  - угол между осью  $x$  и касательной к лезвию (см. рис. 2). В этих координатах функция Лагранжа и неголономная связь имеют вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha,$$

$\eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$ , т.к.  $\bar{v}_s \perp \bar{n} \Leftrightarrow -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$  - неголономная связь.

Пусть масса  $m = 1$ ,  $\alpha$  - угол наклона к горизонту. Тогда функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + gx \sin \alpha \quad (1)$$

$$\bar{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

где

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя значения частных производных из системы (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi) + \dot{y}(X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi) + \dot{\phi} X_3 = \\ & = X_1 (\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) + X_2 (-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi) + X_3 \dot{\phi}. \\ & \quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ & \quad \eta_1 \qquad \qquad \qquad \eta_2 \qquad \qquad \qquad \eta_3 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \eta_1 = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi; \\ \eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi \text{ (левая часть неголономной связи);} \\ \eta_3 = \dot{\phi} \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \phi - \eta_2 \sin \phi; \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \phi + \eta_2 \cos \phi; \\ \dot{\phi} = \eta_3 \end{cases} \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= b_{is}(x) \eta_s, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad b_{0s} = \delta_{0s} \\ X_s f &= b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad f(x) \in C^2 \\ [X_r, X_s] f &\equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m, r, s = 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Из системы (2) имеем

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Обобщенная функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha = \{ m = 1 \} = \\ &= \frac{\eta_1^2 \cos^2 \phi - 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \sin^2 \phi + \eta_1^2 \sin^2 \phi + 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \cos^2 \phi}{2} + \\ &+ \frac{I}{2} \eta_3^2 + gx \sin \alpha = \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2} \eta_3^2 + gx \sin \alpha \end{aligned}$$

Выпишем скобки Ли:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Окончательно

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} = X_2; \\ [X_3, X_2] = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} = -X_1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = X_2; \\ [X_3, X_2] = -X_1. \end{cases} \quad (5)$$

Замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов

$$X_s f = b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad f(x) \in C^2, \quad (6)$$

определяющих виртуальные и действительные перемещения системы

$$\delta f = \omega_r X_r f, \quad r = 1, \dots, k, \quad df = \eta_s X_s f dt, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad (7)$$

соответственно, где  $\omega_r \equiv a_{ri}(x) \delta x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $r = 1, \dots, k$ ) и  $\eta_s$  являются параметрами виртуальных и действительных перемещений, введенными Пуанкаре.

Система операторов является замкнутой системой в том смысле, что ее коммутатор (скобка Пуассона) имеет вид

$$[X_r, X_s]f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m, r, s = 0, 1, \dots, k \quad (8)$$

Суммирование по  $m$  в (8), где структурные коэффициенты определяются формулами

$$c_{rs}^m \equiv \left( \frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j} \right) b_{is} b_{jr} = a_{mj} \left( b_{ir} \frac{\partial b_{js}}{\partial x_i} - b_{is} \frac{\partial b_{jr}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

причем  $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$  ( $m, r, s = 0, 1, \dots, k$ ).

В нашем случае

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Следовательно,

$$[X_1, X_2] = 0 = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + c_{12}^3 X_3 \Rightarrow c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{12}^3 = 0;$$

$$[X_1, X_3] = X_2 = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2 + c_{13}^3 X_3 \Rightarrow c_{13}^1 = c_{13}^3 = 0, \quad c_{13}^2 = 1;$$

$$[X_3, X_2] = -X_1 = c_{32}^1 X_1 + c_{32}^2 X_2 + c_{32}^3 X_3 \Rightarrow c_{32}^1 = -1, \quad c_{32}^2 = c_{32}^3 = 0.$$

Так как  $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$  ( $m, r, s = 0, 1, \dots, k$ ), то  $c_{31}^2 = -1$ ,  $c_{23}^1 = 1$ ,

$$c_{21}^1 = c_{21}^2 = c_{21}^3 = c_{31}^1 = c_{31}^2 = c_{31}^3 = c_{23}^2 = c_{23}^3 = c_{11}^1 = c_{11}^2 = c_{11}^3 = c_{22}^1 = c_{22}^2 = c_{22}^3 = c_{33}^1 = c_{33}^2 = c_{33}^3 = 0.$$

Всего 27 коэффициентов.

Уравнения движения неголономной системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

где

$$L^* = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha - \text{обобщенная функция Лагранжа.}$$

Первое уравнение при  $s = 1$  (всего 9 слагаемых с  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} = \dot{\eta}_1 = & c_{11}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{21}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{31}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{11}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{21}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ & + c_{31}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{11}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{21}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{31}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_1 L^* = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $c_{31}^2 = -1$ , остальные коэффициенты  $c_{rs}^m$  равны 0.

Таким образом,

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha. \quad (\text{I})$$

Второе уравнение при  $s = 2$  (всего 9 слагаемых с  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} = \dot{\eta}_2 = & c_{12}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{22}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{32}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{12}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{22}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ & + c_{32}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{12}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{22}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{32}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_2 L^* = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $c_{32}^1 = -1$ , остальные коэффициенты  $c_{rs}^m$  равны 0.

Таким образом,

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha. \quad (\text{II})$$

Третье уравнение при  $s = 3$  (всего 9 слагаемых с  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} = I \dot{\eta}_3 = & c_{13}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{23}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{33}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{13}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{23}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ & + c_{33}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{13}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{23}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{33}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_3 L^* = \eta_2 \eta_1 + \eta_1 \eta_2 = 2\eta_1 \eta_2, \end{aligned}$$

где  $c_{23}^1 = 1$ ,  $c_{13}^2 = 1$ , остальные коэффициенты  $c_{rs}^m$  равны 0.

Таким образом,

$$I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2. \quad (\text{III})$$

В итоге, имеем систему из 3-х уравнений (I), (II) и (III):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha; \\ I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2. \end{cases} \quad (10)$$

Но  $\eta_2 = 0$ , см. неголономную связь;  $\eta_3 = 0$ .

Таким образом,  $\dot{\eta}_1 = g \cos \phi \sin \alpha$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 0$ ,  $\dot{x} = \eta_1 \cos \phi$ ,  $\dot{y} = \eta_1 \sin \phi$  и их общее решение есть [2]:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \phi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t, \quad C = \text{const}, \\ x &= x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \phi - \sin \phi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\phi_0 - \cos 2\phi), \\ y &= y_0 + \frac{C}{\omega} (\cos \phi_0 - \cos \phi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega} t. \end{aligned}$$

### Пример.

В качестве примера рассматривается неголономная система (рис. 1), моделирующая качение плоского твердого тела – саней Чаплыгина на наклонной плоскости (рис. 2), сфере (рис. 3), эллипсоиде вращения (рис. 4) и комбинированной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности (рис. 7).

Постановка задачи. Как пример использования новой формы уравнений Пуанкаре рассматривается движение – качение саней Чаплыгина по наклонной плоскости (рис. 2), сфере (рис. 3) и эллипсоиду вращения (рис. 4). Сложное движение саней Чаплыгина с неудерживающими связями (как результат суперпозиции первых трех случаев) представлено на рис. 7. Для вывода уравнений движения при движении саней Чаплыгина на наклонной плоскости записываются уравнения Пуанкаре. В работе для движения саней Чаплыгина на сфере и на эллипсоиде вращения (рис. 8) записываются уравнения Аппеля, определяется энергия ускорений.

Вывод. Наличие в уравнениях движения относительно  $x, y$  функций  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$  объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по плоскости происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

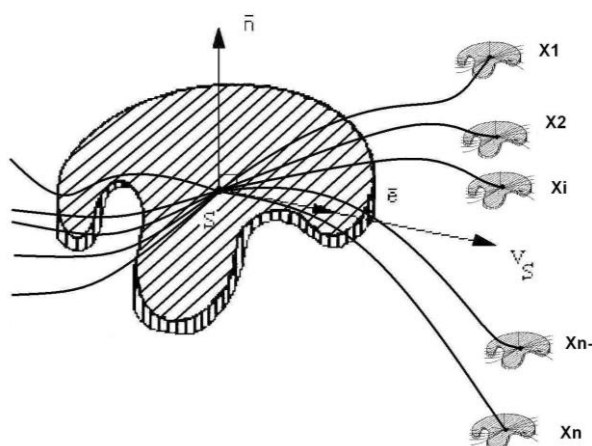


Рис. 1. Неголономная система

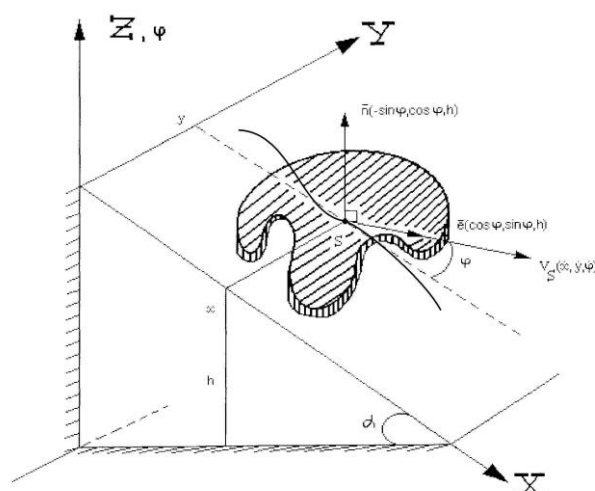


Рис. 2. Сани Чаплыгина на наклонной плоскости. Уравнения Пуанкаре

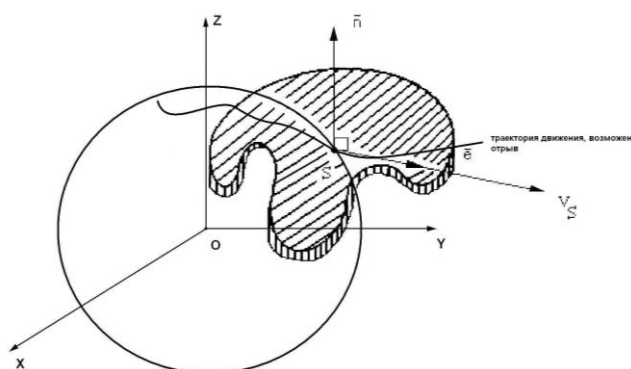


Рис. 3. Сани Чаплыгина на сфере. Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

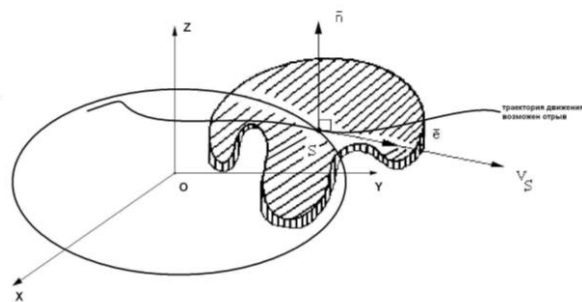


Рис. 4. Сани Чаплыгина на эллипсоиде вращения. Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

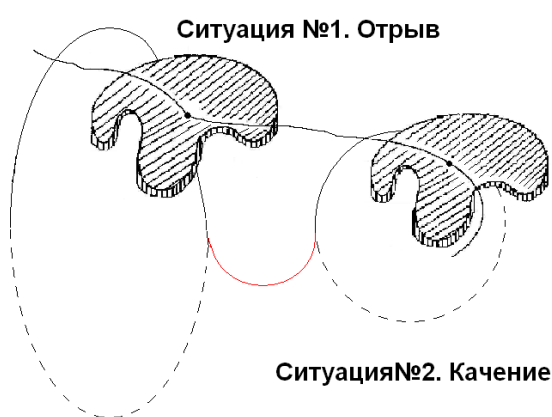


Рис. 5. Реальный путь

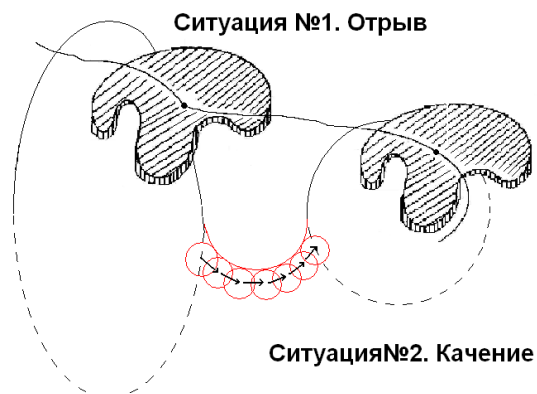
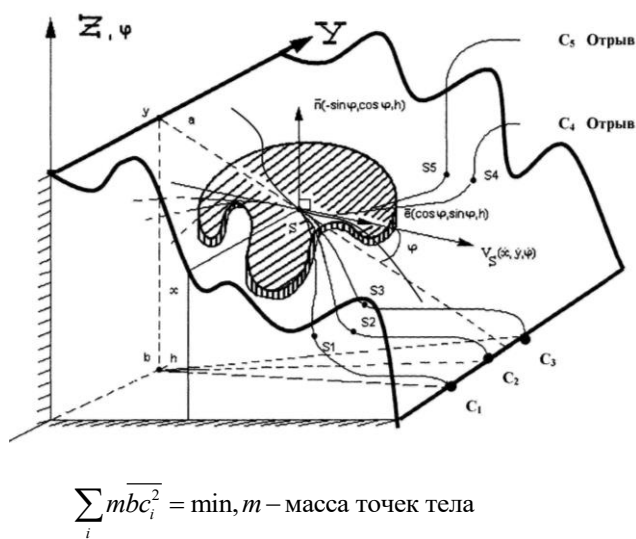


Рис. 6. Решение для реального пути



Неудерживающие связи. Необходимо правильно посчитать энергию ускорений. Тривиальный факт.

Рис. 7. Сани Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности

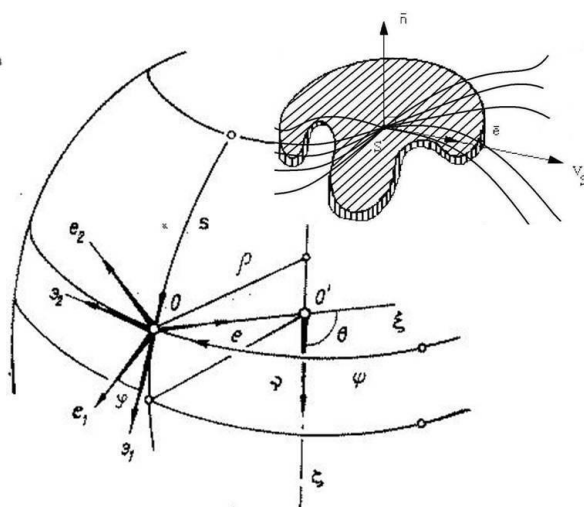


Рис. 8. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на сфере и эллипсоиде вращения

Во второй части работы рассмотрен пример – движение саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности. Используются уравнения Аппеля на сфере и эллипсоиде вращения. Выписывается энергия ускорений.

## 2. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на сфере

Рассмотрим твердое тело, подчиненное следующим связям: точка тела остается на поверхности (11); выходящий из точки  $O$  фиксированный в теле луч совмещается с нормалью  $e$ ; скорость точки  $O$  сохраняет в теле направление (рис. 8). Такое тело назовем санями Чаплыгина [5, 6].

Вследствие этих связей базис  $O_{e_1 e_2 e}$  неизменно связан с телом и определенный выше вектор  $\omega$  есть абсолютная угловая скорость саней. Пусть  $M$  – масса саней,  $\Theta$  – тензор инерции саней в точке  $O$ , а вектор

$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c e$$

проведен из точки  $O$  в центр масс тела. Уравнения движения тела запишем в форме уравнений Аппеля. За псевдоскорости выберем переменные  $v$  и  $\omega$ .

### Элементы теории поверхностей

Полагаем, что координатная сеть на поверхности

$$r = r(q_1, q_2) \quad (11)$$

составлена из линий кривизны, имеющих в каждой точке направления, указываемые единичными векторами

$$\varepsilon_1(q_1, q_2) = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_1}, \quad \varepsilon_2(q_1, q_2) = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2}, \quad (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \delta_{ij} \quad (12)$$

Здесь  $h_1(q_1, q_2), h_2(q_1, q_2)$  – параметры Ламе:

$$h_i(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial r}{\partial q_i} \right|, \quad i = 1, 2.$$

Вектор  $e = [\varepsilon_1 \times \varepsilon_2]$  нормален к поверхности (11) в точке  $(q_1, q_2)$ .

Обозначая через  $k_i(q_1, q_2)$ ,  $(i = 1, 2)$  главные кривизны поверхности (11), имеем по теореме Родрига

$$\frac{\partial e}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \varepsilon_1, \quad \frac{\partial e}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \varepsilon_2.$$

### Кинематические соотношения

На принадлежащей поверхности траектория

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t)$$

определена скорость точки

$$v = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 = h_1 \dot{q}_1 \varepsilon_1 + h_2 \dot{q}_2 \varepsilon_2.$$

Введем указывающий направление скорости единичный вектор

$$e_1 = \vartheta_1 \cos \phi + \vartheta_2 \sin \phi.$$

Тогда  $v = v e_1$  и, следовательно,

$$\dot{q}_1 = \frac{v}{h_1} \cos \phi, \quad \dot{q}_2 = \frac{v}{h_2} \sin \phi.$$

Введем еще вектор

$$e_2 = -\vartheta_1 \sin \phi + \vartheta_2 \cos \phi.$$

Производная единичного вектора  $e_1$  равна

$$\dot{e}_1 = \left[ \dot{\phi} + \left( \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2} \right] e_2 + (k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e,$$

а производная единичного вектора нормали равна

$$\dot{e} = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e_1 + (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi e_2$$

Вектор

$$\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega e,$$

определим так, чтобы

$$\dot{e}_1 = [\omega \times e_1], \quad \dot{e} = [\omega \times e]$$

Тогда вектор  $\omega$  имеет компоненты:

$$\omega_1 = (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi, \quad \omega_2 = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v,$$

$$\omega = \dot{\phi} + \left( \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2}.$$

### Энергия ускорений

Энергию ускорений данной системы вычислим по формуле:

$$S = \frac{M}{2} \dot{v}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot \Theta \varepsilon) + (\varepsilon \cdot [\omega \times \Theta \omega]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times v]) + \\ + M (\dot{v} \cdot [\varepsilon \times c]) + M ([\omega \times v] \cdot [\varepsilon \times c]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times [\omega \times c]]).$$

Здесь  $\varepsilon$  - угловое ускорение саней,  $\Theta$  - тензор инерции тела в точке прикрепления лезвия:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_1 & B & B_1 \\ B & A_2 & B_2 \\ B_1 & B_2 & A \end{pmatrix}$$



В общем случае энергия ускорений имеет очень громоздкий вид. Поэтому в явном виде запишем ее только для частных случаев. При этом считаем, что движение саней происходит по инерции.

### Энергия ускорений и уравнения движения в случае саней Чаплыгина на сфере

Энергия ускорений:

$$S = \frac{1}{2} \left( M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) \dot{v}^2 - \left( \frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{\omega} \dot{v} + \frac{A}{2} \dot{\omega}^2 + \\ + \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega v \dot{\omega} - \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega^2 \dot{v} + \frac{B}{R^2} \omega v \dot{v} - \frac{B}{R^2} v^2 \dot{\omega}.$$

Уравнения движения:

$$\left( M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) \dot{v} - \left( \frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{\omega} - \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega^2 + \frac{B}{R^2} \omega v = 0, \\ A \dot{\omega} - \left( \frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{v} + \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega v - \frac{B}{R^2} v^2 = 0.$$

Уравнения движения допускают интеграл энергии:

$$H = \frac{1}{2} \left( M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) v^2 - \left( \frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) v \omega + \frac{A}{2} \omega^2 = h$$

Впервые интегрируемость данной задачи была установлена в работе Л.Н. Орешкиной [6], а поправка внесена А.С. Кулешовым [5].

### Стационарное движение

В системе существует стационарное движение:

$$v = const, \quad \omega = const, \quad \frac{B}{R^2} v = \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega.$$

Физический смысл данного условия: проекция на направление лезвия кинетического момента тела, взятого относительно центра сферы, должна обращаться в ноль.

### Вывод

Наличие в уравнениях движения относительно  $x, y$  функций  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$  объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по сфере происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

### 3. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на эллипсоиде вращения

В третьей части работы было проведено исследование (здесь не показано) усложненного движения – качения плоского твердого тела по эллипсоиду вращения. Используются уравнения Аппеля, считается энергия ускорений. Постановка задачи и кинематические соотношения в случае саней Чаплыгина на эллипсоиде вращения такие же как и в случае саней Чаплыгина на сфере, но при расчете энергии ускорений и вывода уравнений движения учитываются кривизны поверхности  $k_1$  и  $k_2$ , соответственно сплюсненного и вытянутого эллипсоидов вращений.

## Вывод

Наличие в уравнениях движения относительно  $x, y$  функций  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$  объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по эллипсоиду вращению происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

## 4. Общий вывод и теорема

**Теорема.** В общем случае, движение – качение без проскальзывания, скольжение по плоскости, сфере и эллипсоиду вращению, а значит, и по наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности (рис. 7) происходит не по прямой, а по некоторому синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

## Литература

- [1] В.В. Румянцев. Об общих уравнениях динамики. Нелинейная механика/ Под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцев, А.В. Карапетяна. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 432 с. ISBN 5-9221-009-2.
- [2] Л.М. Мархашов. Об общих уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре-Четаева//ПММ. 1985. Т.49, вып.1, с.43-55.
- [3] Ю.Ф. Голубев. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с. ISBN 5-211-04244-1
- [4] Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков. Теоретическая механика: Учеб. для вузов; Под ред. П.Е. Товстика. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2000. 592 с.: ил. ISBN 5-06-003660-X
- [5] А.С. Кулешов. Движение саней Чаплыгина по выпуклой поверхности/ Материалы Седьмого международного симпозиума по классической и небесной механике, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.В. Румянцева.
- [6] Л.Н. Орешкина. Некоторые обобщения задачи о санях Чаплыгина. Мех. тв. тела, Киев, 1986, № 18, с. 34–39.
- [7] Сулов Г.К. Теоретическая механика. М., Гостехиздат, М.-Л., 1946, 655 с.

**Мошкин Руслан Петрович**, окончил Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; аспирант кафедры теоретической механики и мехатроники. Научный руководитель: профессор Татарин Ярослав Всеволодович. Область научных интересов: неголономная механика, теоретическая механика, классическая механика, аналитическая механика, устойчивость движения.

**E-mail:** [rmoshkin@yandex.ru](mailto:rmoshkin@yandex.ru)

## Poincare equations and elements of Li group theory in problems of Chaplygin sleigh motion

**R.P. Moshkin**

M. V. Lomonosov Moscow State University  
119991, Russian Federation, Moscow, Leninskie Gory, d. 1 (Main Building)

At preparation for sporting events and Olympic Winter Games with a computer and special simulator motion sensors attached to the athlete body, we can calculate the most vulnerable zones (hockey) and most tired zoned in the athlete muscles bearing the basic load (skiing). The apparatus is usually made individually by the cast athlete body (toboggan, ice skates) and purged in a special wind tunnel. For example, impact force and stick curve is considered at hockey stick manufacture by impact in three key areas: base and place for hands at the stick. In general, the air resistance and wind direction are taken into account in such calculations, as well as technical specifications empirically obtained when passing the sport track. So, due to specific toboggan construction, the athlete performs uplift and simultaneous rotation of the head and uplift of the leg on the track at speed over 130 km/h.

But, as a rule, sport does not use physical and mathematical aspects and calculations in the form, in which they should prevail in reality. Poincare and Chetaev equations allow doing this.

*Key words:* Olympic Games, rigid body, mechanical system, Poincare and Chetaev algebraic equations, generalized Lagrange function, linear differential forms, structural coefficient, infinitesimal linear operators, generalized nonpotential force

### 1. Problem statement in the case of Chaplygin sleigh on a plane

Let a rigid body in form of plate leans on an inclined plane by the sharp half-round blade, which is rigidly attached to the plate. We assume that the blade support point can freely move along the plane tangent to the blade, but it cannot move in perpendicular direction; let the projection of the center of gravity coincide with the plane through the support point S of the blade. Let us find the equations of motion of the created mechanical system using generalized Lagrange function, linear differential forms, structural coefficients, closed system of infinitesimal linear operators and generalized nonpotential force [1–7].

Let us consider a basic example - Chaplygin sleigh on an inclined plane [5, 6]. We use generalized Poincare-Chetaev equations for non-holonomic systems in cases  $c_{rs}^m = \text{const}, Q_s^* = 0$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

$$r, s = 1, \dots, l, \quad m = 1, \dots, k$$

where  $L^*$  - generalized Lagrange function,  $\eta_s$  - linear differential forms,  $c_{rs}^m$  - structural coefficients,  $X_s$  - closed system of infinitesimal linear operators,  $Q_s^*$  - generalized non-potential force. We find a general solution [1]:

$$\eta_1 = C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \phi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t, \quad C = \text{const},$$

$$x = x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \phi - \sin \phi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\phi_0 - \cos 2\phi),$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega}(\cos \phi_0 - \cos \phi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2}(\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega}t.$$

Let  $x, y$  stand for coordinates of the point  $S$  in the coordinate system rigidly attached to the inclined plane (axis  $x$  is directed down along the line of inclination)),  $\phi$  - the angle between the axis  $x$  and tangent to the blade (see. Fig. 2). In these coordinates, the Lagrange function and non-holonomic constraint have the following form:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha,$$

$\eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$ , because  $\bar{v}_s \perp \bar{n} \Leftrightarrow -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$  – non-holonomic constraint.

Let the mass  $m=1$ ,  $\alpha$  - the angle of inclination to the horizontal. Then, the Lagrange function has the following form:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + gx \sin \alpha \quad (1)$$

$$\bar{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

where

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3 \end{cases} \quad (2)$$

Substituting the values of partial derivatives from the system (2) into equation (1):

$$\begin{aligned} & \dot{x}(X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi) + \dot{y}(X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi) + \dot{\phi}X_3 = \\ & = X_1(\underbrace{\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi}_{\parallel \eta_1}) + X_2(\underbrace{-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi}_{\parallel \eta_2}) + X_3 \underbrace{\dot{\phi}}_{\parallel \eta_3}. \end{aligned}$$

In this way,

$$\begin{cases} \eta_1 = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi; \\ \eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi \quad (\text{left part of non-holonomic); constraint} \\ \eta_3 = \dot{\phi} \end{cases} \quad (3)$$

Wherefrom

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \phi - \eta_2 \sin \phi; \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \phi + \eta_2 \cos \phi; \\ \dot{\phi} = \eta_3 \end{cases} \quad (4)$$

As

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= b_{is}(x)\eta_s, \quad s=0,1,\dots,k, \quad i=0,1,\dots,n, \quad b_{0s} = \delta_{0s} \\ X_s f &= b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s=0,1,\dots,k, \quad f(x) \in C^2 \\ [X_r, X_s] f &\equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m,r,s=0,1,\dots,k.\end{aligned}$$

From system (2) we obtain

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

The generalized Lagrange function:

$$\begin{aligned}L^* &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha = \{ \quad m=1 \quad \} = \\ &= \frac{\eta_1^2 \cos^2 \phi - 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \sin^2 \phi + \eta_1^2 \sin^2 \phi + 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \cos^2 \phi}{2} + \\ &+ \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha\end{aligned}$$

Let us find the Lie bracket:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{cases}$$

Finally,

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} = X_2; \\ [X_3, X_2] = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} = -X_1. \end{cases}$$

In this way,

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = X_2; \\ [X_3, X_2] = -X_1 \end{cases} \quad (5)$$

The closed system of infinitesimal linear operators:

$$X_s f = b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad f(x) \in C^2, \quad (6)$$

determining the virtual and real system displacements

$$\delta f = \omega_r X_r f, \quad r = 1, \dots, k, \quad df = \eta_s X_s f dt, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad (7)$$

respectively, where  $\omega_r \equiv a_{ri}(x) \delta x_i$  ( $i = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, k$ ) и  $\eta_s$  are parameters of the virtual and real displacements introduced by Poincare.

The system of operators is the closed system in the sense that its commutator (Poisson bracket) has the following form:

$$[X_r, X_s] f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m, r, s = 0, 1, \dots, k \quad (8)$$

Summation by  $m$  in (8), where the structural coefficients are defined by the formulas

$$c_{rs}^m \equiv \left( \frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j} \right) b_{is} b_{jr} = a_{mj} \left( b_{ir} \frac{\partial b_{js}}{\partial x_i} - b_{is} \frac{\partial b_{jr}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

besides  $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$  ( $m, r, s = 0, 1, \dots, k$ ).

In our case

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Consequently,

$$[X_1, X_2] = 0 = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + c_{12}^3 X_3 \Rightarrow c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{12}^3 = 0;$$

$$[X_1, X_3] = X_2 = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2 + c_{13}^3 X_3 \Rightarrow c_{13}^1 = c_{13}^3 = 0, \quad c_{13}^2 = 1;$$

$$[X_3, X_2] = -X_1 = c_{32}^1 X_1 + c_{32}^2 X_2 + c_{32}^3 X_3 \Rightarrow c_{32}^1 = -1, \quad c_{32}^2 = c_{32}^3 = 0$$

As  $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$  ( $m, r, s = 0, 1, \dots, k$ ), then

$$c_{31}^2 = -1, \quad c_{23}^1 = 1,$$

$$c_{21}^1 = c_{21}^2 = c_{21}^3 = c_{31}^1 = c_{31}^3 = c_{23}^2 = c_{23}^3 = c_{11}^1 = c_{11}^2 = c_{11}^3 = c_{22}^1 = c_{22}^2 = c_{22}^3 = c_{33}^1 = c_{33}^2 = c_{33}^3 = 0.$$

There are 27 coefficients.

The equations of motion of non-holonomic systems

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

where

$$L^* = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2} \eta_3^2 + gx \sin \alpha - \text{generalized Lagrange function.}$$

The first equation at  $s = 1$  (only 9 summands with  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} = \dot{\eta}_1 = c_{11}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{21}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{31}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{11}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{21}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{31}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{11}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{21}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{31}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_1 L^* = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

where  $c_{31}^2 = -1$ , the remaining coefficients  $c_{rs}^m$  are equal to 0.

In this way,

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha \quad (\text{I})$$

The second equation at  $s = 2$  (only 9 summands with  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} = \dot{\eta}_2 = c_{12}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{22}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{32}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{12}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{22}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{32}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{12}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{22}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{32}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_2 L^* = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

where  $c_{32}^1 = -1$ , the remaining coefficients  $c_{rs}^m$  are equal to 0.

In this way,

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha \quad (\text{II})$$

The third equation at  $s = 3$  (only 9 summands with  $c_{rs}^m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} = I \dot{\eta}_3 = c_{13}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{23}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{33}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{13}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{23}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{33}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{13}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{23}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{33}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_3 L^* = \eta_2 \eta_1 + \eta_1 \eta_2 = 2\eta_1 \eta_2, \end{aligned}$$

where  $c_{23}^1 = 1$ ,  $c_{13}^2 = 1$ , the remaining coefficients  $c_{rs}^m$  are equal to 0.

In this way,

$$I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2 \quad (\text{III})$$

As a result we have a system of 3 equations (I), (II) и (III):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha; \\ I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2 \end{cases} \quad (10)$$

But  $\eta_2 = 0$ , see non-holonomic constraint;  $\eta_3 = 0$ .

In this way,  $\dot{\eta}_1 = g \cos \phi \sin \alpha$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 0$ ,  $\dot{x} = \eta_1 \cos \phi$ ,  $\dot{y} = \eta_1 \sin \phi$  and their general solution is [2]:

$$\eta_1 = C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \varphi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad C = \text{const},$$

$$x = x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi),$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega} t$$

### Example.

As an example, we consider the non-holonomic system (Fig. 1). Rolling of a planar rigid body - Chaplygin sleigh on an inclined plane (Fig. 2), on a sphere (Fig. 3), on an ellipsoid of rotation (Fig. 4) and on a combined concave and convex non-smooth surface (Fig. 7).

**Problem statement.** A new form of Poincare equations is applied as an example for consideration of motion - rolling of the Chaplygin sleigh on an inclined plane (Fig. 2), on a sphere (Fig. 3) and on an ellipsoid of rotation (Fig. 4). The complicated motion of Chaplygin sleigh with unilateral constraints as a result of the superposition of the first three cases shown in Fig. 7. The Poincare equations are used to derive the equations of motion when the Chaplygin sleigh moves on an inclined plane. The Appell equations are applied when the Chaplygin sleigh moves on a sphere and ellipsoid of rotation (Fig. 8) and at the same time, acceleration energy shall be calculated.

**Conclusion.** Availability of  $\sin \phi$  and  $\cos \phi$  functions in the equations of motion with respect to the  $x, y$  coordinates explains that the motion - rolling without slipping, sliding on a plane occurs not along the straight line but in a sinusoidal manner: down-left-right, which is caused by arbitrary choice of the planar rigid body contour.

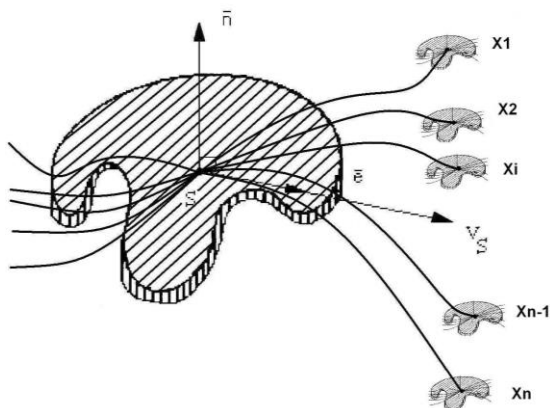


Fig. 1. Non-holonomic system

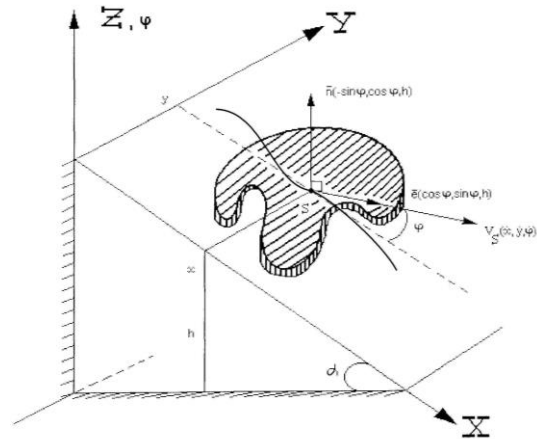


Fig. 2. Chaplygin sleigh on an inclined plane. Poincare equation

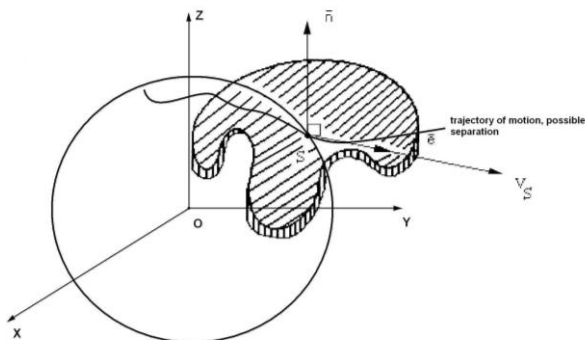


Fig. 3. Chaplygin sleigh on a sphere. Appell equation. Accelerations energy

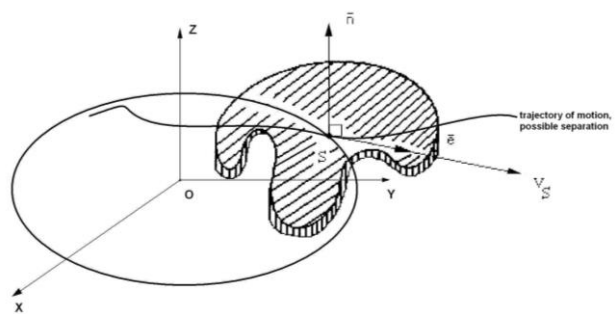


Fig. 4. Chaplygin sleigh on an ellipsoid of rotation. Appell equation. Accelerations energy.



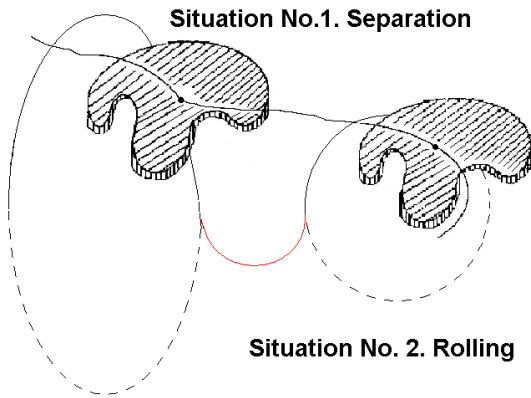


Fig. 5. Actual path

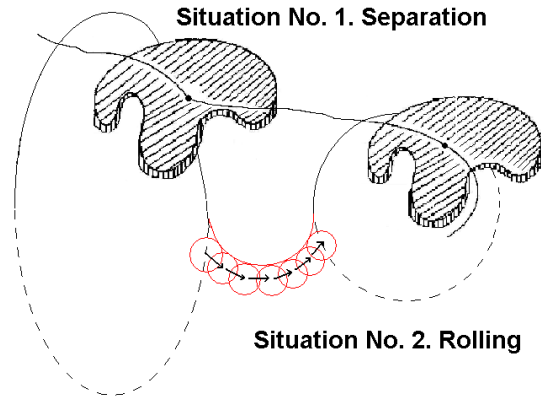


Fig. 6. Solution of actual path

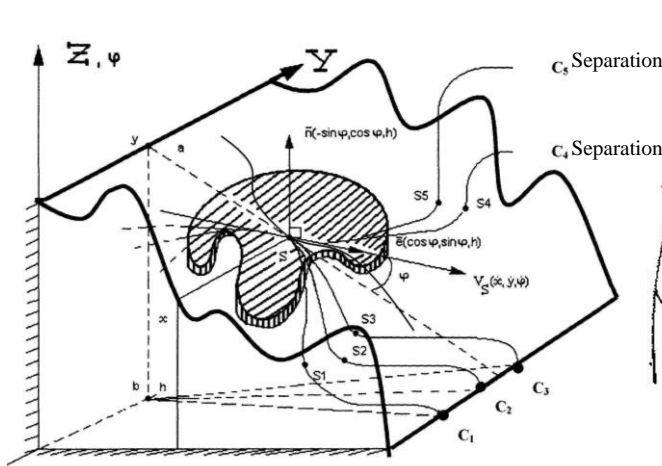


Fig. 7. Chaplygin sleigh on an inclined concave and convex non-smooth surface

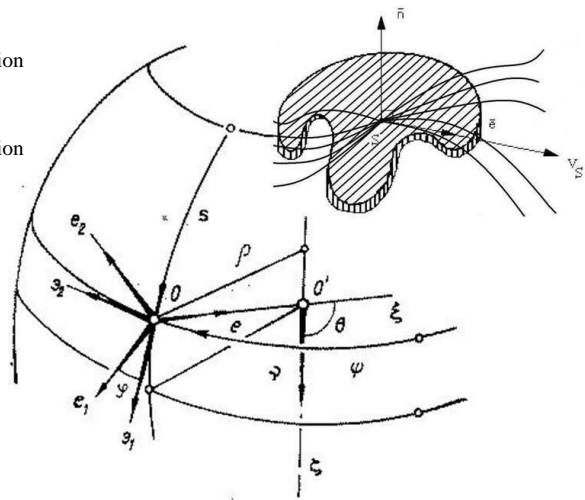


Fig. 8. Problem Statement in the case of Chaplygin sleigh on a sphere and ellipsoid of rotation

In the second part, we will consider the following example: the Chaplygin sleigh on an inclined concave and non-convex non-smooth surface. Here we use Appell equations on a sphere and ellipsoid of rotation. Acceleration energy shall be calculated.

## 2. Problem statement in the case of Chaplygin sleigh on a sphere

Let's consider a rigid body subordinated to the following constraints: the body point remains on the surface (11); the beam fixed in the body emerging from the point  $O$  is aligned with the normal  $e$ ; velocity of the point  $O$  saves direction in the body (Fig. 8). Such body we call the Chaplygin sleigh.

Due to such constraint, the basis  $O_{e_1 e_2 e}$  is invariably attached to the body and the defined above vector  $\omega$  is the absolute angular velocity of the sleigh. Let  $M$  - the sleigh mass,  $\Theta$  - the inertia tensor of the sleigh at the point  $O$ , and the vector

$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c e$$

is traced from the point  $O$  to the center of body mass. The equations of motion of the body, we write in the form of Appell equations. We choose the variables  $\upsilon$  and  $\omega$  due to their pseudo velocity.

### Elements of the theory of surfaces

We believe that the coordinate net on a surface

$$r = r(q_1, q_2) \quad (11)$$

is composed of lines of curvature having directions at each point, which are indicated by the unit vectors

$$\mathfrak{a}_1(q_1, q_2) = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_1}, \quad \mathfrak{a}_2(q_1, q_2) = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2}, \quad (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j) = \delta_{ij} \quad (12)$$

Here  $h_1(q_1, q_2), h_2(q_1, q_2)$  - Lamé parameters:

$$h_i(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial r}{\partial q_i} \right|, \quad i = 1, 2.$$

The vector  $e = [\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2]$  is normal to the surface (11) at the point  $(q_1, q_2)$ .

Denote  $k_i(q_1, q_2)$ ,  $(i = 1, 2)$  for the principal curvatures of the surface (11), and by Rodrigues formula, we have the following

$$\frac{\partial e}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \mathfrak{a}_1, \quad \frac{\partial e}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathfrak{a}_2.$$

### Kinematic relations

At the path belonging to the surface

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t)$$

is defined a velocity of the point

$$v = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 = h_1 \dot{q}_1 \mathfrak{a}_1 + h_2 \dot{q}_2 \mathfrak{a}_2.$$

We trace the unit vector indicating the direction of velocity

$$e_1 = \mathfrak{a}_1 \cos \phi + \mathfrak{a}_2 \sin \phi.$$

Then  $v = v e_1$  and, consequently,

$$\dot{q}_1 = \frac{v}{h_1} \cos \phi, \quad \dot{q}_2 = \frac{v}{h_2} \sin \phi.$$

We trace one more vector

$$e_2 = -\mathfrak{a}_1 \sin \phi + \mathfrak{a}_2 \cos \phi.$$

The derivative of the unit vector  $e_1$  is equal to

$$\dot{e}_1 = \left[ \dot{\phi} + \left( \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2} \right] e_2 + (k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e,$$

and the derivative of the normal unit vector is equal to

$$\dot{e} = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e_1 + (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi e_2$$

Vector

$$\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega e,$$

we define so that

$$\dot{e}_1 = [\omega \times e_1], \quad \dot{e} = [\omega \times e]$$

Then the vector  $\omega$  has components:

$$\omega_1 = (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi, \quad \omega_2 = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v,$$

$$\omega = \dot{\phi} + \left( \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2}.$$

### Acceleration energy

Acceleration energy of this system, we calculate by the formula:

$$\begin{aligned} S = & \frac{M}{2} \dot{v}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot \Theta \varepsilon) + (\varepsilon \cdot [\omega \times \Theta \omega]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times v]) + \\ & + M (\dot{v} \cdot [\varepsilon \times c]) + M ([\omega \times v] \cdot [\varepsilon \times c]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times [\omega \times c]]). \end{aligned}$$

Here  $\varepsilon$  - the angular acceleration of the sleigh,  $\Theta$  - the inertia tensor of the body at the point of blade attachment:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_1 & B & B_1 \\ B & A_2 & B_2 \\ B_1 & B_2 & A \end{pmatrix}$$

In general case, the acceleration energy has very cumbersome appearance. Therefore, in the visible form, we write it only for special cases. However, we assume that the motion of the sleigh is inertial.

### Accelerations energy and equations of motion in the case of Chaplygin sleigh on a sphere

Accelerations energy:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \left( M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) \dot{v}^2 - \left( \frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{\omega} \dot{v} + \frac{A}{2} \dot{\omega}^2 + \\ & + \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega v \dot{\omega} - \left( \frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega^2 \dot{v} + \frac{B}{R^2} \omega v \dot{v} - \frac{B}{R^2} v^2 \dot{\omega}. \end{aligned}$$

Equations of motion:

$$\left(M + \frac{A_2}{R^2} - 2\frac{Mc}{R}\right)\dot{v} - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2\right)\dot{\omega} - \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1\right)\omega^2 + \frac{B}{R^2}\omega v = 0,$$

$$A\dot{\omega} - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2\right)\dot{v} + \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1\right)\omega v - \frac{B}{R^2}v^2 = 0.$$

Equations of motion allow the energy integral:

$$H = \frac{1}{2}\left(M + \frac{A_2}{R^2} - 2\frac{Mc}{R}\right)v^2 - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2\right)v\omega + \frac{A}{2}\omega^2 = h$$

Firstly, integrability of this problem has been defined in the paper of L. N. Oreshkina [6], and amendments were made by A.S. Kuleshov [5].

### Stationary motion

The system has a stationary motion:

$$v = const, \quad \omega = const, \quad \frac{B}{R^2}v = \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1\right)\omega.$$

The physical meaning of this condition: the projection to the blade direction of the angular momentum of the body positioned with respect to the center of the sphere, shall go to zero.

### Conclusion

Availability of  $\sin\phi$  and  $\cos\phi$  functions in the equations of motion with respect to the  $x, y$  coordinates explains that the motion - rolling without slipping, sliding on a sphere occurs not along the straight line but in a sinusoidal manner: down-left-right, which is caused by arbitrary choice of the planar rigid body contour.

### 3. Problem statement in the case of Chaplygin sleigh on an ellipsoid of rotation

In the third part of the paper, we consider the complicated motion - rolling of planar rigid body on an ellipsoid of rotation. Here, we use Appell equations and calculate acceleration energy. Problem statement and kinematic relations in the case of Chaplygin sleigh on an ellipsoid of rotation are the same as in the case of Chaplygin sleigh on a sphere, but in calculation of acceleration energy and derivation of equations of motion are taken into account the surface curvatures  $k_1$  and  $k_2$ , i.e. prolate and oblate ellipsoid of rotation, respectively.

### Conclusion

Availability of  $\sin\phi$  and  $\cos\phi$  functions in the equations of motion with respect to the  $x, y$  coordinates explains that the motion - rolling without slipping, sliding on an ellipsoid of rotation occurs not along the straight line but in a sinusoidal manner: down-left-right, which is caused by arbitrary choice of the planar rigid body contour.

### 4. General conclusion and theorem

**Theorem.** In general case, motion - rolling without slipping, sliding on an plane, a sphere and an ellipsoid of rotation, and, consequently, on an inclined concave and convex non-smooth

surface (Fig. 7) occurs not along the straight line but in a sinusoidal manner: down-left-right, which is caused by arbitrary choice of the planar rigid body contour.

### References (in Russian)

- [1] V. V. *Rumyantsev*. Ob obshchikh uravneniyakh dinamiki. Nelineynaya mekhanika [On general equations of dynamics. Nonlinear mechanics]. Edited by V.M. Matrosov, V.V. Rumyantsev, A. V. Karapetyan. M.: FIZMATLIT, 2001. 432 p. ISBN 5-9221-009-2.
- [2] L. M. *Markhashov*. Ob obshchikh uravneniyakh Puankare i Puankare-Chetaeva [On general equations of Poincaré and Poincaré-Chetayev]. PMM. 1985, T.49, issue 1, pp. 43-55.
- [3] Y. F. *Golubev*. Osnovy teoreticheskoy mekhaniki [Fundamental of Theoretical Mechanics], Textbook. 2nd ed., rev. and add. M.: MGU, 2000. 719 p. ISBNB 5-211-04244-1
- [4] N. N. *Polyakhov*, S. A. *Zegzhda*, M. P. *Yushkov*. Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical Mechanics], Textbook. For universities; Edited by P. E. Tovstik, 2nd ed., rev. and add. M.: Higher school, 2000. 592 p.: ill. ISBNB 5-06-003660-X
- [5] A. S. *Kuleshov*. Dvizhenie saney Chaplygina po vypukloy poverkhnosti [Motion of Chaplygin sleigh on a convex surface], Files of the Seventh International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, dedicated to the 90<sup>th</sup> anniversary of academician V.V. Rumyantsev
- [6] L.N. *Oreshkina*. Nekotorye obobshcheniya zadachi o sanyakh Chaplygina. Mekhanika tverdogo tela [Some Generalizations of the Chaplygin Sleigh Problem. Solid State Mechanics], Kiev, 1986, No. 18, pp. 34–39
- [7] G.K. *Suslov*. Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical Mechanics]. M. Gostekhizdat, M.-L., 1946, 655 p.

**Ruslan Petrovich Moshkin**, graduated Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Mechanics and Mathematics Faculty; Post Graduate (Phd) of Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics; Supervisor: Professor Tatarinov Yaroslav Vsevolodovich. The domain of research interests: nonholonomic mechanics, theoretical mechanics, classical mechanics, analytical mechanics, stability of motion, position: doing science, tutor (physics, mathematics).  
E-mail: [rmoshkin@yandex.ru](mailto:rmoshkin@yandex.ru)

## **Optimization approach in closed loop green supply chain management** (a case of Indian company)

**S.S. Ali**

Fortune Institute of International Business  
VasantVihar, New Delhi, 110057, India

The green supply chain management has been emerging as an important new innovation that is being used by organizations to develop strategies in order to achieve objectives worldwide. Green supply chain management (GSCM) is popularly regarded as a management mode that comprehensively addresses environmental influences and utilization of resource efficiently. Organizations are using the issues of GSCM as an opportunity to be seized in demonstrating their good practice in terms of the green agenda. Environment concerns have put organizations under great pressure to take back their manufactured product/products after its usage, so that the product or its parts may be reused, recycled or appropriately disposed. Closed-loop supply chain management is an efficient, effective and economical strategy aimed at sustaining environmental practices in the manufacturing industries. Logistics network of returned goods from end users back to manufacturers usually involves multiple and conflicting goals. Technological advances, economic activities and prosperity demand mobility of goods and people from one part of the globe to another. Increased mobility demands increased transport, which leads to increased issues of fuel-efficient driving, CO<sub>2</sub> emissions and challenges of minimizing carbon footprint. As these emissions have strong impacts on climatic change in our world, on humans, on food production, on the sea, on everything so ensuring sustainable growth has therefore become an important and complex challenge for the organizations around the globe.

This paper examines the relationship between the operations of forward and reverse logistics and the environmental performance measures like CO<sub>2</sub> emission in the network due to transportation activities in closed loop supply chain network design with the location selection optimization in order to integrate the environmental issues into a traditional logistic system.

So, we present an integrated and a generalized closed-loop network design, consisting of four echelons in forward direction (i.e., suppliers, plants, and distribution centres, first customer zone) and four echelons in backward direction (i.e., collection centres, dismantlers, disposal centres and second customer zone) for the logistics planning by formulating a cyclic logistics network problem. The model presented is bi-objective and captures the trade-offs between various costs inherent in the network and emission of greenhouse gas CO<sub>2</sub>.

Model is validated through a real life case, based on home appliance manufacturer based in Delhi and NCR and the result shows that the proposed model is able to support the logistics decisions in a closed loop supply chain efficiently and accurately.

*Key words:* green supply chain management, carbon emission, closed loop supply chain management.

### **1. Introduction**

Our planet is metamorphosing from a land of abundant and affordable source of energy to a world of polluted, scarce and immoderate or uneconomical energy. It is imperative for its inhabitant to become aware about the challenges and the repercussions they have to face in case of impending energy shortage scenario. The scarcity of resources, global warming and pollution are attention needing issues these days. Stakeholders are becoming interested in what companies do to greenify their supply chain to have sustainable business. This requires definite and conscious interventions to be taken in order to keep our system and its processes under control. Supply chains are becoming complex and business environment is changing

with enormous speed. Though India is still a developing nation, it is keen on maintaining a balance with environmental protection; hence it has increased its emphasis on economic development. This balancing act, very importantly includes India's manufacturing industry and supply chains. Every organization in the system may be big or small is engaged in activities which demand the consumption of energy and resources. There is constant demand of energy and resources and that too at an affordable price and for which the supply seems deficient. This requires the attention of logistics and supply chain managers to protect and preserve lead resources; to balance efforts to reduce costs for the maintenance of good environmental (ecological) performance. Most of the modern organizations are contemplating the integration of environmental practices compulsory regulations, voluntary environmental programs into their strategic plans and daily operations (Pagell, Yang, Krumwiede, and Sheu 2004).

### **1.1. Green supply chain management**

Although an objective of every business is to maximize profit, in order to survive in today's economic climate, organizations have to take serious considerations of sustainability issues for the continuous supply of resources required to produce products and fulfill demands. Imminent threat of global warming has drawn the attention of researchers towards green supply chain management (GSCM). Green Chain management is the inclusion of environmental concerns into our supply chain management right from product design, supplier selection and material sourcing, manufacturing processes, product packaging, delivery of the product to the consumers, and end-of-life management of the product after its use (Srivastava 2007; Beamen 1999; Zhang *et al.* 1997; Lintona *et al.* 2007). Detailed planning and execution of our entire supply chain right from the beginning of a green product design to a closed loop product return processing, is essential for the success of Green supply chain. The study of GSCM has helped the firms in creating value in supply chain relationships by increasing the benefits of the product for the customers, reducing the costs of the product, improving delivery service, or reducing the time of delivery (Christopher, 2005; Ulaga, and Eggert, 2006).

### **1.2. Sustainable management**

Sustainable businesses have become the prime topics of discussion among the government, customers and organization due to awareness about green and sustainable environment. The contribution of sustainability in supply chain management is enormous, especially when it minimizes the carbon emission renewable energy, and management of waste to avoid landfills and incinerations. Looking at the current situations of resource scarcity, exhausted land for landfills, and the pressures to reduce the carbon footprints globally, sustainability efforts are no longer optional or unimportant (Srivastava 2007). By injecting sustainability into the core business, a firm can achieve full efficiency and reduced environmental impact. In fact, green supply chain management (GSCM) has become a great concern for business organizations, particularly in logistics in the 21st century (Diabat and Govindan 2011). This is largely due to the stringent laws and regulations governing the product take back such as the introduction of Waste Electrical and Electronic Equipment (WEEE) directive (Prahinski, C. and C. Kocabasoglu 2006). In addition, countries across Asia are a little bit slow in responding to the sustainability concerns (Johannesburg Summit, 2002).

### **1.3. Reverse logistics**

Social and environmental activists, government legislations and awareness campaigns are forcing organizations to supply environmentally harmonious products and at the same time also to be

more responsible for the returned products. We need to adopt the concept of 'reuse and remanufacture the used product' or in other words Gr. SCM, in order to economize the consumption of resources. Kannan, Sasikumar, and Devika (2010) reducing their carbon emissions with the help of green supply chain has gained importance among other issues for the firms and their customers (52). In 1987, the Brundtland Commission defined the term 'sustainable development' as the development that "meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs".

Looking at the definition, given by Zhu and Sarkis, (2006) that environmental impacts take place at all stages of a product's life cycle from the raw material extraction to manufacturing, use and reuse, final recycling, or disposal, namely from cradle to grave, it appears that the ultimate objective of environment protection can be achieved through CLSCs (Andiç, Yurt, and Baltacıoğlu 2012).

Hence, the sustainability endeavours are pushing the organizations to seriously consider the application of the CLSC concept (Beamon 1999 and Seuring 2004). The emerging demand for sustainable supply chain required an identification of the closed-loop supply chain model (Solvang, Deng, and Solvang 2007). The sustainability approach seeks to combine the present industrial development with the requirements of future generations (Wilkinson *et al.*, 2001).

A GrSC aims at confining the waste within the industrial system in order to conserve energy and to prevent the dissipation of dangerous materials into the environment (Johnny *et al.* 2009). It is clear that there is a focus for GrSCM which ranges from reactive monitoring of general environmental management programs to more proactive practices such as Re's (e.g. recycling, reclamation, remanufacturing, reverse logistics) of environmental management and incorporating "innovations".

#### **1.4. Closed loop supply chain management**

The concept of GSCM requires the organizations to extend the 'forward supply chain' one step further up to the collection, dismantling, reworking, material extraction and proper disposal of products, which is achieved through processes such as repair, remanufacturing and recycling, which, combined with all the associated transportation and distribution operations, are collectively termed as Reverse Chain activities. In reverse logistics there is a link between the market that releases used products and the market for "new" products. When these two markets coincide, it is called Closed Loop Network (Krikke *et al.* 2004). Thus the supply chain in which forward and reverse supply chain activities are integrated is said to be closed-loop, and research on such chains have given rise to the field of closed-loop supply chains, CLSCs, and this process alternatively is known as closed loop supply chain management, CLSCM. Closed-Loop Supply Chain Management includes processes and operations that can not be found in conventional supply chain management. Guide and Van Wassenhove (2003) further add that the additional activities the reverse supply chain includes comprise product acquisition, reverse logistics, test, sort, disposition, refurbish as well as distribution and marketing. CLSC is therefore seen as a strategy towards achieving a green supply chain (Olugu and Wong 2012).

CLSCs can be defined as the integration of forward and reverse logistics whereby the returned products are recovered and reinserted back into traditional forward flow, establishing a continuous supply loop (Wells and Seitz 2005) that aims for economic, environmental, and social accomplishments (Giovanni 2011). By looking at the definition, it



appears that the ultimate objective of environmental protection can be achieved through CLSCs (Andiç, Yurt, and Baltacıoğlu 2012).

A closed-loop logistics management ensures the least waste of the materials by following the cradle to cradle principle and conservation law along the life cycles of the materials. In reverse logistics used products, either under warranty or at the end of use or at the end of lease, are taken back, so that the products or their parts are appropriately disposed, recycled, reused or remanufactured. In closed-loop supply chain, the original equipment manufacturer (OEM) collects used products from customers and further processes them to the dismantlers to do the sorting or the disassembling for recovery, reuse or disposal (Rogers and Lembke 1999) to make a profit or reduce their environmental impacts. Closed-loop logistics consists of two parts: forward logistics and reverse logistics. The product recovery is reverse logistics. Roger and Timber- Lembke (1999) define reverse logistics as, “The process of planning, implementing, and controlling the efficient, cost-effective flow of raw materials, in-process inventory, finished goods, and related information from the point of consumption to the point of origin, for the purpose of recapturing value or proper disposal. Reverse logistics options consist of reuse, resale, repair, refurbishing, remanufacturing, cannibalization, and recycling (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, Wassenhove 2003). With well-managed reverse logistics, 3R of *reduce, recovery and reuse* for environmental protection can be achieved with cost savings in procurement, disposal and transportation (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, and Wassenhove 2001). The design of reverse logistics network has been subject to recent research. Due to the differences in the characteristics of flow between the forward and reverse channels, the design of reverse logistics network attracted some of the research effort. Multiple case studies in different fields: automotive industry (Schleiffer, Wollenweber, and Sebastian 2004; Schultmann, Zumkeller, and Rentz, 2006), electric appliances industry (De Brito, Flapper, and Dekker 2003; Ciupek, Franke, and Seliger, 2003), paper recycling (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, and Van Wassenhove 2001; Chan, Chan and Zhang 2006), carpet recycling (Helm and Harvani 2006) have been conducted to the end of designing an efficient reverse network capable of dealing efficiently with the reverse flow to the end of achieving sustainability. Besides, they are explicitly focused on significant sources of greenhouse gas emission, and one of those sources is transportation. CO<sub>2</sub> is very prominent in its hazardous consequences on human health. Transport is the second-largest sector of global CO<sub>2</sub> emission. CO<sub>2</sub> constraints in logistics markets will need to be realized in the near future as it was enforced by protocols, and a shift in freight transportation could be expected to reduce the CO<sub>2</sub> emissions within the reasonable cost and time constraints (Piecyk, Alan and McKinnon 2010).

### **1.5. Current focus**

This paper attempts to design a CLSC based Green Supply Chain Management model that would minimize the issues involved with economical and environmental impacts simultaneously, and integrate forward and reverse logistics with the aim of reducing waste.

In this study, we model and analyse a CLSC for its operational and environmental performances, i.e., a multi echelon forward–reverse logistics network model is described for the purpose of design with the reflection of the effects on environment of greenhouse gas emission. Objectives of the model is to maximize the total expected profit earned and minimizing CO<sub>2</sub> emission due to transporting material in forward and reverse logistics networks with the use of different type of vehicles for transport, each of which has its own emission rates and transportation costs. Using the proposed model and a case illustration result of computational experiments shed light on the interactions of various performance indicators, primarily measured by cost.

## **1.6. Green scenario in developing countries**

### **1.6.1. Green production/SCM and developing countries**

The concept of green production carries the promise of a new economic growth paradigm that is friendly to the earth's ecosystems and can also contribute to poverty alleviation. Green initiatives adopted by most of the organizations around the globe are playing pivotal role in reversing the climatic changes, in reducing the Greenhouse gas emissions, in preserving the limited natural resources. Organizations around the globe are opting for cradle to cradle products that are more energy efficient and environmental friendly. By implementing practices like recycling, kitchen-waste diversion, waste-disposal, retro-fitting energy efficient lighting, rain-water harvesting, community outreach programs and buying green power, they are trying to reduce the detrimental effects caused by non-sustainable practices.

A large proportion of the population in developing countries lives on under \$1 or \$2 per day. The poor spend a large proportion of their incomes on food, may lack access to basic infrastructure, and own few productive assets. A third of children under five in developing countries show evidence of long-term malnutrition and are increasingly susceptible to many other diseases. In India, majority of organizations have put in place various initiatives for creating a sustainable environment. This includes not only making employees, suppliers, business partners and customers environmentally-conscious but also encouraging all stakeholders to choose approaches that support sustainable environment. Various regulatory bodies have brought forth innovative practices to have mandatory provisions for protection of the environment. Number of acts and rules for Water (Prevention and Control of Pollution), Air (Prevention and Control of Pollution), Wildlife (Protection), Forest (Conservation), and Environment (Protection), Hazardous Waste (Management & Handling) formulated since 1970 to present day are being implemented.

### **1.6.2. Green production/SCM and competitive advantage**

The overall aim of green production is to minimize the environmental impact of a product's manufacture. Sustainable consumption means satisfying a maximum of consumer needs and wants while minimizing the environmental impacts of products and services. By taking the idea of 'doing more with less', organizations are carefully devising preventive environmental management approaches to renovate their production processes from design and manufacture through use and disposal. Careful analysis is done during the production process to help reduce the environmental impact of individual products over their entire life cycle of design, production, usage, maintenance and developing standard screening processes for final disposal of the product. The focus is on building a sustainable value chain through responsible use of resources by maintaining cordial relationships with suppliers- downstream, upstream and cross-stream for which we may need some expert opinions and advice. In 2003, IFC committed a loan of \$75 million to Power links Transmission Limited, a joint-venture company, to construct power transmission lines to carry hydropower from Bhutan to northern and eastern states in India leading to the creation of about 9,700 direct and indirect jobs over the 25-year life of the project. In addition, the second-order growth effects of the increased supply of power and its improved reliability have generated 75,000 jobs from 2006 to 2012, of which 4600 jobs were created in West Bengal.

Due to lack of experts, particularly in developing countries, training programs have not yet caught on and also there is feeble willingness to finance cleaner production due to financial institutions' misconceptions. There is a dire need to encourage shared understanding of problems – not only production issues but also social, environmental and economic challenges.

The scenario is particularly true in the case of agriculture, where green technologies tend to improve the agricultural productivity of rural smallholders. One of the most serious potential effects of global warming is the lower productivity of agriculture in developing countries. For the same reason, however, poor rural communities are also among the main beneficiaries of the green economy. Sustainable agricultural production methods have great mitigation and adaptation potential, particularly with regard to topsoil organic matter fixation, soil fertility and water-holding capacity, and increasing yields in areas with medium to low-input agriculture and in agroforestry.

### **1.6.3. Green production/SCM and development advantage to developing countries**

Green SCM helps in using alternative renewable resources for becoming self-sufficient, in gaining a competitive edge over the market, in saving money and finally aids us in saving earth from gravest and greatest crisis that has resulted from insensible use of science and technology and has endangered species for our future generations. Many organizations have expanding environmental portfolio which offer relevant answers to the nation's energy and sustainability challenges. Apart from allowing customers to enjoy the benefit of lower energy costs, higher productivity and profitable businesses, the society benefits through improved environmental care and living standards. Many organizations have been continuously working towards improving business processes by innovation and feedback for making them more safe and eco-efficient in the usage of resources and management of facilities. This is an important measure to promote sustainable development. It includes regulation, pricing policies, taxes and subsidies to limit pollution and emissions and to control over-exploitation of natural resources and making prices better reflect environmental values, as well as mainstreaming environmental criteria in government procurement policies.

'Attero' has developed a recycling technology to extract metals and plastics from e-waste, such as computers and mobile phones. In the process it has created jobs, reduced pollution and conserved metal resources. The organization also focuses on educating low-skilled workers who collect and informally recycle most of India's e-waste. The same scenario can also be seen taking shape in the case of agriculture, where green technologies tend to improve the agricultural productivity of rural smallholders. One of the most serious potential effects of global warming is the lower productivity of agriculture in developing countries. For the same reason, however, poor rural communities are also among the main beneficiaries of the green economy. Sustainable agricultural production methods have great mitigation and adaptation potential, particularly with regard to topsoil organic matter fixation, soil fertility and water-holding capacity, and increasing yields in areas with medium to low-input agriculture and in agroforestry. The innovative practices adopted by 'Jain Irrigation' have achieved water savings equal to the annual water consumption of more than 10 million households. Through this initiative, 16,300 small farmers have raised annual incomes by up to \$1000. Tata Group has also taken initiatives to develop strategy to improve water efficiency in their operations, across 11 Tata group companies. This will set the paradigm of water conservation in industries for India.

### **1.6.4. Green production/SCM: clean and healthy production leads a clean and healthy life**

The term "cleaner production" was formally adopted at the Canterbury seminar. It was defined as "the continuous application of an integrated preventive environmental strategy to processes, products, and services to increase overall efficiency, and reduce risks to humans

and the environment”<sup>1</sup>. Cleaner production plays a critical role with respect to influencing changes in consumption and production patterns. Experience with cleaner production programs reveals that a 20% reduction in waste and emissions is achievable with no new investment. A further 10-20% reduction is possible if minor investments are made, with a payback period of less than six months<sup>1</sup>.

Meeting consumer needs and desires, while promoting cleaner production and sustainable consumption, is one of the greatest challenges facing humankind. Addressing poverty and environmental degradation requires changing how goods are produced, distributed and consumed. It also requires conservation and more efficient use of resources such as energy, together with action-oriented thinking. Developing countries around the world need to implement some effective national programs which would include labeling environmental friendly products, programs encouraging cleaner production and schemes involving ‘eco management’ and ‘audit of environment’. Governments of these nations need to introduce principles for concluding voluntary agreements and should prepare a methodology for implementing life-cycle assessment (LCA) for enterprises.

Difference between developed and less developed countries

	Developed Countries	Less Developed Countries
Road transport	Higher ownership Cars dominant Higher vehicle kilometres travelled per person Newer fleet, lower emissions Road surfaces maintained	Significantly less car ownership Mixture of two-/three-wheelers Lower vehicle kilometres travelled per person Older fleet, higher emissions Poorly maintained vehicles Low maintenance of local roads
Distribution of sources	Industry normally segregated from residential areas	Industry in close proximity to residential areas
Emissions	Reliable emissions in parts	Large uncertainties, greater understanding is needed
Heating/cooking fuel	Usually gas, electricity, but others used	Coal, wood, oil, biofuels, gas Reliant on local sources
Pollutants of concern	PM <sub>10</sub> , PM <sub>2.5</sub> , O <sub>3</sub> , NO <sub>2</sub>	Additional pollutants: SO <sub>2</sub> , VOCs and Pb
Infrastructure for air pollution control	Well developed in some regions, stringent	Less developed, fragmented, poorly controlled emissions
Economic	Loose dependence of economy on polluting industry	Strong coupling (e.g. local jobs depend on polluting industry)
Implementation of legislation	Robust	Can be poor
Urban planning, governance	Links becoming stronger	Fragmented, patchy
Pollution monitoring	Well structured in parts	Requires firmer coordination

**Source:** [World Atlas of Atmospheric Pollution - Page 20 - Google Books](#)

We take forward this discussion by first evaluating the previous work done by the researchers in this field in the following section. We proceed further to define the problem and focus of our study and propose a model for a single product, with the underlying assumptions and hence present Real life case studying section 3. Section 4 describes the methodology used for goal programming. In Section 5, we present the numerical implementation of real life case study in order to highlight the features of the proposed model. The paper ends with concluding remarks.

## 2. Literature review

GSCM is becoming increasingly important for Indian manufacturers due to increased awareness about business and environmental performance and corporate responsibility. Organizations have started focusing their attention on issues like minimizing the generation of hazardous waste, recovery of valuable materials from the waste and preventing the environmental deterioration (Kannan, Sasikumar, Devika 2010). GSCM has been discussed by the researchers in context of problems in the supply chain, like hazardous waste and sewage spill, industrial waste, carbon emission or environmental concerns and these issues have highlighted the importance of a proper design of the distribution and reverse logistics network. The design of the distribution and reverse logistics network has to fulfill the different objectives from the economic, social, and environmental perspective (Hamdy, Fors,

Harraz 2007). Recently, customers have attached greater value to less obvious dimensions, such as low-risk supply chains (45), better visibility across supply chain (Wagner and Bode 2008), socially responsible supply chains (Boyd, Spekman, Kamauff and Werhane 2007), or green supply chains (Neto *et al.* 2008). A major issue in the reverse distribution is integration of forward and reverse supply chain. Returns information captured should be integrated with forward supply chain information to achieve optimum planning and reduction of costs. The whole support network can then be designed in such a way that it can service both the forward and reverse logistics processes efficiently. This is in line with the concept of a closed-loop supply chain design. In recent years, there has been increasing interest in closed loop supply chains. Many authors have addressed the issues on closed loop supply chain for different cases.

Collection and recycling of product returns has gained increasing importance as a profitable and sustainable business strategy due to growing green supply chain management concept practices [ ]. Organizations worldwide have adopted different strategies to implement these practices. Verstrepen *et al.* (2007) assumes that a proper supply chain structure has to be formulated to minimize the system-wide cost (or to maximize profit) by best-planned movements of goods within the supply chain as the physical structure of a supply chain clearly will influence its performance, and it is very important to design an efficient supply chain to facilitate the movements of goods. Saman and Guoqing (2012) proposed a network and a mathematical model to maximize the total cost savings by determining the quantity of parts to be processed at each remanufacturing facility, and the number of purchased parts from external supplier. Salema, P'ovoa and Novais (2007) developed a conceptual model for simultaneous location-allocation of facilities for a cost effective and efficient reverse logistics network.

A closed-loop structure of a network was proposed in order to integrate the environmental issues into a traditional logistics system by Kim *et al.* (2006). The researchers proposed an integer linear programming model based on decisions for selecting the places of manufactures, distribution centers, dismantlers and cost with special concerns on operations of 3R in the green supply chain logistics and the location selection optimization. Fleischmann, Beullens, and Bloemhof-Ruwaard, and Wassenhove (2001) highlighted the importance of increased segregation at the source and environmental benefits through increased wastepaper recovery by putting the focus on the formulation of a mixed integer goal programming model for proper management of recycling logistics. Researchers also suggested a model for remanufacturing that determines the location of remanufacturing/distribution facilities, the transshipment, production, and stocking of the optimal quantities of remanufactured products and cores (used parts), Francas and Minner (2009). Since few studies have addressed the problem of determining the number and location of initial collection points in a multiple time horizon, while determining the desirable holding time for consolidation of returned products into a large shipment, Ulaga and Eggert (2006) have suggested a mixed-integer, nonlinear programming model and a genetic algorithm that can solve the reverse logistics problem involving both spatial and temporal consolidation of returned products. A mathematical model has been proposed by Pishvaei, Farahani and Dullaert (2010) for design of a RL network with deterministic parameters in a nine-echelon network for an integrated closed-loop supply chain in which the returned products need to be consolidated in the warehouse before they are sent to reprocessing centres for inspection and dismantling; this model assumes that the dismantled parts are either sent for remanufacturing or to the secondary market as spare parts, or are recycled or simply disposed of. An RL network consisting of collection centers and two types of rework facilities set up by original equipment manufacturers (OEMs) or their

consortia for a few categories of product returns under various strategic, operational and customer service constraints in the Indian context has been discussed by Pati, Vrat, and Kumar (2008). A network design of recovery network by formulating a mixed-integer linear program (MILP) for single-product two-echelon forward and reverse supply chain model has been proposed by Salema, P'ovoá, and Novais (2009) in which the researchers have highlighted the importance of forward facility location model appropriate logistics structures for the arising flows of used and recovered products in context of copier remanufacturing and paper recycling. Aras, Boyaci, and Verter (2010) developed a MILP for a multi echelon, multi period, multiproduct closed loop supply chain which integrates strategic network design decisions with operational decisions related to procurement, production, distribution, and end of life disposal, and solved it using a genetic algorithm. Jayaraman, Guide J, and Srivastava (1999) have also experimented with a model for the integration of macro level strategic network design decisions with micro level tactical decisions including production, storage, and distribution planning by taking the concept of macro and micro timescales into consideration. A study on model for remanufacturing that determines the location of remanufacturing/distribution facilities, the transshipment, production, and stocking of the optimal quantities of remanufactured products has been taken up by Francas and Minner (2009).

A closed loop of flow of material from customer to the remanufacturer and vice-versa (Mutha and Pokharel 2009) and the capacity decisions and expected performance of two alternative manufacturing network configurations when demand and return flows are uncertain have also been taken for study by researchers. An integrated, reverse logistics supply chain planning process with modular product design that produces and markets products at different quality levels to maximize profit by considering the collection of returned products, the recovery of modules and the proportion of the product mix at different quality levels is required for overall planning process. Lee, Gen and Rhee (2009) focussed on a single supplier for minimizing shipment costs of a CLSC and opening costs of disassembly centers and processing centers and which could determine the optimal numbers of disassembly and processing centers without including inventory costs such as holding costs (Wang, Hsu 2010). A general closed loop network based on return - recovery pair and product life cycle to optimize the closed-loop network and to determine the units of products to be produced, disassembled, repaired and purchased from external suppliers while maximizing the profit has also been designed by Meixell and Gargeya (2005). Researchers have paid attention to environmental issues within CLSCs and offered a comprehensive mathematical model which minimizes costs associated with distribution, processing and facility set-up Thirie (2000) and supports both product design and logistics network, simultaneously. The list of environmental performance metrics of a supply chain including emissions, energy use and recovery, spill and leak prevention is discussed in study by Srivastava (2007). Factors such as the used-product return ratio and corresponding subsidies from governmental organizations for reverse logistics have been discussed to improve the chain-based aggregate net profits by 21.1% (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, and Van Wassenhove (2003)). Issues like Legislation, environmental consciousness, take-back policy, warranty returns, and economic aspects involved in reverse logistics have also managed to capture researcher's attention (Elwany, Fors, Harraz 2007). But Hervani, Helms, and Sarkis (2005) argue that organizations are focused on the design of supply chains of production, purchasing, transportation and profit and have neglected the environmental aspects. Beamon (1999), described the current state of the natural environment, investigated the environmental factors, presented performance measures for the GrSC and discussed the procedure to achieve it.

Through another study, it was observed that greening the various phases of the supply chain leads to an integrated green supply chain and hence it leads to competitive and economic performance (Rao and Halt 2005). Sarkis (2003) focused upon the major components and elements of GrSC management and how they can serve as a decision framework foundation. He proposed ANP based dynamic non-linear decision model, for GrSC decisions making. Meixell and Gargeya (2005) proposed decision support models to assess and fit well between the research literature and related practical issues of the area. To deal with the integrated logistics operational issues of GrSCM, an optimization based model was proposed. A multi-objective linear programming model is used to optimize the integrated logistics and used product reverse logistics systematically in a GrSCM. There is a growing need for integrating environmentally sound choices into supply-chain management research and practice.

Based on the above literature, it is identified that there is a research potential to make use of closed loop supply chain network for the case of Toaster to recover material like steel, brass, safety bolts, heating elements etc. to convert it into a raw material. Reviewing the above mentioned literature on closed-loop logistics, it is noted that the existing models did not mention the problem of greening the CLSC in the way it is introduced in this study by considering the different mode of transportation with the help of 3PL in forward and vehicle routing problem, VRP, in reverse chain of the CLSC. The purpose of this research work is to develop an integrated, multi objective model for multi echelon CLSC to optimize the distribution and minimize the effect on environment due to transportation related activities. The modelling of this closed loop supply chain network is done in the context of 6 bread Toaster. This paper is different from previous approaches because it considers the minimal use of vehicles (using full truckload transportation in forward chain and less than truck load in reverse chain) and its impact on the design of a closed-loop supply chain, where products are remanufactured to usable functionality and re-enter the primary market.

### **3. Problem definition and model description**

The CLSC problem discussed in this paper is an integrated multi-objective multi-echelon problem in a forward/reverse logistic network, which requires more efforts to analyse than both forward and backward logistic simultaneously. Here we are considering the flow of a product in the network. The model considers modular product structure and every component of the product has an associated recycling rate, specifying the rate at which the component can be recycled. For instance, a rate of 100% indicates that the used product can be fully recovered or transformed into a new one, whereas a rate of 50% denotes that the product can only be partially recovered. In the network suppliers are responsible for providing components to manufacturing plants. The new products are conveyed from plants to customers via distribution centres (d/c) to meet their demands. Returned products from customers are collected at collection centres where they are inspected. After testing in collection centres, the repairable and recyclable products are shipped to plants and dismantlers respectively, afterwards they satisfy the demand of secondary market of used products. At plant repairable used products are repaired and supplied back to distribution centres as new product. Dismantled components at dismantlers are driven back to suppliers if they are repairable else to disposal site to be disposed of.

The company chosen for this study is Electric home appliance manufacturing company, for Toaster, located in Delhi. The main scope of this study is to estimate the feasibility of reclaiming the components and recycling the materials from end of life or used Toaster of the company itself. To design the GSCM for the company, we structure the following CLSC





and last objective is to minimize the number of trucks used in forward supply chain and distance travelled in reverse logistics. To specify the study scope and facilitate model formulation, assumptions are postulated below:

Demand at customer end is deterministic; hence there is no shortage of the product.

Locations of suppliers, facilities, distributors, disassemblers, and redistributors are known and fixed.

The flow is only allowed to be transferred between two consecutive stages. Moreover, there are no flows between facilities at the same stage.

Costs parameters (material, manufacturing, transportation, recycling, repairing, disassembly, and disposal costs) are known for each location.

All operations of CLSC are under capacity limitations.

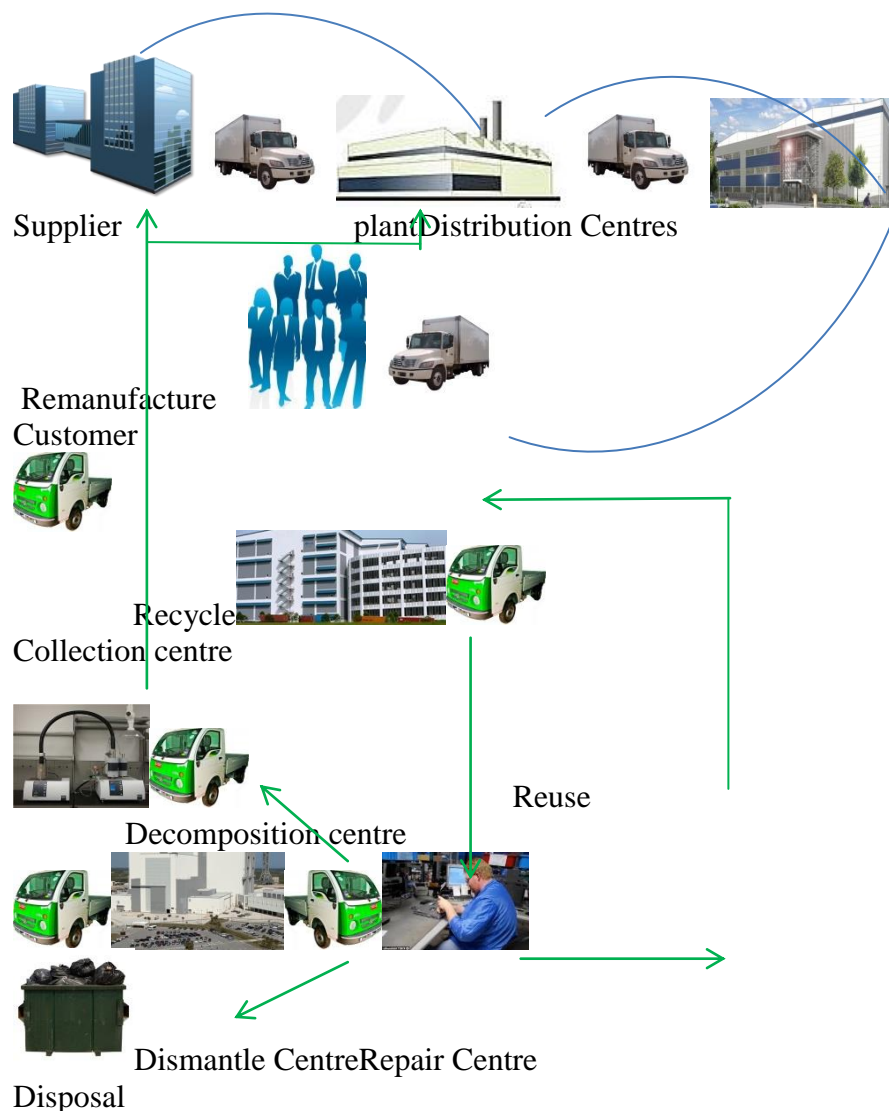


Fig.2. Pictorial representation of organization flow

The sum of disassembly and recycling costs of parts is less than purchasing cost of new ones. Single unlimited capacity centralized dismantling centre is maintained by the industry itself.

The un-recyclable returned material will be sent to the disposal site after some pre-treatment process. Pre-treatment cost for the disposable materials are included in the disposal cost itself. Buy back cost given to end customer on returning a used product will remain same for all customers irrespective of used products condition.

Transportation cost of collecting returned products from collection centres is borne by the company and is directly proportional to the total distance covered.

The estimated emission rate of CO<sub>2</sub> for all type of vehicle available is known

**Sets:**

- $S$  set of component's suppliers index by  $s, s=1, 2... S$   
 $P$  set of manufacturing plants index by  $p, p=1, 2... P$   
 $K$  set of distribution centers (d/c) index by  $k, k=1, 2... K$   
 $E$  set of first market customer zones index by  $e, e=1, 2... E$   
 $C$  set of collection centers (CC) index by  $c, c=1, 2..., C$   
 $M$  set of dismantlers (d/m) position index by  $m, m=1, 2... M$   
 $H$  set of second market customer zones index by  $h, h=1, 2, ..., H$   
 $F$  set of disposal sites (d/p) index by  $f, f=1, 2, ..., F$   
 $A$  set of sub-assemblies index by  $a, a=1, 2, ..., A$   
 $N$  set on nodes in the network ( $N = S \cup P \cup K \cup E \cup C \cup M \cup H \cup F$ )

**Parameters:**

- $SC_{sa}$  Unit purchasing cost of sub assembly  $a$  by supplier  $s$   
 $PC_p$  Unit production cost of product at manufacturing plant  $p$   
 $OC_k$  Unit operating cost of product at d/c  $k$   
 $IC_c$  Unit inspection cost of product at collection center  $c$   
 $RPC_p$  Unit repairing cost of used product at manufacturing plant  $p$   
 $DMC_m$  Unit dismantling cost of product at d/m position  $m$   
 $RCC_{sa}$  Unit recycling cost of sub assembly  $a$  at supplier  $s$   
 $DPC_{fa}$  Unit disposal cost of sub assembly  $a$  at disposal site  $f$   
 $D_e$  Demand of product at first customer  $e$   
 $D_h$  Demand of used product at second customer  $h$   
 $TPC^t$  Unit transportation cost per mile of product or component shipped from one node to another via type of truck  $t$   
 $D_{ij}$  Distance between any two nodes  $i, j \in N$  of given CLSC network  
 $CAP_{sa}$  Capacity of supplier  $s$  for sub assembly  $a$   
 $PCAP_p$  Production capacity of plant  $p$   
 $KCAP_k$  Capacity of distribution center  $k$   
 $CCAP_c$  Capacity of collection center  $c$   
 $MCAP_m$  Capacity of dismantler  $m$   
 $FCAP_f$  Disposal capacity of disposal site  $f$   
 $RPCAP_p$  Repairing capacity of plant  $p$   
 $RCCAP_s$  Recycling capacity of supplier  $s$

$PF_a$	Unit profit made in the network from recycling component $a$
$PF$	Unit profit made in the network from repairable product
$PR_e$	Unit price of product at customer $e$
$PR_h$	Unit price of product at customer $h$
$ER^t$	Per mile emission rate of CO <sub>2</sub> gas from the type of transport $t \in T$
$Rr$	Return ratio at the first customers
$Rc_a$	Recycling ratio of component $a$
$Rp$	Repairing ratio
$W$	Weight of product in kg
$W_a$	Weight of component $a \in A$ in kg
$U_a$	Utilization rate of component $a \in A$
<b>Decision variables:</b>	
$x_{ija}^t$	Quantity of components $a$ shipped from node $i$ to node $j$ , $i, j \in N$ in the network via transport of type $t \in T$
$x_{ij}^t$	Quantity of products shipped from node $i$ to node $j$ , $i, j \in N$ in the network via transport of type $t \in T$
$w_{ij}^t$	Weighted quantity transported from node $i$ to node $j$ , $i, j \in N$ in the network via transport of type $t \in T$
$X_i$	$\begin{cases} 1, & \text{if facility } i, (i \in P \cup K \cup C \cup M) \text{ is opened} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
$L_{ij}^t$	$\begin{cases} 1, & \text{if a transportation link is established between any two locations } i \text{ and } j, i, j \in N \text{ via mode } t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

### Model

**Maximize,  $Z_0 =$**

$$\begin{aligned}
 = & \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t PR_e + \sum_c \sum_h \sum_t x_{ch}^t PR_h + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t PF_a x_{msa}^t + \sum_c \sum_p \sum_t PF x_{cp}^t - \left( \sum_s \sum_p \sum_a \sum_t x_{spa}^t SC_{sa} + \right. \\
 & + \sum_p \sum_k \sum_t x_{pk}^t PC_p + \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t OC_k + \sum_e \sum_c \sum_t x_{ec}^t IC_c + \sum_c \sum_p \sum_t x_{cp}^t RPC_p + \sum_c \sum_m \sum_t x_{cm}^t DMC_m + \\
 & + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t x_{msa}^t RCC_{sa} + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t x_{mfa}^t DPC_f + \sum_s \sum_p \sum_t TPC^t D_{sp} x_{sp}^t + \sum_p \sum_k \sum_t TPC^t D_{pk} x_{pk}^t + \\
 & + \sum_k \sum_e \sum_t TPC^t D_{ke} x_{ke}^t + \sum_e \sum_c \sum_t TPC^t D_{ec} x_{ec}^t + \sum_c \sum_p \sum_t TPC^t D_{cp} x_{cp}^t + \sum_c \sum_m \sum_t TPC^t D_{cm} x_{cm}^t + \\
 & \left. + \sum_c \sum_h \sum_t TPC^t D_{ch} x_{ch}^t + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t TPC^t D_{ms} x_{msa}^t + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t TPC^t D_{mf} x_{mfa}^t \right)
 \end{aligned}$$

**Minimize,  $Z_1 =$**

$$\begin{aligned}
 = & \sum_t ER^t \left( \sum_s \sum_p D_{sp} L_{sp}^t W_{sp}^t + \sum_p \sum_k D_{pk} L_{pk}^t W_{pk}^t + \sum_k \sum_e D_{ke} L_{ke}^t W_{ke}^t + \sum_e \sum_c D_{ec} L_{ec}^t W_{ec}^t + \right. \\
 & \left. + \sum_c \sum_p D_{cp} L_{cp}^t W_{cp}^t + \sum_c \sum_m D_{cm} L_{cm}^t W_{cm}^t + \sum_c \sum_h D_{ch} L_{ch}^t W_{ch}^t + \sum_m \sum_s D_{ms} L_{ms}^t W_{ms}^t + \sum_m \sum_f D_{mf} L_{mf}^t W_{mf}^t \right)
 \end{aligned}$$

**Subject To**

**(Flow balancing Constraints)**

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t + \sum_c \sum_t x_{cp}^t * U_a = \sum_k \sum_t x_{pk}^t * U_a \quad \forall p, a \quad (1)$$

$$\sum_p \sum_t x_{pk}^t = \sum_k \sum_e x_{ke}^t \quad \forall k \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_e x_{ke}^t \geq D_e \quad \forall e \quad (3)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ec}^t = Rr * D_e \quad \forall e \quad (4)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ch}^t \leq D_h \quad \forall h \quad (5)$$

$$\sum_p \sum_t x_{cp}^t = Rp * \left( \sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (6)$$

$$\sum_m \sum_t x_{cm}^t = (1 - Rp) * \left( \sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (7)$$

$$\sum_s \sum_t x_{msa}^t = Rc_a * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (8)$$

$$\sum_f \sum_t x_{mfa}^t = (1 - Rc_a) * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (9)$$

### Capacity constraints

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t \leq CAP_{sa} \quad \forall s, a \quad (10)$$

$$\sum_k \sum_t x_{pk}^t \leq PCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (11)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ke}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall e \quad (12)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ec}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall c \quad (13)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cp}^t \leq RPCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (14)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cm}^t \leq MCAP_m * X_m \quad \forall m \quad (15)$$

$$\sum_m \sum_t x_{msa}^t \leq RCCAP_s \quad \forall s, a \quad (16)$$

$$\sum_m \sum_a \sum_t x_{mfa}^t \leq FCAP_s \quad \forall f \quad (17)$$

$$w_{sp}^t = \sum_a x_{spa}^t * w_a \quad \forall s, p, t \quad (18)$$

$$w_{pk}^t = x_{pk}^t * w \quad \forall p, k, t \quad (19)$$

$$w_{ec}^t = x_{ec}^t * w \quad \forall e, c, t \quad (20)$$

$$w_{ke}^t = x_{ke}^t * w \quad \forall k, e, t \quad (21)$$

$$w_{cp}^t = x_{cp}^t * w \quad \forall c, p, t \quad (22)$$

$$w_{ch}^t = x_{ch}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (23)$$

$$w_{cm}^t = x_{cm}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (24)$$

$$w_{ms}^t = \sum_a x_{msa}^t * w_a \quad \forall s, m, t \quad (25)$$

$$w_{mf}^t = \sum_a x_{mfa}^t * w_a \quad \forall m, f, t \quad (26)$$

### Maximum number of activated locations constraints

$$\sum_p X_p \leq P \quad (27)$$

$$\sum_k X_k \leq K \quad (28)$$

$$\sum_c X_c \leq C \quad (29)$$

$$\sum_m X_m \leq M \quad (30)$$

### Linking- shipping constraints

$$L_{sp}^t \leq \sum_a x_{spa}^t \quad \forall s, p, t \quad (31)$$

$$L_{pk}^t \leq x_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (32)$$

$$L_{ke}^t \leq x_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (33)$$

$$L_{ec}^t \leq x_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (34)$$

$$L_{cp}^t \leq x_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (35)$$

$$L_{ch}^t \leq x_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (36)$$

$$L_{cm}^t \leq x_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (37)$$

$$L_{ms}^t \leq \sum_a x_{msa}^t \quad \forall s, m, t \quad (38)$$

$$L_{mf}^t \leq \sum_a x_{mfa}^t \quad \forall m, f, t \quad (39)$$

### Shipping linking constraints

$$\sum_a x_{spa}^t \leq MI * L_{sp}^t \quad \forall s, p, t \quad (40)$$

$$x_{pk}^t \leq MI * L_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (41)$$

$$x_{ke}^t \leq MI * L_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (42)$$

$$x_{ec}^t \leq MI * L_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (43)$$

$$x_{cp}^t \leq MI * L_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (44)$$

$$x_{cm}^t \leq MI * L_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (45)$$

$$x_{ch}^t \leq MI * L_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (46)$$

$$\sum_a x_{msa}^t \leq MI * L_{ms}^t \quad \forall s, m, t \quad (47)$$

$$\sum_a x_{mfa}^t \leq MI * L_{mf}^t \quad \forall m, f, t \quad (48)$$

$$x_{ija}^t, x_{ij}^t \geq 0$$

$$X_i, L_{ij}^t \in \{0,1\}$$

The first objective is to maximize the total profit including the total income and profit obtained by introducing recycled materials back into the (forward) supply chain (which is used as an incentive for the companies to choose and use recyclable products) minus the total cost which includes cost of purchasing components from suppliers, production cost incurred at plants, operating costs incurred at d/c, inspection cost for the returned products in collection centres, remanufacturing cost of recoverable products in plants, dismantling cost in dismantling the product, recycling cost at supplier and disposal costs for scrapped products. Second objective is to minimize the CO<sub>2</sub> emission by choosing various available type of transport.

Constraints are divided in five sets: first set is consisting of flow balancing constraints. Constraint (1) assures that the flow entering in the manufacturing plant is equal to the flow exit from it. Constraint (2) is for d/c. Constraint (3) insures that demands of all first customers are satisfied. Constraint (4) insures the flow entering in collection centre through a customer will be equal to demand of the customer multiplied by return ratio. Constraint (5) insures that flow to each second customer from all collection centres does not exceed the second customer demand. Constraint (6) and (7) imposes that, the flow exiting from each collection centre to all plants and dismantler is equal to the amount remaining at each collection centre after satisfying second customer demand multiplied by the repairing ratio and (1- repairing ratio ) respectively. Constraint (8) and (9) shows that the flow exiting from each dismantler to supplier and disposal sites is equal to the flow entering from all CC multiplied by recycling ratio and (1- recycling ratio) respectively. Constraint (10)-(17) insures that flow either exiting or entering at any facility does not exceed the respective facility capacity. Constraints (27)–(30) limit the number of activated locations, where the sum of binary decision variables which indicate the number of activated locations, is less than the maximum limit of activated locations. Constraints (31)-(39) insure that there are no links between any locations without actual shipments during all periods. Constraints (40)-(48) ensure that there is no shipping between any non-linked locations.

#### 4. Multi-objective methodology: goal programming

The basic approach of **goal programming** is to establish a specific numeric goal for each of the objectives, formulate an objective function for each objective, and then seek a solution that minimizes both positive and negative deviations from set goals simultaneously or minimizes the amount by which each goal can be violated. There is a *hierarchy of priority levels* for the goals, so that the goals of primary importance receive first priority attention, those of secondary importance receive second-priority attention, and so forth.

Generalized model of goal programming is:

$$\begin{aligned} \min a &= \left\{ g_1(\bar{\eta}_1, \bar{\rho}_1), \dots, g_k(\bar{\eta}_2, \bar{\rho}_2) \right\} \\ \text{s.t. } f_i(\bar{x}) + \eta_i - \rho_i &= b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\rho} &\geq 0; \end{aligned}$$

$x_j$  is the  $j^{\text{th}}$  decision variable,  $a$  is denoted as the achievement function; a row vector measure of the attainment of the objectives or constraints at each priority level,  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  is a function

(normally linear) of the deviation variables associated with the objectives or constraints at priority level  $k$ ,  $K$  is the total number of priority levels in the model,  $b_i$  is the right-hand side constant for goal (or constraint)  $i$ ,  $f_i(\bar{x})$  is the left-hand side of the linear goal or constraint  $i$ .

We seek to minimize the non-achievement of that goal or constraint by minimizing specific deviation variables. The deviation variables at each priority level are included in the function  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  and ordered in the achievement vector, according to their respective priority. Algorithm of sequential goal programming:

**Step 1:** Set  $k = 1$  ( $k$  represents the priority level and  $K$  is the total of these).

**Step 2:** Establish the mathematical formulation as discussed above using positive and negative deviations for priority level  $k$  only.

**Step 3:** Solve this single-objective problem associated with priority level  $k$ . and the optimal solution of  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  is  $a^*$ .

**Step 4:** Set  $k = k + 1$ . If  $k > K$ , go to Step 7.

**Step 5:** Establish the equivalent, single objective model for the next priority level (level  $k$ ) with additional constraint  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho}) = a_s^*$ .

**Step 6:** Go to Step 3.

**Step 7:** The solution vector  $x^*$ , associated with the last single objective model solved, is the optimal vector for the original goal programming model.

## 5. Numerical illustration

In this section, a numerical example is presented in order to demonstrate the applicability of the model. In considered CLSC, a product which is made up of six components.

**Table 1.** Data for various rates

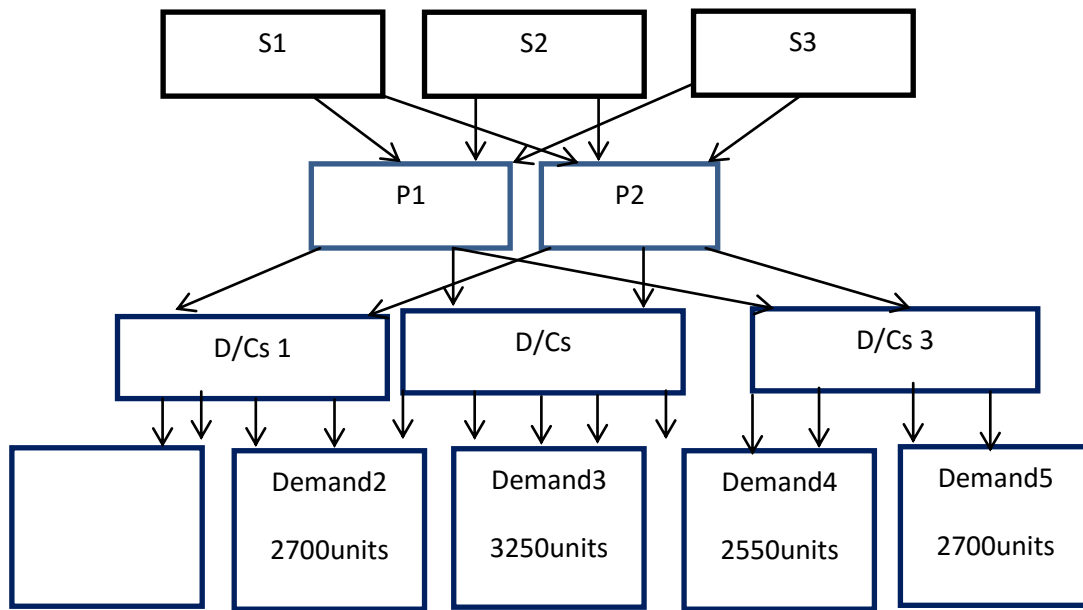
Components	1	2	3	4	5	6
Utilization rates	1	4	1	2	1	3
Recycling rate	1	0.5	7.5	1	0.3	0

1, 2, 3, 4, 5 and 6 with respective utilization rate of 1, 4, 1, 2, 1, and 3 and recycling rate of 1, 0.5, 7.5, 1, 0.3 and 0 flows between various facilities. In forward direction, there is a set of 3 suppliers that can provide components to 2 potential locations of manufacturing plants. 3 potential location of d/cs are there in the network to cater the demand of 2000, 2700, 3250, 2550 and 2700 units from respective 5 zones of first customer market at a unit selling price of 11000, 10500, 10000, 10750, and 10500. In backward direction, potential locations of CC, dismantlers and disposal sites are 3, 2 and 1 respectively. Besides, the demand for 500, 350 and 550 units of used product from respective 3 zones of second customers can be satisfied at unit selling price of 7500, 8000 and 7000. As for transportation, road-based transportation is used to carry out the shipping operations, for which there are three types of trucks available which are 0–3, 4–7 and 8–11 years old, respectively. We assume that the older the trucks, the cheaper their rental fees, but, at the same time, the greater their CO<sub>2</sub> emissions, due to decreasing engine efficiency. Unit transportation costs for the different types of trucks used are 1, 0.85 and 0.70 for truck types 1, 2 and 3, respectively. Emission rate of CO<sub>2</sub> found to be 1.3, 2.8 and 3.1 grams/ mile for truck types 1, 2 and 3, respectively. Profit raised in the network by repairing the product is 5500/unit and by recycling a unit of component 1, 2, 3, 4 and 5 are 250, 50, 90, 55 and 300 respectively.

**Table 2. Information relating to the transportation**

Truck types	Number of operational years	Unit transportation cost	Emission rate of CO <sub>2</sub>
1	0-3	1	1.3 gms/mile
2	4-7	0.875	2.8 gms/mile
3	8-11	0.70	3.1 gms/mile

Other parameters are set as follows:  $Rr = 0.60$ ,  $Rp = 0.25$  and  $Rc_a = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$ . Set of unit purchasing costs of components (in order) from supplier 1, 2 and 3 are (460, 0, 190, 125, 0, 80), (480, 120, 200, 150, 650, 100) and (470, 95, 0, 0, 620, 90) resp. Unit recycling costs of components (in order) at supplier 1, 2, and 3 are (20, 0, 60, 10, 0, 0), (25, 90, 55, 20, 390, 0) and (0, 65, 0, 0, 380, 0) respectively. Price 0 means that component service is not provided by respective supplier. 2500 and 3000 are unit production cost, and 1500 and 2200 are unit repairing costs of the product at plant 1 and 2 respectively. Unit operating costs at d/c 1, 2 and 3 are 500, 550 and 600 respectively. Unit Inspection costs at collection centers 1, 2 and 3 are 100, 100 and 120 respectively. Unit dismantling cost at d/m 1 and 2 are 125 and 110 respectively. Unit disposal cost of component 6 is 15.

**Fig: 3.** Forward Flow diagram of the company**Parameters**

$Rr = 0.60$ ,  $Rp = 0.25$  and  $Rc_a = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$ .

Price 0 means that component service is not provided by respective supplier

Unit production costs of the product at plant 1 and 2 respectively-2500 and 3000

Unit repairing costs of the product at plant 1 and 2 respectively-1500 and 2200

Unit dismantling cost at d/m 1 and 2 are 125 and 110 respectively.

Unit disposal cost of component 6 is 15.

Unit operating costs at d/c 1, 2 and 3 respectively -500, 550 and 600

Unit Inspection costs at collection centers 1, 2 and 3 respectively-100, 100 and 120



**Table 3. Various cost involved in the flow**

Supplier	Set of unit purchasing cost of components	Unit recycling cost of components	Unit operating cost at d/c	Unit inspection cost
1	(460, 0, 190, 125, 0, 80)	(20, 0, 60, 10, 0, 0),	500	100
2	(480, 120, 200, 150, 650, 100)	(25, 90, 55, 20, 390, 0)	550	100
3	(470, 95, 0, 0, 620, 90)	(0, 65, 0, 0, 380, 0)	600	120

Data on capacities at various facilities are as follows: Supplier1 can supply at most of 8000, 0, 9000, 12000, 0 and 14000 units of component 1,2,3,4,5 and 6 resp. Capacity of suppliers 2 and 3 of components are (7500, 40000, 5000, 27000, 7700, 15000) and (0, 20000, 0, 0, 7500, 1400) resp. Recycling capacities of supplier 1, 2 and 3 are (3000, 0, 2900, 4000, 0, 0), (2000, 15000, 2000, 6000, 2500, 0) and (0, 8000, 0, 0, 2500, 0) resp. Production capacities of plants are 8000, 7500 and repairing capacities are 2000, 1800 resp. Capacities of d/c's are 4800, 5000 and 5500, of CC's are 3500, 3000 and 2500; of dismantlers are 5000, 5000 and of disposal site is 250000.

Data on distance (in miles) between any two facilities is as follows:

$$D_{ij} = \{D_{11}, D_{12}, D_{13}, \dots, D_{21}, D_{22}, D_{23}, \dots\}$$

$$D_{sp} = \{200, 190, 310, 350, 290, 280\}, D_{pk} = \{120, 100, 135, 170, 190, 200\},$$

$$D_{ke} = \{24, 17, 22, 21, 18, 29, 19, 21, 20, 31, 33, 25, 28, 15, 28\},$$

$$D_{ec} = \{6, 9, 8, 8.5, 7, 10, 11, 12, 13, 9, 8, 9.5, 11, 9, 8\}, D_{cp} = \{150, 120, 135, 110, 130, 100\}$$

$$D_{cm} = \{8.5, 9, 11, 12, 10, 11\}, D_{ch} = \{15, 21, 19, 24, 16, 18, 20, 22, 21\}$$

$$D_{ms} = \{100, 150, 120, 95, 154, 130\}, D_{mf} = \{80, 75\}$$

The above data is employed to validate the proposed model. A LINGO code for generating the proposed mathematical models of the given data was developed and solved using LINGO11.0 [20]. Problem is solved individually with each objective subject to given set of constraints. Thus, profit and amount of CO<sub>2</sub> emission would be 66625630 and 252121600 resp. They are set as the aspiration levels for profit and emission functions. Then multi-objective programming problem combining all the objectives and incorporating the individual aspirations is solved which results in infeasible solution hence goal programming technique has been used to obtain a compromise solution to the above problem. Giving weightage 0.5 and 0.5 to profit and CO<sub>2</sub> objective resp., a compromise solution of allocation of facilities and transporting vehicle is obtained. Total profit thus generated in the network is Rs. 55454580 and amount of CO<sub>2</sub> emitted is 10681.55. The flow between facilities using different type vehicles is given below.

$$\begin{aligned} x_{spa}^t : x_{111}^2 &= 2499, x_{113}^2 = 3499, x_{114}^2 = 10002, x_{116}^2 = 14000, x_{121}^1 = 5501, x_{123}^1 = 5501, x_{124}^1 = 1998, x_{211}^2 = 3570, x_{212}^2 = 4552, \\ x_{213}^2 &= 2570, x_{214}^2 = 2136, x_{222}^1 = 21728, x_{224}^1 = 4202, x_{224}^3 = 4802, x_{225}^1 = 4070, x_{226}^3 = 15000, x_{312}^2 = 19724, x_{315}^2 = 6069, \\ x_{316}^2 &= 4207, x_{322}^1 = 276, x_{325}^3 = 1431, x_{326}^1 = 1503 \\ x_{pk}^t : x_{11}^2 &= 4800, x_{12}^3 = 2900, x_{23}^3 = 5500 \\ x_{ke}^t : x_{13}^1 &= 2100, x_{15}^1 = 2700, x_{21}^1 = 2000, x_{23}^1 = 900, x_{32}^3 = 2700, x_{33}^3 = 250, x_{34}^3 = 2550 \\ x_{ec}^t : x_{11}^3 &= 1200, x_{22}^1 = 1620, x_{33}^3 = 1950, x_{41}^3 = 150, x_{42}^1 = 1380, x_{51}^1 = 1070, x_{53}^3 = 550 \\ x_{cp}^t : x_{11}^1 &= 255, x_{21}^1 = 750, x_{31}^2 = 625 \\ x_{cm}^t : x_{11}^3 &= 765, x_{21}^3 = 2250, x_{31}^1 = 1875 \end{aligned}$$

$$x_{ch}^t : x_{11}^2 = 500, x_{12}^2 = 350, x_{13}^2 = 550$$

$$x_{msa}^t : x_{111}^1 = 2890, x_{113}^3 = 2890, x_{114}^3 = 3780, x_{121}^3 = 2000, x_{122}^3 = 11560, x_{123}^3 = 2000, x_{124}^3 = 6000, x_{125}^3 = 2390, x_{132}^3 = 8000, x_{135}^3 = 2500$$

$$x_{mfa}^t : x_{116}^3 = 14670$$

## 6. Conclusions, managerial implications and future research

One of the important planning activities in supply chain management (SCM) is to design the configuration of the supply chain network. Besides, due to the global warming recently attention has been given to reverse logistic in SCM. Modelling of a CLSC network design problem can be a challenging process because there is large number of components that need to be incorporated into model. Here in the paper, trade-offs between operational and environmental performance measures of transportation product were investigated. Due to global warming, this paper focused on CO<sub>2</sub> emissions. One of the main findings of this paper is that costs of environmental impacts are still not as apparent as operational measures, as far as their relative importance in a emission rate function is concerned. Operational costs of handling products, both in forward and reverse networks, seem to be dominant ignoring emissions rate. Another interesting result is relevant to the promotion of reusable products, the use of which seems to lessen the operational costs of the chain, but places a burden on the environmental costs. Through this study we would like to distil the key ideas and procedures that can help organizations to work out on their transport issues and do even better in terms of CO<sub>2</sub> emissions and costs. This research has been limited to a fixed entity with a limited scope. This research could easily be extended for flexible or variable demand. The scope of study could be considered from regional perspective also, since we have focussed our research in Delhi /NCR area. Future research could also be carried out in other parts of India. We have recommended the use of CNG three-wheelers for the environmental safety as well as cost efficiency. The availability of CNG is a limitation in India, since it is only available in metro cities and not in other parts of India. Further research is also recommended for the scope and benefits of CNG trucks for longer distances for commercial purpose.

## References

1. Saman H. Amin, Guoqing Zhang, (2012), Proposed mathematical model for closed-loop network configuration based on product life cycle, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58, 5-8, 791-801.
2. N. Aras, T. Boyaci, V. Verter, (2010), Designing the reverse logistics network. In: in Ferguson, M.E., Souza, G.C. (Eds.), *Closed-loop Supply Chains: New Developments to Improve the Sustainability of Business Practices*, CRC Press, Taylor & Francis, Boca Raton, 67–97.
3. B.M. Beamen, (2008), Sustainability and the future of supply chain management. *Operations and Supply Chain Management* 1(1), 4–18.
4. B. Beamen, (1999), Designing the green supply chain. *Logistics Information Management*, 12(4), 332–342.
5. F. T. S. Chan, H. K. Chan, J. Zhang, (2006), “Reverse Logistics Model for Mobile Phone Industry”, *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, SOLI'2006*, 294-299.
6. M. Ciupek, C. Franke, G. Seliger, (2003) “Simultaneous Design of a Disassembly Network and its Facilities”, in *Proceedings of the International Conference on Computer Integrated Manufacturing-Advanced Design and Management*, Wisla, Poland.

7. M. P. De Brito, S. D. P. Flapper, R. Dekker, (2003) "Reverse Logistics: a review of case studies", ERIM Report Series Reference No. ERS-2003-012-LIS
8. M. Fleischmann, P. Beullens, J.M. Bloemhof-Ruwaard, and L.N. Van Wassenhove, (2001), "The impact of product recovery on logistics network design", *Production and operations Management*, 10, (2), 156–173.
9. D. Francas, S. Minner, (2009) Manufacturing network configuration in supply chains with product recovery. *Omega* 37(4), 757–769.
10. M.M. Helm, and A.A. Harvani, (2006) Reverse logistics for recycling: Challenges facing the carpet industry. In J. Sarkis (Ed.), *Greening the supply chain*, 117–135, London: Springer-Verlag
11. A.A. Hervani, M.M. Helms, J. Sarkis, (2005), Performance measurement for green supply chain management, *Benchmarking: An International Journal* 12 (4), 330–353 (2005)
12. W. Hoffman, (2007), Who's carbon-free? Wal-Mart takes on supply chains of products as expansive carbon measuring plan eyes distribution. *Traffic World* 271 (42), 15–20.
13. V. Jayaraman, V.D.R. Guide Jr., R. Srivastava, (1999), A closed-loop logistics model for remanufacturing, *Journal of the Operational Research Society* 50 (5), 497–508.
14. JE, Lee; M. Gen, Rhee KG (2009), Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. *ComputIndEng* 56(3), 951–964.
15. G. Kannan, P. Sasikumar, K. Devika, (2010), A genetic algorithm approach for solving a closed loop supply chain model: a case of battery recycling. *Applied Mathematical Modelling* 34 (3), 655–670 (2010).
16. K. Kim, I. Song, J. Kim, B. Jeong (2006), Supply planning model for remanufacturing system in reverse logistics environment. *ComputIndEng* 51(2), 279–287.
17. A. Klose, M.G. Speranza, and L. van Wassenhove (Eds.), *Quantitative approaches to distribution logistics and supply chain management*, 47–60. [https://www.informs.org/content/.../Lei\\_Zhong\\_Chaovalitwongse.pdf](https://www.informs.org/content/.../Lei_Zhong_Chaovalitwongse.pdf)
18. H. Krikke, J. Bloemhof-Ruwaard, L.V. Wassenhove, (2003), Concurrent product and closed-loop supply chain design with an application to refrigerators, *International Journal of Production Research* 41(16), 3689–3719.
19. D.H. Lee, M. Dong, (2008), A heuristic approach to logistics network design for end-of-lease computer products recovery, *Transportation Research Part E* 44: 455–474.
20. M.J. Meixell, V.B. Gargeya, (2005), Global supply chain design: a literature review and critique. *Transportation Research Part E* 41 (6), 531–550.
21. A. Mutha, S. Pokharel (2009), Strategic network design for reverse logistics and remanufacturing using new and old product modules, *ComputIndEng* 56(1) 334–346.
22. M. Pagell, C.L. Yang, D.W. Krumwiede, C. Sheu, (2004) Does the competitive environment influence the efficacy of investment in environmental management? *Journal of Supply Chain Management*, 40 (3): 30–39.
23. R.K. Pati, P. Vrat, P. Kumar, (2008), A goal programming model for paper recycling system. *Omega* 36(3), 405–417.
24. Maja I. Piecyk, and Alan C. McKinnon (2010), Forecasting the carbon footprint of road freight transport in 2020, *International Journal of Production Economics*, 2010, 128, 1, 31–42.
25. M.S. Pishvaei, R.Z. Farahani, W. Dullaert (2010), A memetic algorithm for bi-objective integrated forward/reverse logistics network design. *ComputOper Res* 37(6):1100–1112.
26. Purba and Rao, Diane Holt (2005) "Do green supply chains lead to competitiveness and economic performance?", *International Journal of Operations & Production Management*, 25, 9, 898 – 916.
27. D. Rogers, T. Lembke, (1999), *Going backwards: Reverse Logistics Trends and Practices*. Reno, NV: Center for Logistics Manage, Univ. Nevada.

28. Z.M. Shen, (2007), Integrated supply chain design models: a survey and future research directions. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(1), 1–27.
29. M. Salema, A. P’oova, and A. Novais, (2009) “A strategic and tactical model for closed-loop supply chains,” *OR spectrum*, 31, 3, pp. 573–599.
30. J. Sarkis, (2003), A strategic decision framework for green supply chain management, *Journal of Cleaner Production*, 11 (4), 397–409
31. R. Schleiffer, J. Wollenweber, H.J. Sebastian, (2004), Application of Genetic Algorithms for the Design of Large-Scale Reverse Logistic Networks in Europe’s Automotive Industry”, *Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences*.
32. F. Schultmann, M. Zumkeller, O. Rentz, (2006), “Modeling reverse logistic tasks within closed-loop supply chains: An example from the automotive industry”, *European Journal of Operational Research*, 171, ( 3), 1033–1050.
33. J.B. Sheu, Y.H. Chou, C. Hu, (2005) An integrated logistic operational model for green supply chain management, *Transportation Research Part E* 41 (4), 287– 313 (2005).
34. T. Spengler, W. Stolting, M. Ploog, (2004), Recovery planning in closed loop supply chain: An activity analysis based approach. In H. Dyckhoff, R. Lackes, & J. Reese (Eds.), *Supply chain management and reverse logistics* (pp. 61–89). Berlin: Springer-Verlag
35. S.K. Srivastava, (2008) Network design for reverse logistics, *Omega* 36(4), 535–548.
36. S.K. Srivastava, (2007) Green supply-chain management: a state-of-the-art literature review. *International Journal of Management Reviews* 9 (1), 53–80.
37. M. Thierry, M. Salomon, J.V. Nunen, L.V. Wassenhove, (1995), Strategic issues in product recovery management, *California Management Review*, 37(2), 114–135.
38. H. Thiriez, (2000) OR software LINGO, *European Journal of Operational Research*, 12: 655–656, (2000).
39. W. Ulaga, A. Eggert, (2006), Value-based differentiation in business relationships: gaining and sustaining key supplier status. *Journal of Marketing* 70 (1), 119–136.
40. S. Verstrepn, F. Cruijssen, M.P. De Brito, and Dullaert, W (2007) An exploratory analysis of reverse logistics in Flanders. *European Journal of Transport and Infrastructure Research* 7(4):301–316.
41. S.M. Wagner, C. Bode, (2008), An empirical examination of supply chain performance along several dimensions of risk, *Journal of Business Logistics*, 29 (1), 307–325.
42. H.F. Wang, Hsin-Wei Hsu (2010), A closed-loop logistic model with a spanning-tree based genetic algorithm. *Comput Oper Res* 37 (2), 376–389.
43. H. C. Zhang, T.C. Kuo, H. Lu, and S.H. Huang, (1997). Environmentally conscious design and manufacturing: A state of the art survey. *Journal of Manufacturing Systems*, 16, 352–371.
44. Q. Zhu, J. Sarkis, K. Lai (2008). Green supply chain management implications for closing the loop. *Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review* 44(1), 1–18. [http://www.unep.fr/shared/docs/review/vol25no3-4/I&E25\\_34.pdf](http://www.unep.fr/shared/docs/review/vol25no3-4/I&E25_34.pdf)

**Sadia Samar Ali**, Dr., Associate Professor & Area Coordinator : QT&OM (Fortune Institute Of International Business). Scientific areas of interests: green supply chain management; control with closed chain; logistics; stable business.

Ph: (Off.) +91 11-47285022 (Mob.) +91 9650691133, Fax: +91 11-26144279

## **Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью**

(на примере индийской компании)

**С.С. Али**

Fortune Institute of International Business  
VasantVihar, New Delhi, 110057, India

Управление экологически чистыми («зелеными») цепочками поставок – важнейшая инновация, которая на сегодняшний день внедряется в организациях по всему миру с целью разработки стратегий достижения поставленных целей. Управление зелеными цепочками поставок (УЗЦП) обычно определяется как тип управления, который эффективно учитывает все экологические аспекты и утилизацию ресурсов. Организации применяют УЗЦП, чтобы продемонстрировать, что они придерживаются правильных принципов работы в отношении экологии. Вопросы экологии оказывают большое давление на организации, заставляя их, например, принимать произведенную ими продукцию после истечения срока службы для повторного использования, переработки или правильного уничтожения всего продукта или его частей. Управление цепочками поставок с обратной связью – эффективная, результативная и экономически оптимальная стратегия, нацеленная на поддержание экологически чистых методов работы в промышленном секторе. Логистическая сеть возвращения товара от конечного потребителя обратно производителям обычно связана с многочисленными противоречащими друг другу задачами. Технологические успехи, экономическая деятельность и процветание требуют мобильности товаров и людей между разными частями света. Повышенная мобильность предъявляет повышенные требования к транспортировкам, что ведет к повышению актуальности таких вопросов, как экономия топлива при вождении автомобиля, снижение выбросов CO<sub>2</sub> и минимизация выбросов углерода. Эти выбросы имеют огромное влияние на изменение мирового климата, на человечество, на производство продуктов питания, на моря, на всю окружающую нас среду, поэтому устойчивое развитие стало важной комплексной задачей для всех мировых компаний.

Данная работа посвящена исследованию связи между логистическими операциями по перемещению товара к потребителю и обратно производителю, а также таким экологическим показателям, как выбросы CO<sub>2</sub> транспортных средств в схеме сети цепочек поставок с обратной связью с оптимизацией выбора расположения с целью включения вопросов экологии в традиционную логистическую схему.

Итак, в работе представлена интегрированная и обобщенная схема сети с обратной связью, имеющая четыре звена в прямом направлении (поставщики, заводы и склады готовой продукции, зона «первого покупателя») и четыре звена в обратном направлении (центры сбора, пункты разоборудования, утилизационные центры и зона «второго покупателя»), причем при планировании логистики формулируется задача циклической логистической сети. Представленная модель имеет двойную цель и позволяет найти компромисс между различными затратами в данной сети и выбросами парниковых газов CO<sub>2</sub>.

Правильность модели подтверждается на примере из реальной жизни: рассматривается производитель бытовых электроприборов в Дели и столичном регионе. В результате показано, что предложенная модель способна оказывать эффективную поддержку логистических решений в цепочке поставок с обратной связью.

*Ключевые слова:* управление зелеными цепочками поставок, выброс углерода, управление цепочками поставок с обратной связью

### **1. Введение**

Наша планета превращается из богатого источника недорогой энергии в источник загрязненной, скудной энергии, которая расходуется неэкономно и нерентабельно. Для

тех, кто живет на нашей планете, чрезвычайно важно знать о трудностях и последствиях, с которыми им придется столкнуться в случае реализации возможного сценария нехватки энергии. Недостаток ресурсов, глобальное потепление и загрязнение сегодня требуют к себе повышенного внимания. Стейкхолдеры всё больше заинтересованы в том, что компании делают для того, чтобы сделать свою цепочку поставок более экологичной и, в целом, сделать бизнес более рациональным. Это требует определенных сознательных шагов по управлению всей системой и процессами в рамках этой системы. Цепочки поставок усложняются, а условия ведения бизнеса меняются очень быстро. Несмотря на то, что Индия все еще является развивающейся страной, она чрезвычайно заинтересована в поддержании равновесия с защитой окружающей среды, для чего был сделан упор на экономическое развитие. Это равновесие включает в себя промышленность и цепочки поставок в Индии. Любая организация в рамках данной системы, маленькая или большая, потребляет энергию и ресурсы. Имеется постоянная потребность в энергии и ресурсах по доступной цене, но с дефицитом поставок. На это специалисты по логистике и менеджеры цепочек поставок должны обращать особое внимание и стремиться к сохранению и сбережению основных ресурсов, к снижению стоимости при сохранении хороших экологических показателей. Большинство современных организаций рассматривают возможность интегрирования современных обязательных к исполнению экологических регламентов и добровольных экологических программ в свои стратегические планы и ежедневные процедуры (Pagell, Yang, Krumwiede, Sheu 2004).

### **1.1. Управление зелеными цепочками поставок**

Несмотря на то, что целью любого бизнеса является максимальная прибыль (для выживания в современной экономической ситуации), организациям приходится серьезно подходить к вопросам самодостаточности и устойчивости в непрерывных поставках ресурсов, требуемых для производства продукции и выполнения всех требований. Надвигающаяся угроза глобального потепления привлекла внимание ученых к управлению зелеными цепочками поставок (УЗЦП). Управление зелеными цепочками поставок – это включение экологических аспектов в управление цепочками поставок, начиная непосредственно с проектирования продукции, а также на других этапах: выбор поставщика и подбор материалов, процесс производства, упаковывание продукции, доставка продукции до потребителя, управление продукцией в конце срока ее службы после использования (Srivastava 2007; Beamen 1999; Zhang *et al.* 1997; Linton *et al.* 2007). Подробное планирование и реализация всей цепочки поставок, начиная с «зеленого» проектирования продукции и до возвращения продукции с обратной связью, чрезвычайно важно для успешного функционирования зеленой цепочки поставок. Исследование УЗЦП помогает компаниям создавать стоимость в цепочках поставок, увеличивая преимущества продукции в глазах покупателя, снижая стоимость продукции, совершенствуя услуги по доставке или сокращая время доставки.

### **1.2. Устойчивое управление**

Вопросы, связанные с устойчивым бизнесом, обсуждаются в числе важнейших вопросов в правительственных кругах, среди покупателей и в компаниях вследствие широкого распространения таких понятий, как «зеленое» и устойчивое развитие. Влияние устойчивости на управление цепочками поставок трудно переоценить, особенно когда удастся снизить выбросы углерода или предотвращать появление свалок и сжигание мусора. В свете текущей ситуации с недостатком ресурсов,

недостатком места под свалки, а также в условиях оказываемого давления за глобальное сокращение выбросов парниковых газов усилия по обеспечению устойчивой деятельности в этой сфере больше нельзя назвать необязательными или несущественными (Srivastava 2007). Внедряя устойчивость в основу своего бизнеса, компания может достигнуть высокой эффективности и снизить негативные экологические последствия своей деятельности. Фактически, УЗЦП стало важнейшим вопросов организации бизнеса, особенно в логистике 21 века (Diabat, Govindan 2011). В большей степени это произошло благодаря строгим законам и постановлениям, регулирующим обратный путь продукции (например, вводная часть Директивы ЕС об утилизации отработанного электрического и электронного оборудования (Waste Electrical and Electronic Equipment (WEEE) directive)) (С. Prahinski, С. Kocabasoglu 2006). Добавим также, что азиатские страны немного запаздывают с реакцией на проблемы устойчивости (Johannesburg Summit, 2002).

### 1.3. Обратная логистика

Активисты в социальной области и области экологии, государственные законодательные акты и информационные кампании принуждают организации поставлять экологически безопасную продукцию, а также нести больше ответственности за возвращаемую после истечения срока службы продукцию. Нам необходимо принять принцип «повторного использования и повторного производства отработавшей продукции», чтобы сократить потребление ресурсов. В 1987 г. Комиссия Брундтланд определила термин «устойчивое развитие» как развитие, «удовлетворяющее потребности нынешнего поколения без ущерба для возможности будущих поколений удовлетворять свои собственные потребности».

Если взглянуть на определение Zhu, Sarkis, (2006) о том, что продукция оказывает влияние на экологию на всех этапах своего жизненного цикла, начиная с добычи сырья, использования и повторного использования продукции, окончательной переработки или утилизации, оказывается, что конечная цель защиты окружающей среды может быть достигнута за счет цепочки поставок с обратной связью (ЦПОС) (Andiç, Yurt, Baltacıoğlu 2012).

Усилия по обеспечению устойчивости заставляют организации серьезно рассматривать применение принципа ЦПОС (Beamon 1999, Seuring 2004). Появление потребности в устойчивых цепочках поставок заставило дать определение модели цепочек поставок с обратной связью (Solvang, Deng 2007, Solvang 2007). В рамках подхода обеспечения устойчивости подразумевается сочетание существующего промышленного развития с потребностями будущих поколений (Wilkinson *et al.*, 2001).

Зеленая цепочка поставок (ЗЦП) нацелена на удержание всех отходов в пределах соответствующей промышленной системы, чтобы обеспечить сохранение энергии и предотвратить утечку опасных веществ в окружающую среду (Johnny *et al.* 2009). Ясно, что сфера УЗЦП простирается от мониторинга мероприятий по охране окружающей среды в целом до более активных действий (например, повторное использование материалов, восстановление, логистика обратного пути продукции) при управлении охраной окружающей среды и внедрении «инноваций». ЗЦП стремится удержать отходы в пределах конкретной промышленной системы, чтобы сохранить энергию и предотвратить утечку опасных веществ в окружающую среду (Johnny *et al.* 2009).

### 1.4. Управление цепочками поставок с обратной связью

Принцип УЗЦП требует, чтобы организации удлинляли «прямую» цепочку поставок на один шаг, т.е. включали в нее сбор отработавшей продукции, разбор ее на части, восстановление, извлечение материалов, правильную утилизацию продукции, что

достигается такими процессами, как ремонт, повторное производство, переработка, которые в сочетании со всеми необходимыми транспортными и распределительными операциями называются обратной цепочкой. В логистике обратной цепочки существует связь между рынком, на котором появляется отработавшая продукция, и рынком для «новой» продукции. При совпадении этих рынков можно говорить о так называемой замкнутой сети (сети с обратной связью) (Krikke *et al.* 2004). Таким образом, цепочка поставок, в которой сосуществуют прямая и обратная цепочки, называется цепочкой с обратной связью. Исследование таких цепочек вылилось в отдельную область – область исследования управления цепочками поставок с обратной связью (УЦПОС). УЦПОС включает в себя процессы и операции, которые отсутствуют в традиционном управлении цепочками поставок. Guide Wassenhove, Van Wassenhove (2003) утверждают, что обратная цепочка поставок, в числе прочих, включает в себя закупки, логистику обратной цепочки, проверку, сортировку, размещение, обновление, а также распределение и маркетинг. Таким образом, можно предположить, что управление ЦПОС как стратегия способно привести к зеленой цепочке поставок (Olugu, Wong 2012). ЦПОС можно определить как интеграцию логистики прямой и обратной цепочек, в которой возвращаемая продукция восстанавливается и возвращается обратно в традиционную прямую цепочку, создавая тем самым непрерывный цикл поставок (Wells, Seitz 2005), направленный на экономические, экологические и социальные достижения (Giovanni 2011). Если посмотреть на определение, то можно предположить, что конечной цели в области защиты окружающей среды можно достичь с помощью ЦПОС (Andiç, Yurt, and Baltacıoğlu 2012).

Управление логистикой с обратной связью обеспечивает минимальную затрату материалов за счет следования принципам «от колыбели до колыбели» и закону сохранения на протяжении всего жизненного цикла материалов. В обратной логистике использованная продукция (либо на гарантии, либо в конце срока использования, либо в конце аренды) забираются, а затем продукция или ее части правильно утилизируются, перерабатываются, повторно используются или повторно производятся. В цепочке поставок с обратной связью производитель исходной продукции забирает использованную продукцию у потребителей, передает ее дальше на разбор, повторное использование или утилизацию (Rogers, Lembke 1999) с целью получить прибыль или снизить вредное воздействие на окружающую среду. Логистика с обратной связью состоит из двух частей: прямой и обратной логистики. Восстановление продукции – это обратная логистика. Roger, Timber- Lembke (1999) определяют обратную логистику как «процесс планирования, внедрения, управления эффективным рациональным потоком сырья, продукции в процессе производства, готовой продукции и связанной с этим информации начиная с точки потребления продукции до точки ее производства с целью «возврата стоимости или правильной утилизации». Возможные действия в рамках обратной логистики включают в себя повторное использование, повторную продажу, ремонт, обновление, повторное производство, разукomплектование, переработку (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, Wassenhove 2003). Если управление обратной логистикой ведется правильно, то при сокращении вредных выбросов, восстановлении и повторном использовании продукта в целях защиты окружающей среды можно добиться и сокращения затрат при закупках, уничтожении и транспортировке продукции (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, and Wassenhove 2001). Построение схемы сети обратной логистики рассмотрено в недавно опубликованных работах. Из-за различий в характеристиках потока между прямым и обратным каналами построение сети обратной логистики стало предметом исследования. Выполнены многочисленные



работы в различных областях: автомобильная промышленность (Schleiffer, Wollenweber, Sebastian 2004; Schultmann, Zumkeller, Rentz, 2006), производство электроприборов (De Brito, Flapper, Dekker 2003; Ciupek, Franke, Seliger, 2003), переработка макулатуры (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, Van Wassenhove 2001; Chan, Chan, Zhang 2006), переработка ковровых покрытий (Helm, Harvani 2006). Целью данных работ была разработка сети обратных поставок, способной эффективно работать с обратными потоками и достигать устойчивости. Кроме того, в этих работах уделяется внимание источникам большого количества парниковых газов, а одним из таких источников является транспорт. CO<sub>2</sub> оказывает сильное негативное воздействие на здоровье человека. Транспорт – второй по объемам источник выбросов CO<sub>2</sub>. Ограничения на CO<sub>2</sub> на рынке логистики должны быть удовлетворены в ближайшем будущем, т.к. эти ограничения закреплены в протоколах. Можно ожидать, что в грузоперевозках будут изменения, которые снизят выбросы CO<sub>2</sub> при разумных затратах денежных средств и времени (Piesyk, Alan and McKinnon 2010).

### **1.5. Цель данной работы**

Предпринята попытка разработать модель управления зелеными цепочками поставок на основе ЦПОС, которая позволит минимизировать негативные последствия в области экономики и экологии и объединить прямую и обратную логистику с целью сокращения отходов.

В данной работе моделируются функциональные и экологические характеристики ЦПОС, т.е. модель логистической сети прямого и обратного направления с множеством звеньев с целью учесть на этапе проектирования влияние выбросов парниковых газов на окружающую среду. Цель данной модели – максимально повысить общую ожидаемую прибыль и минимизировать выбросы CO<sub>2</sub> за счет транспортировки материалов в логистической сети прямого и обратного направления при помощи других типов транспорта, каждый со своим характерным уровнем выброса и стоимостью перевозки. Результаты расчета позволили пролить свет на различные показатели эффективности.

### **1.6. «Зеленый» сценарий в развивающихся странах**

#### **1.6.1. «Зеленая» продукция / УЗЦП и развивающиеся страны**

Принцип «зеленой» продукции дает перспективу нового экономического роста, который не наносит вред окружающей среде и способен уменьшить уровень бедности. Мероприятия, которые снижают наносимый окружающей среде вред, выполняемые большинством организаций по всему миру, играют ключевую роль в обращении изменения климата, сокращении выбросов парниковых газов, сохранении ограниченных природных ресурсов. Компании по всему миру делают выбор в пользу продукции с замкнутым циклом (регенеративный принцип – cradle to cradle) как более энергоэффективной и экологически безопасной. Внедряя повторную переработку, сортировку и утилизацию отходов, переоборудование освещения с целью энергосбережения, сбор дождевой воды, программы по работе с населением, покупку «зеленой» энергии, они стараются сократить негативное влияние на окружающую среду. Большая часть населения в развивающихся странах живет на 1-2 доллара в день. Бедные слои населения тратят большую часть своего дохода на продукты питания, они могут не иметь доступа к основной инфраструктуре и не иметь производственного капитала. В развивающихся странах треть детей до пяти лет недостаточно хорошо

питаются и чрезвычайно восприимчивы ко многим болезням. В Индии большинство организаций реализовали мероприятия по созданию устойчивой окружающей среды. Это означает не только то, что сотрудники, поставщики, партнеры по бизнесу и покупатели стали больше заботиться об окружающей среде, но и то, что стейкхолдеры теперь стремятся выбирать методы работы, которые способствуют устойчивому развитию. Различные регулирующие органы выдвинули инновационные предложения, в которых обязательно учитывается защита окружающей среды. Внедряется ряд постановлений и норм по защите от загрязнения воды, воздуха, дикой природы, лесов, по защите окружающей среды в целом и по обработке вредных отходов, которые были приняты с 1970 г. по сей день.

### **1.6.2. Зеленая продукция / УЦП и конкурентное преимущество**

Целью зеленой продукции является минимизация негативного влияния производства продукции на окружающую среду. Устойчивое потребление означает удовлетворение максимального числа потребностей и желаний потребителя при минимальном влиянии продукции и услуг на окружающую среду. Принимая на вооружение идею «сделать большее за меньшее», компании тщательно разрабатывают методы управления, не наносящие вред окружающей среде и позволяющие обновить процесс производства продукции, начиная от этапа проектирования и производства и до использования продукции и ее утилизации. В процессе производства выполняется тщательный анализ с целью сокращения влияния конкретных видов продукции на окружающую среду в течение всего жизненного цикла продукции (проектирование, производство, использование, эксплуатационная поддержка) и разрабатываются специальные методы утилизации. Основное внимание уделяется построению цепочки устойчивой стоимости за счет ответственного отношения к использованию ресурсов, поддерживая хорошие отношения с поставщиками (в направлении «вверх», «вниз» и «поперек»). В 2003 г. IFC предоставила кредит в 75 миллионов долларов совместной компании Power links Transmission Limited на строительство линии электропередачи, предназначенной для передачи энергии, вырабатываемой ГЭС, в северные и восточные штаты Индии. При этом за 25 лет реализации проекта непосредственно и косвенно было создано около 9700 рабочих мест. Кроме того, второстепенные факторы, связанные с поставками энергии и ее повышенной надежностью, создали 75000 рабочих мест с 2006 по 2012 гг., из которых 4600 рабочих мест было создано в Западной Бенгалии.

В связи с недостатком экспертов, особенно в развивающихся странах, программы обучения там пока не прижились, а кроме того, из-за различных заблуждений финансовых институтов практически отсутствует готовность финансировать более экологичную продукцию. Крайне необходимо повышать информированность о проблемах, причем не только в области производства, но и в социальной сфере, сфере окружающей среды и экологии.

Такая ситуация особенно остро стоит в области сельского хозяйства, где зеленые технологии направлены на повышение продуктивности сельского хозяйства мелких фермеров. Одно из самых серьезных потенциальных последствий глобального потепления – пониженная продуктивность сельского хозяйства развивающихся стран. По той же причине, однако, бедные сельские жители являются одними из тех, кто в первую очередь выигрывает от зеленой экономики. Устойчивые методы сельскохозяйственного производства обладают большим потенциалом, особенно в отношении укрепления органических веществ плодородного слоя почвы, плодородия почвы и водоудерживающей способности почвы, они позволяют получать повышенный урожай в низко- и среднетратном сельском хозяйстве и агролесоводстве.

### **1.6.3. Зеленое производство / УЦП и преимущество в развитии для развивающихся стран**

Зеленое УЦП помогает применять альтернативные возобновляемые источники энергии в целях обеспечения устойчивости, повысить свою конкурентоспособность на рынке, экономить денежные средства и в конечном итоге – спасти Землю от ужаснейшего кризиса, который последовал в результате неразумного использования научно-технических достижений и поставил под угрозу исчезновения биологические виды. Многие организации расширяют линейку экологичной продукции, что позволяет решать важнейшие вопросы в области энергетики и устойчивости на государственном уровне. Помимо того, что потребители в этом случае получают энергию по более выгодной цене, а производительность и выгода ведения бизнеса повышаются, повышается и качество здравоохранения и уровень жизни. Многие организации постоянно работают над улучшением процессов ведения бизнеса за счет внедрения инноваций и обратной связи, делая эти процессы более безопасными и экологически эффективными в области применения ресурсов и управления материальной базой. Это одна из ключевых мер, направленных на обеспечение устойчивого развития. Сюда входят нормативные акты, политика ценообразования, налоги и субсидирование в целях ограничения загрязнений и выбросов, предотвращения чрезмерной эксплуатации природных ресурсов и более адекватного отображения природной ценности при ценообразовании, а также активного внедрения экологических критериев в процесс ведения госзакупок.

Компания Attero разработала технологию переработки, позволяющую извлекать металлы и пластик из отработавшей электроники (например, компьютеров и мобильных телефонов). При этом были созданы рабочие места. Технология позволяет снижать объем загрязнений и рациональнее использовать запасы металлов. Компания обращает особое внимание на обучение низкоквалифицированных рабочих, которые собирают и перерабатывают большую часть отходов от электроники в Индии. Тот же сценарий начинает реализовываться и в области сельского хозяйства, где зеленые технологии повышают продуктивность мелких фермерских хозяйств. Одно из самых серьезных последствий, к которым может привести глобальное потепление, – это сниженная продуктивность сельского хозяйства в развивающихся странах. По той же причине бедные сельские жители больше остальных выигрывают от внедрения зеленой экономики. Методы устойчивого сельскохозяйственного производства могут существенно снизить вредное влияние на окружающую среду и обладают большим потенциалом адаптации, в особенности в отношении закрепления органической материи верхнего слоя почвы, плодородности и водоудерживающей способности почвы, повышения урожайности в районах с низко- и среднетратным сельским хозяйством и агролесоводством.

Инновации компании Jain Irrigation позволили достичь экономии водных ресурсов, равные годовому потреблению более 10 миллионов домохозяйств. За счет этой инициативы 16300 мелких фермеров повысили свой годовой доход практически на \$1000. 11 компаний Tata Group также разрабатывает стратегию экономии водных ресурсов в своей работе. Это позволит установить парадигму сохранения водных ресурсов в индийской промышленности.

### **1.6.4. Зеленое производство / УЦП: чистая и здоровая продукция ведет к чистой и здоровой жизни**

Понятие «более чистая продукция» официально появилось на семинаре в Кентербери. Оно было определено как «непрерывное использование интегрированной превентивной

экологической стратегии в производственных процессах, продукции и услугах в целях повышения общей эффективности и снижения рисков для человека и окружающей среды»<sup>1</sup>. Более чистое производство играет ключевую роль в изменении структуры потребления и производства. Опыт использования более чистого производства показывает, что можно снизить количество отходов и объем выбросов на 20% без новых инвестиций. Еще 10-20% снижения отходов и выбросов можно достичь за счет минимальных дополнительных затрат, причем срок окупаемости будет составлять менее 6 месяцев<sup>1</sup>.

#### Различия между развитыми и менее развитыми странами

	Развитые страны	Менее развитые страны
Автомобильные перевозки	Много владельцев автомобилей	Существенно меньше владельцев автомобилей
	Преобладают автомобили	Сочетание двух- и трехколесного транспорта
	Больше км/человека	Меньше км/человека
	Более новый автопарк, сниженные выбросы	Более старый автопарк, повышенные выбросы
	Дорожное покрытие поддерживается в хорошем состоянии	Худшее состояние транспорта
Распределение источников	Обычно промышленные районы расположены вдали от жилых	Плохое состояние дорог
Выбросы	Надежные данные по выбросам	Промышленные районы тесно соседствуют с жилыми
Источник энергии для приготовления пищи и отопления	Обычно газ, электричество, др.	Неопределенность в данных, требуется лучшее понимание
Загрязняющие вещества, на которые следует обратить особое внимание	PM <sub>10</sub> , PM <sub>2.5</sub> , O <sub>3</sub> , NO <sub>2</sub>	Уголь, древесина, масло, биотопливо, газ. Зависит от местных ресурсов
Инфраструктура контроля загрязнения воздуха	Хорошо развитая в некоторых регионах, жесткие требования	Дополнительно: SO <sub>2</sub> , летучие органические соединения, Pb
Экономика	Слабая зависимость экономики от загрязняющей промышленности	Менее развитая, фрагментарная, выбросы плохо контролируются
Реализация законодательства	Надежная	Сильная связь (например, рабочие места зависят от загрязняющей промышленности)
Градостроительство, управление	Связи становятся сильнее	Может быть слабой
Мониторинг загрязнений	Хорошо структурированный	Фрагментарное, несистематическое
		Требуется более строгий координации

Источник: **World Atlas of Atmospheric Pollution** - Page 20 - Google Books

Одной из самых важных задач, стоящих перед человечеством, является удовлетворение потребностей и желаний потребителя, продвигая при этом более чистую продукцию и устойчивое потребление. Для борьбы с бедностью и ухудшением экологической ситуации необходимо менять способ производства, распространения и потребления продукции. Кроме того, требуется рационально использовать такие ресурсы и энергию, а также совершенствовать практическое мышление. Развивающиеся страны по всему миру должны внедрять эффективные государственные программы, подразумевающие специальные отметки на «зеленой» продукции, поощрение экологически чистого производства, «эко-менеджмента» и аудирование окружающей среды. Правительства этих стран должны внедрять принципы добровольного соглашения между государственными природоохранными органами и участниками производственной

деятельности, а также разработать методологию внедрения оценки жизненного цикла для предприятий.

Далее представлен литературный обзор по данной тематике. Затем определяется проблема и основная цель нашей статьи, предлагается модель конкретного продукта при определенных допущениях, рассматривается реальная ситуация (раздел 3). В разделе 4 описывается методология, применяемая в целевом программировании. В разделе 5 приводится численная реализация конкретного случая из реальной жизни, чтобы подчеркнуть характеристики предложенной модели. В заключение приводятся выводы.

## 2. Обзор литературы

УЗЦП приобретает все большее значение для индийских производителей, благодаря информированности о бизнесе и экологии и корпоративной ответственности. Организации стали обращать внимание на такие вопросы, как минимизация вредных отходов, восстановление ценных материалов из отходов и предотвращение ухудшения экологической обстановки (Kannan, Sasikumar, Devika 2010). УЗЦП рассматривалось исследователями в контексте проблем в области цепочек поставок, вредоносных отходов, разлива сточных вод, промышленных отходов или экологических проблем. Все это подчеркивает значимость правильного построения схемы распределения продукции и сети обратной логистики. Построение схемы распределения продукции и сети обратной логистики должно удовлетворять различным целям с экономической, социальной и экологической позиций (Hamdy, Fors, Harraz 2007). В последнее время потребители стали больше ценить менее очевидные факторы: малорискованные цепочки поставок (Boyd, Spekman, Kamauff and Werhane 2007) или зеленые цепочки поставок (Neto *et al.* 2008). Важным вопросом в обратном распределении является интеграция прямой и обратной цепочек поставок. Информация от обратной цепочки должна интегрироваться с информацией от прямой цепочки с целью оптимального планирования и снижения стоимости. Тогда вся цепочка системы поддержки может быть выстроена так, чтобы эффективно работать и с прямой, и с обратной логистикой. Это согласуется с принципом схемы цепочки поставок с обратной связью. За последние годы возрос интерес к цепочкам поставок с обратной связью. Многие авторы изучают цепочки поставок с обратной связью для различных случаев.

Сбор и переработка возвращаемой продукции приобрели большое значение в качестве выгодной и устойчивой стратегии ведения бизнеса вследствие распространения принципов управления зелеными цепочками поставок [1]. Для внедрения этой практики организации по всему миру пользуются разными стратегиями. Verstrepn *et al.* (2007) предполагает, что необходимо выстроить правильную структуру цепочки поставок, чтобы минимизировать стоимость в масштабе системы (или максимизировать прибыль) за счет планирования перемещения товаров в пределах цепочки поставок, т.к. физическая структура цепочки поставок будет, очевидно, влиять на ее эффективность, при этом чрезвычайно важно спроектировать эффективную цепочку поставок. Saman, Guoqing (2012) предложили сеть и математическую модель для минимизации затрат за счет определения того, какие части продукта подлежат переработке в каждом центре восстановления, а какие следует покупать у внешних поставщиков. Salema, P'ovoia and Novais (2007) разработали концептуальную модель одновременного размещения/распределения центров для эффективной и результативной сети обратной логистики. Структура сети с обратной связью предложена с целью интеграции экологических аспектов в традиционную логистическую систему (Kim *et al.* (2006)). Ученые предложили модель целочисленного линейного программирования, основанную на

решении о выборе места расположения производства, распределительных центров, демонтажных центров и выборе цены, причем особое внимание уделяется снижению количества отходов, восстановлению и повторному использованию в логистике зеленой цепочки поставок и оптимизации размещения. Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, Wassenhove (2001) подчеркивают значимость сортировки органических/неорганических отходов и положительное влияние на окружающую среду повторного использования макулатуры. Авторы уделяют особое внимание формулировке смешанной модели целочисленного целевого программирования для корректного управления логистикой переработки. Ученые также предложили модель переработки, которая определяет месторасположение центров повторного производства/распределения, транзитную перевозку грузов, производство и хранение оптимального количества восстановленной продукции и использованных элементов Francas and Minner (2009). Работ, посвященных определению количества и расположения пунктов сбора с любым количеством временных горизонтов, опубликовано мало, но при этом в них определяется желательное время хранения возвращаемой продукции в целях объединения продукции в крупную партию. Ulaga, Eggert (2006) предложили частично-целочисленную модель нелинейного программирования и генетический алгоритм, который способен решать обратную задачу логистики с пространственным и временным объединением возвращаемой продукции. Pishvaei, Farahani, Dullaert (2010) предложили математическую модель для проектирования сети обратной логистики с детерминированными параметрами в 9-звенной сети для интегрированной цепочки поставок с обратной связью, в которой возвращаемая продукция должна собираться на складе в большие партии, а затем отправляться в обрабатывающие центры для проверки и разборки. В модели считается, что все части продукции после ее разборки либо пересылаются на повторное производство, либо отправляются на вторичный рынок как запчасти, либо перерабатываются, либо просто уничтожаются. Pati, Vrat, Kumar (2008) рассматривают сеть обратной логистики, состоящую из центров сбора и двух типов центров вторичной переработки, организованных производителем или объединенным производителем, для различных категорий возврата продукции и различных стратегических, функциональных или потребительских ограничений в пределах Индии. Salema, P'ovo, Novais (2009) спроектировали сеть восстановления продукции с помощью частично-целочисленной линейной программы для модели 2-звенной прямой и обратной цепочки поставок отдельного продукта. Авторы подчеркивают значимость правильной логистической структуры для потоков использованной и восстановленной продукции на примере повторного производства копировальных устройств и переработки макулатуры. Aras, Boyaci, Verter (2010) разработали частично-целочисленную линейную программу для многозвенной, многопериодной многопрофильной цепочки поставок с обратной связью, которая объединяет в себе стратегические проектные решения и функциональные решения, связанные с закупками, производством, распределением и утилизацией, и получили решение с помощью генетического алгоритма. Jayaraman, Guide J, Srivastava (1999) также экспериментировали с моделью с целью объединить сетевые проектные решения макроуровня с тактическими решениями микроуровня, включая вопросы производства, хранения, планирования, распределения, с учетом принципа макро- и микро масштабов времени. Francas, Minner (2009) исследовали модель повторного производства, которая определяет расположение центров повторного производства/распределения, транзитных перевозок, производства, складирования оптимального количества повторно произведенной продукции. Движение материалов по замкнутому циклу от

покупателя на повторное производство и наоборот (Mutha and Pokharel 2009), а также решения о выработке продукции и ожидаемой производительности двух разных структур производственной сети при неопределенном спросе и обратном потоке продукции исследованы многими учеными. Для процесса планирования в целом требуется интегрированный процесс планирования цепочки поставок обратной логистики с модульной структурой продукции, который производит и выводит на рынок продукцию различного уровня качества с целью максимизировать прибыль за счет сбора возвращаемой продукции, восстановления модулей и правильного соотношения в ассортименте продукции на различных уровнях качества. Lee, Gen, Rhee (2009) рассматривают одного поставщика в целях минимизации стоимости доставки в ЦПОС и стоимости открытия пунктов разоборудования и переработки. Meixell, Gargeya (2005) разработали общую замкнутую сеть, основанную на паре возврат-восстановление и цикле жизни продукции, с целью оптимизации сети с обратной связью и определения единиц продукции, которую нужно произвести, разобрать, отремонтировать и купить у внешних поставщиков при максимизации прибыли. Исследователи также обратили внимание на вопросы экологии в рамках ЦПСС и предложили полную математическую модель, которая минимизирует затраты, связанные с распределением, обработкой и организацией центров (Thirie (2000)) и одновременно может использоваться при проектировании продукции и логистической сети. Система экологических показателей, включающая в себя выбросы, использование и восстановление энергии, предотвращение утечек и разливов, рассматривается в работе Srivastava (2007). Такие показатели, как коэффициент окупаемости использованной продукции и соответствующие субсидии от государственных организаций на обратную логистику обсуждаются с целью повышения совокупной чистой прибыли за счет цепочки поставок на 21,1% (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, Van Wassenhove (2003)). Такие вопросы, как законодательство, информированность в отношении экологии, порядок утилизации, рекламационный возврат и экономические аспекты обратной логистики также отражены в публикациях (Elwany, Fors, Harraz 2007). Однако Hervani, Helms, and Sarkis (2005) утверждают, что организации сконцентрировались на разработке цепочек поставок продукции, закупках, транспортировке и прибыли и пренебрегают вопросами экологии. В работе Beamon (1999) описывается текущее состояние окружающей среды, исследуются экологические факторы, представлены критерии работы ЗЦП и обсуждаются методы их достижения. В другой работе отмечается, что «озеленение» различных участков цепочки поставок ведет к интегрированной зеленой цепочке поставок, а следовательно, к конкурентоспособности и хорошим экономическим показателям (Rao, Halt 2005). В работе Sarkis (2003) основное внимание уделяется главным компонентам и составляющим управления зелеными цепочками поставок и тому, как они могут служить в качестве основы для структуры принятия решений. Для принятия решений в отношении ЗЦП он предложил использовать динамическую нелинейную модель принятия решений, основанную на анализе сетей (ANP). Meixell, Gargeya (2005) предложили модели поддержки принятия решений, которые можно использовать для принятия решений и которые занимают свою нишу между научной литературой и соответствующими практическими задачами. Для работы с вопросами функционирования интегрированной логистики УЗЦП предложена оптимизационная модель. Многокритериальная задача линейного программирования систематически применяется для оптимизации интегрированной логистики и обратной логистики использованной продукции в УЗЦП. В изучение и практические задачи управления цепочками поставок все чаще требуется встраивать экологически обоснованные альтернативы.

На основе приведенных выше литературных данных можно сделать вывод, что имеется потенциал для исследования и создания цепочки поставок с обратной связью в отношении тостеров, что позволит повторно использовать материалы (сталь, латунь, предохранители, нагревательные элементы и пр.), превращая их в сырье. Кроме того, можно отметить, что существующие модели не учитывают «озеленение» ЦПОС, как это описывается в данной работе, – на основе других видов транспортировки при помощи ZPL в прямой задаче о выборе транспортных маршрутов, в обратной цепи ЦПОС. Цель данной работы – разработать интегрированную многокритериальную модель для многозвенной ЦПОС для оптимизации распределения и минимизации влияния на окружающую среду от транспортировки и сопутствующих процессов. Данная сеть цепочки поставок с обратной связью моделируется на примере тостера для 6 кусков хлеба. Работа отличается от предыдущих тем, что используется минимальное количество транспорта (полная загрузка транспорта в прямой цепочке и малотоннажная отправка в обратной) и рассматривается его влияние на структуру цепочки поставок с обратной связью, в которой продукция производится заново и повторно выходит на основной рынок.

### **3. Постановка задачи и описание модели**

Задача ЦПОС, которая рассматривается в данной работе, – это интегрированная многокритериальная многозвенная задача в прямой/обратной логистической сети. Для ее решения необходимо предпринять больше усилий, чем для решения задач прямой и обратной логистики вместе взятых. Мы рассматриваем поток продукции в сети. Модель учитывает модульную структуру продукции, а каждый компонент продукции имеет соответствующую степень переработки. Например, степень 100% указывает на то, что использованная продукция может быть полностью переработана или преобразована в новую, степень 50% указывает на то, что продукцию можно восстановить лишь частично. В сети поставщики ответственны за поставку компонентов на заводы. Новая продукция передается потребителю посредством распределительных центров (d/c) для удовлетворения их запросов. Возвращаемая от потребителя продукция собирается и оценивается в центрах сбора. После проверки та часть продукции, которую можно отремонтировать или переработать, отправляется на заводы и в пункты разоборудования, соответственно. Затем она удовлетворяет спрос на вторичном рынке продукции. Продукция, которую отправили на ремонт, ремонтируется и поставляется обратно в распределительные центры в качестве новой продукции. Разобранные компоненты, если они подлежат восстановлению, отправляются поставщикам, если нет – на утилизацию.

Для исследований выбрана компания «Electric home appliance», производящая тостеры (г.Дели). Основная задача данной работы – оценить рациональность восстановления компонентов и переработки материалов тостера в конце или после начала срока службы. Чтобы разработать УЗЦП для компании, строим следующую сеть ЦПОС: звенья цепи классифицируются на две группы – звенья прямой цепочки и звенья обратной цепочки использованной продукции. Предлагается четырехслойная цепочка прямых поставок, включая поставку сырья, заводы, распределительные центры и конечного потребителя. Дается определение 5-слойной обратной цепочке поставок использованной продукции, включающей региональные центры сбора, ремонтные центры, пункты разоборудования, которые управляются и эксплуатируются исключительно самой компанией, рынок сбыта и один центр разоборудования, который работает на всех поставщиков, и утилизацию отходов.



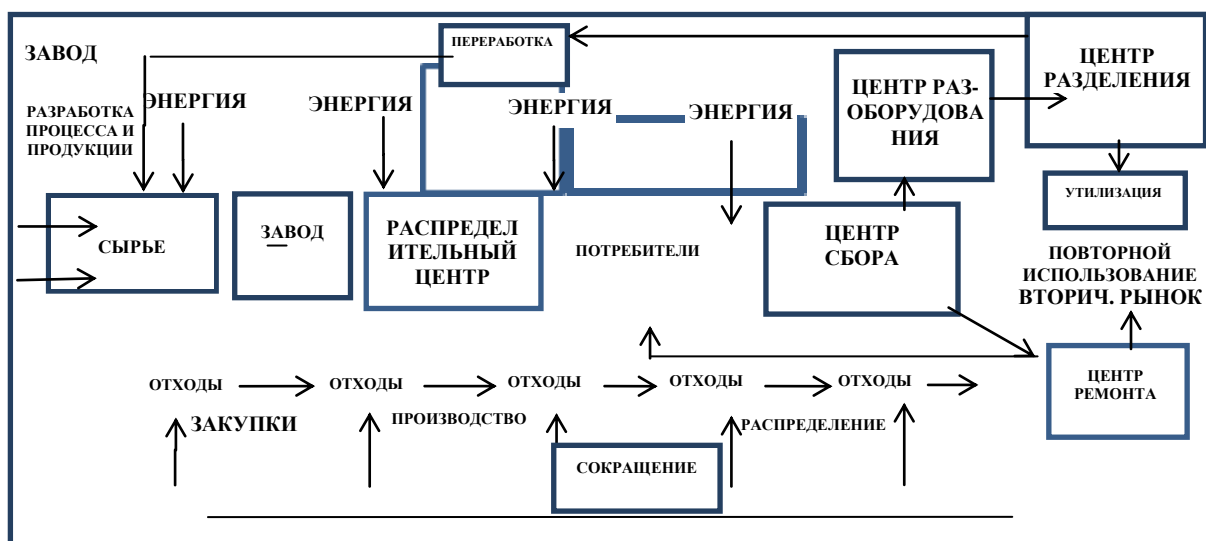


Рис.1. Сеть цепочки поставок с обратной связью

В прямой цепочке поставок, при производстве нового тостера, основная часть сырья поступает от различных поставщиков. Как только тостер произведен, его необходимо доставить до потребителя через распределительные центры. Продукция продается с гарантийным сроком и в случае возникновения проблем в этот период подлежит бесплатному ремонту. После окончания срока службы потребитель возвращает продукт в региональный центр сбора. Использованные тостеры собираются в пунктах сбора и транспортируются в централизованный пункт разбора, где разбираются на детали. Затем эти детали проходят проверку качества и сортируются в зависимости от возможности их отремонтировать или переработать. После проверки компоненты, которые можно использовать повторно, ремонтируются в ремонтных центрах и поступают в продажу, а оставшиеся – перевозятся в центр разбора, где из них извлекают материалы для переработки, а те материалы, которые не подлежат переработке, утилизируются. В прямой цепочке поставок мы считаем, что принимается решение о полной загрузке нанятого грузового транспорта, а в обратной логистике – компания обходится силами своего собственного автопарка. Этапы обратной цепочки являются однозвенными за исключением региональных центров сбора, поэтому транспортировка возвращаемой продукции из множества центров сбора в централизованный пункт разбора моделируется с учетом минимизации расстояния, пройденного транспортом при сборе продукции из разных центров соответствующим образом, при этом удовлетворяются ограничения на объем. Остальные операции, связанные с транспортировкой, выполняются автопарком компании.

Предложенная модель – это многокритериальная задача, связанная с многозвенной ЦПОС отдельного продукта за рассматриваемый период. Мы пытаемся максимизировать доход от продажи законченного продукта и отремонтированных компонентов и прибыль от использования переработанных материалов, минимизировать суммарные издержки, связанные с цепочкой поставок, включая следующие этапы: закупку, производство, распределение, сбор, утилизацию, разбор, переработку и транспортировку. Наконец, последней целью является минимизация числа грузовых автомобилей, задействованных в прямой цепочке поставок, и расстояния, пройденного при транспортировке в обратной логистической цепочке. Ниже приводятся допущения при формулировке модели и обозначена область исследования:



Рис. 2. Схема потоков

Спрос со стороны потребителя является детерминированным, следовательно, дефицита продукции нет.

Расположение поставщиков, распределительных центров, дистрибьюторов, центров разбора, центров повторного распределения известно и постоянно.

Поток может идти только между двумя последовательными этапами. Более того, на одном и том же этапе отсутствуют потоки между центрами.

Показатели стоимости (стоимость материалов, производства, транспортировки, переработки, ремонта, разбора, утилизации) известны для каждого объекта.

Все операции ЦПОС удовлетворяют ограничениям по предельным возможностям.

Суммарная стоимость деталей, полученных после разбора и переработки, меньше, чем стоимость новых деталей.

Централизованный пункт разбора с неограниченными возможностями принадлежит и эксплуатируется самим предприятием.

Материалы, которые не подлежат переработке, отсылаются на утилизацию после некоторой предварительной подготовки. Стоимость этой подготовки включена в стоимость утилизации.

Стоимость выкупа использованной продукции остается постоянной независимо от состояния использованной продукции.

Стоимость транспортировки собранных возвращаемых продуктов из центров сбора оплачивается самой компанией и прямо пропорциональна расстоянию.

Уровень выброса  $\text{CO}_2$  для всех видов транспорта известен.

### Sets:

$S$	индексы, относящиеся к поставщикам компонентов $s, s=1, 2 \dots S$
$P$	индексы, относящиеся к заводам-производителям $p, p=1, 2 \dots P$
$K$	индексы, относящиеся к центрам распределения (d/c) $k, k=1, 2 \dots K$
$E$	индексы, относящиеся к зоне первичного рынка $e, e=1, 2 \dots E$
$C$	индексы, относящиеся к центрам сбора $c, c=1, 2 \dots C$
$M$	индексы, относящиеся к разборудованию $m, m=1, 2 \dots M$
$H$	индексы, относящиеся к зоне вторичного рынка $h, h=1, 2, \dots, H$
$F$	индексы, относящиеся к утилизации $f, f=1, 2, \dots, F$
$A$	индексы, относящиеся к предварительно собранному элементу $a, a=1, 2, \dots, A$
$N$	индексы, относящиеся к узлам сети ( $N = S \cup P \cup K \cup E \cup C \cup M \cup H \cup F$ )

### Параметры:

$SC_{sa}$	Единица стоимость приобретения предварительно собранного элемента $a$ у поставщика $s$
$PC_p$	Стоимость производства единицы продукции на заводе $p$
$OC_k$	Единица стоимость операции с продукцией в распределительном центре $k$
$IC_c$	Стоимость проверки единицы продукции в центре сбора $c$
$RPC_p$	Стоимость ремонта единицы использованной продукции на заводе $p$
$DMC_m$	Стоимость разборудования единицы продукции в центре разборудования $m$
$RCC_{sa}$	Стоимость переработки единичного предварительно собранного элемента $a$ у поставщика $s$
$DPC_{fa}$	Стоимость утилизации предварительно собранного элемента $a$ в центре утилизации $f$
$D_e$	Спрос на продукцию у первого покупателя $e$
$D_h$	Спрос на вторичную продукцию у первого покупателя $h$
$TPC^t$	Стоимость транспортировки единичного продукта или компонента, доставляемого из одного пункта в другой с помощью типа грузового транспорта $t$
$D_{ij}$	Расстояние между двумя любыми узлами $i, j \in N$ для данной сети ЦПОС
$CAP_{sa}$	Возможности поставщика $s$ для предварительно собранного элемента $a$
$PCAP_p$	Производственные мощности завода $p$
$KCAP_k$	Производительность распределительного центра $k$
$CCAP_c$	Производительность центра сбора $c$
$MCAP_m$	Производительность центра разборудования $m$
$FCAP_f$	Возможности утилизационного центра $f$
$RPCAP_p$	Возможности завода по ремонту $p$
$RCCAP_s$	Возможности поставщика по переработке $s$

$PF_a$	Прибыль на единицу продукции, полученная в сети от переработки компонента $a$
$PF$	Прибыль на единицу продукции, полученная в сети от ремонтпригодного продукта
$PR_e$	Цена единицы продукции для покупателя $e$
$PR_h$	Цена единицы продукции для покупателя $h$
$ER^t$	Уровень выбросов газа $CO_2$ на милю от транспорта типа $t \in T$
$Rr$	Коэффициент окупаемости на уровне первых покупателей
$Rc_a$	Степень переработки компонента $a$
$Rp$	Степень ремонтпригодности
$W$	Вес продукции, кг
$W_a$	Вес компонента $a \in A$ в кг
$U_a$	Степень утилизируемости компонента $a \in A$

**Переменные при принятии решения:**

$x_{ija}^t$  Количество компонентов  $a$ , отправляемых из узла  $i$  в узел  $j$ ,  $i, j \in N$  в сети при помощи транспорта типа  $t \in T$

$x_{ij}^t$  Количество продукции, отправляемой из узла  $i$  в узел  $j$ ,  $i, j \in N$  в сети при помощи транспорта типа  $t \in T$

$w_{ij}^t$  Взвешенное количество, транспортируемое из узла  $i$  в узел  $j$ ,  $i, j \in N$  в сети при помощи транспорта типа  $t \in T$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если центр } i, (i \in P \cup K \cup C \cup M) \text{ is открыт} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$L_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{если установлена транспортная связь между любыми двумя точками } i \text{ и } j, i, j \in N \text{ посредством } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

**Модель**

**Максимизировать,  $Z_0 =$**

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t PR_e + \sum_c \sum_h \sum_t x_{ch}^t PR_h + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t PF_a x_{msa}^t + \sum_c \sum_p \sum_t PF x_{cp}^t - \left( \sum_s \sum_p \sum_a \sum_t x_{spa}^t SC_{sa} + \right. \\
 &+ \sum_p \sum_k \sum_t x_{pk}^t PC_p + \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t OC_k + \sum_e \sum_c \sum_t x_{ec}^t IC_c + \sum_c \sum_p \sum_t x_{cp}^t RPC_p + \sum_c \sum_m \sum_t x_{cm}^t DMC_m + \\
 &+ \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t x_{msa}^t RCC_{sa} + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t x_{mfa}^t DPC_f + \sum_s \sum_p \sum_t TPC^t D_{sp} x_{sp}^t + \sum_p \sum_k \sum_t TPC^t D_{pk} x_{pk}^t + \\
 &+ \sum_k \sum_e \sum_t TPC^t D_{ke} x_{ke}^t + \sum_e \sum_c \sum_t TPC^t D_{ec} x_{ec}^t + \sum_c \sum_p \sum_t TPC^t D_{cp} x_{cp}^t + \sum_c \sum_m \sum_t TPC^t D_{cm} x_{cm}^t + \\
 &\left. + \sum_c \sum_h \sum_t TPC^t D_{ch} x_{ch}^t + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t TPC^t D_{ms} x_{msa}^t + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t TPC^t D_{mf} x_{mfa}^t \right)
 \end{aligned}$$

**Минимизировать,  $Z_1 =$**

$$\begin{aligned}
 &= \sum_t ER^t \left( \sum_s \sum_p D_{sp} L_{sp}^t W_{sp}^t + \sum_p \sum_k D_{pk} L_{pk}^t W_{pk}^t + \sum_k \sum_e D_{ke} L_{ke}^t W_{ke}^t + \sum_e \sum_c D_{ec} L_{ec}^t W_{ec}^t + \right. \\
 &\left. + \sum_c \sum_p D_{cp} L_{cp}^t W_{cp}^t + \sum_c \sum_m D_{cm} L_{cm}^t W_{cm}^t + \sum_c \sum_h D_{ch} L_{ch}^t W_{ch}^t + \sum_m \sum_s D_{ms} L_{ms}^t W_{ms}^t + \sum_m \sum_f D_{mf} L_{mf}^t W_{mf}^t \right)
 \end{aligned}$$

**Под воздействием**

**(Ограничения для баланса потоков)**

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t + \sum_c \sum_t x_{cp}^t * U_a = \sum_k \sum_t x_{pk}^t * U_a \quad \forall p, a \quad (1)$$

$$\sum_p \sum_t x_{pk}^t = \sum_k \sum_e x_{ke}^t \quad \forall k \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_e x_{ke}^t \geq D_e \quad \forall e \quad (3)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ec}^t = Rr * D_e \quad \forall e \quad (4)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ch}^t \leq D_h \quad \forall h \quad (5)$$

$$\sum_p \sum_t x_{cp}^t = Rp * \left( \sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (6)$$

$$\sum_m \sum_t x_{cm}^t = (1 - Rp) * \left( \sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (7)$$

$$\sum_s \sum_t x_{msa}^t = Rc_a * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (8)$$

$$\sum_f \sum_t x_{mfa}^t = (1 - Rc_a) * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (9)$$

**Ограничения на производительность/возможности**

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t \leq CAP_{sa} \quad \forall s, a \quad (10)$$

$$\sum_k \sum_t x_{pk}^t \leq PCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (11)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ke}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall e \quad (12)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ec}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall c \quad (13)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cp}^t \leq RPCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (14)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cm}^t \leq MCAP_m * X_m \quad \forall m \quad (15)$$

$$\sum_m \sum_t x_{msa}^t \leq RCCAP_s \quad \forall s, a \quad (16)$$

$$\sum_m \sum_a \sum_t x_{mfa}^t \leq FCAP_s \quad \forall f \quad (17)$$

$$w_{sp}^t = \sum_a x_{spa}^t * w_a \quad \forall s, p, t \quad (18)$$

$$w_{pk}^t = x_{pk}^t * w \quad \forall p, k, t \quad (19)$$

$$w_{ec}^t = x_{ec}^t * w \quad \forall e, c, t \quad (20)$$

$$w_{ke}^t = x_{ke}^t * w \quad \forall k, e, t \quad (21)$$

$$w_{cp}^t = x_{cp}^t * w \quad \forall c, p, t \quad (22)$$

$$w_{ch}^t = x_{ch}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (23)$$

$$w_{cm}^t = x_{cm}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (24)$$

$$w_{ms}^t = \sum_a x_{msa}^t * w_a \quad \forall s, m, t \quad (25)$$

$$w_{mf}^t = \sum_a x_{mfa}^t * w_a \quad \forall m, f, t \quad (26)$$

**Максимальное число ограничений на местоположение**

$$\sum_p X_p \leq P \quad (27)$$

$$\sum_k X_k \leq K \quad (28)$$

$$\sum_c X_c \leq C \quad (29)$$

$$\sum_m X_m \leq M \quad (30)$$

**Ограничения на соединение - перевозку**

$$L_{sp}^t \leq \sum_a x_{spa}^t \quad \forall s, p, t \quad (31)$$

$$L_{pk}^t \leq x_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (32)$$

$$L_{ke}^t \leq x_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (33)$$

$$L_{ec}^t \leq x_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (34)$$

$$L_{cp}^t \leq x_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (35)$$

$$L_{ch}^t \leq x_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (36)$$

$$L_{cm}^t \leq x_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (37)$$

$$L_{ms}^t \leq \sum_a x_{msa}^t \quad \forall s, m, t \quad (38)$$

$$L_{mf}^t \leq \sum_a x_{mfa}^t \quad \forall m, f, t \quad (39)$$

**Ограничения на перевозку - соединение**

$$\sum_a x_{spa}^t \leq MI * L_{sp}^t \quad \forall s, p, t \quad (40)$$

$$x_{pk}^t \leq MI * L_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (41)$$

$$x_{ke}^t \leq MI * L_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (42)$$

$$x_{ec}^t \leq MI * L_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (43)$$

$$x_{cp}^t \leq MI * L_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (44)$$

$$x_{cm}^t \leq MI * L_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (45)$$

$$x_{ch}^t \leq MI * L_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (46)$$

$$\sum_a x_{msa}^t \leq MI * L_{ms}^t \quad \forall s, m, t \quad (47)$$

$$\sum_a x_{mfa}^t \leq MI * L_{mf}^t \quad \forall m, f, t \quad (48)$$

$$x_{ija}^t, x_{ij}^t \geq 0$$

$$X_i, L_{ij}^t \in \{0,1\}$$

Первая цель – максимизировать общую прибыль, включая общий доход и прибыль, полученные введением переработанных материалов обратно в (прямую) цепочку поставок (для компаний это выступает в качестве стимула к закупке и использованию материалов, пригодных для вторичной переработки), минус суммарная стоимость, включающая в себя стоимость закупки компонентов у поставщиков, стоимость производства на заводах, стоимость услуг распределительных центров, стоимость оценки возвращаемой продукции в центрах сбора, стоимость повторного производства на заводах, стоимость разоборудования, стоимость переработки у поставщика и стоимость утилизации забракованной продукции. Вторая цель – минимизировать выбросы CO<sub>2</sub> за счет выбора различных доступных видов транспорта.

Ограничения подразделяются на пять групп: первая группа состоит из ограничений, уравнивающих потоки. Ограничение (1) обеспечивает равенство потоков на входе и выходе завода-производителя. Ограничение (2) накладывается на распределительный центр. Ограничение (3) обеспечивает удовлетворение всех потребностей первых покупателей. За счет ограничения (4) поток на входе в центр сбора через покупателя равен покупательскому спросу, умноженному на коэффициент окупаемости. Благодаря ограничению (5) поток к каждому второму покупателю из всех центров сбора не превышает спрос второго покупателя. В соответствии с ограничениями (6) и (7) поток, выходящий из каждого центра сбора ко всем заводам и пунктам разоборудования, равен количеству, остающемуся в каждом центре сбора после удовлетворения спроса второго покупателя, умноженному на коэффициент ремонтпригодности и (1- коэффициент ремонтпригодности), соответственно. Ограничения (8) и (9) показывают, что поток, выходящий из каждого центра разоборудования к поставщику и месту утилизации, равен потоку от всех центров сбора, умноженному на коэффициент переработки и (1- коэффициент переработки), соответственно. Ограничения (10)-(17) гарантируют, что поток на входе или выходе из любого пункта не превышает соответствующие возможности этого пункта. Ограничения (27)-(30) ограничивают число активируемых пунктов, в которых сумма переменных альтернативного решения, указывающая на число активируемых пунктов, меньше максимального предела активируемых пунктов. Ограничения (31)-(39) обеспечивают отсутствие связей между любыми пунктами без актуальных перевозок во все периоды времени. Ограничения (40)-(48) обеспечивают отсутствие перевозок между любыми несвязанными пунктами.

#### 4. Многокритериальная методология: целевое программирование

Суть целевого программирования заключается в постановке особого целевого численного значения для каждой цели, в формулировке целевой функции для каждой цели, а затем – в поиске решения, которое бы минимизировало одновременно и положительное и отрицательное отклонения от заданных значений или минимизировало бы возможное отклонение каждого целевого значения. Для целевых значений существует *иерархия приоритетных уровней*, так что первоочередные целевые значения рассматриваются в первую очередь, а вторичные – после них. И так далее.

Обобщенная модель целевого программирования:  $\min a = \left\{ g_1(\bar{\eta}_1, \bar{\rho}_1), \dots, g_k(\bar{\eta}_2, \bar{\rho}_2) \right\}$

$$s.t. \quad f_i(\bar{x}) + \eta_i - \rho_i = b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\rho} \geq 0;$$

$x_j$  – это  $j$ -я переменная решения,  $a$  – функция достижения; мера вектора-строки достижения целей или ограничений на каждом уровне приоритета,  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  – функция (обычно линейная) переменных отклонения, связанных с целями или ограничениями на уровне приоритета  $k$ ,  $K$  – общее количество уровней приоритета в модели,  $b_i$  – постоянная в правой части для целевого значения (или ограничения)  $i$ ,  $f_i(\bar{x})$  – левая часть линейного целевого значения или ограничения  $i$ .

Мы стремимся минимизировать недостижение этого целевого значения или ограничения за счет минимизации переменных отклонения. Переменные отклонения на каждом уровне приоритета включены в функцию  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  и упорядочены в векторе достижений в соответствии со своей значимостью. Алгоритм последовательного целевого программирования:

**Шаг 1:** Пусть  $k=1$  ( $k$  – уровень приоритета,  $K$  – их общее значение).

**Шаг 2:** Запишем математическую формулировку, как показано выше, при помощи положительных и отрицательных отклонений только для уровня приоритета  $k$ .

**Шаг 3:** Решим задачу с одним критерием, связанную с уровнем приоритета  $k$ . Оптимальное решение для  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$  – это  $a^*$ .

**Шаг 4:** Пусть  $k = k + 1$ . Если  $k > K$ , переходим к Шагу 7.

**Шаг 5:** Запишем эквивалентную однокритериальную модель для следующего уровня приоритета (уровня  $k$ ) с дополнительным ограничением  $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho}) = a_s^*$ .

**Шаг 6:** Переходим к Шагу 3.

**Шаг 7:** Вектор решения  $x^*$ , связанный с последней решенной моделью с одним критерием, – это оптимальный вектор для исходной модели целевого программирования.

## 5. Численный пример

В данном разделе представлен численный пример с целью показать применимость модели. В рассматриваемой ЦПОС продукция состоит из шести компонентов.

**Таблица 1.** Данные для различных коэффициентов

Компоненты	1	2	3	4	5	6
Коэффициент использования	1	4	1	2	1	3
Степень переработки	1	0.5	7.5	1	0.3	0

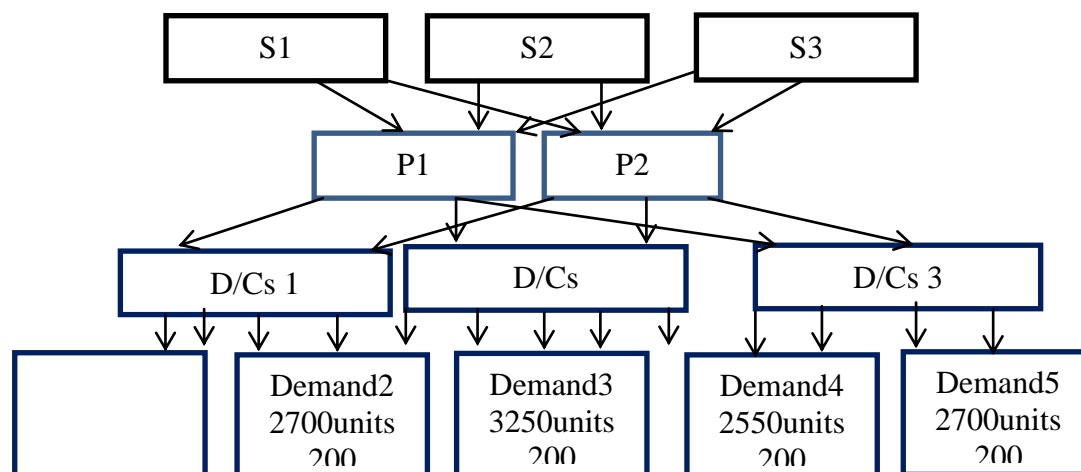




Рис. 3. Диаграмма прямого потока в компании

1, 2, 3, 4, 5 и 6 с соответствующим коэффициентом использования 1, 4, 1, 2, 1, и 3, и степень переработки потоков 1, 0.5, 7.5, 1, 0.3 и 0 между различными пунктами. В прямом направлении имеется 3 поставщика, которые продают компоненты двум потенциальным заводам-производителям. В сети имеется три потенциальных пункта распределения для обслуживания потребностей в 2000, 2700, 3250, 2550 и 2700 единицах из соответствующих 5 зон рынка первых покупателей при цене реализации на единицу 11000, 10500, 10000, 10750, и 10500. В обратном направлении потенциальное расположение центров сбора, разборудования и утилизации – это 3, 2 и 1, соответственно. Кроме того, потребность в 500, 350 и 550 единицах продукции из соответствующих трех зон второго покупателя можно удовлетворить при цене реализации на единицу продукции 7500, 8000 и 7000. Что касается транспортировки, то операции доставки выполняются при помощи грузового автомобильного транспорта, при этом доступны три типа грузовиков, возраст которых составляет 0-3, 4-7 и 8-11 лет, соответственно. Мы считаем, что более старые грузовые автомобили характеризуются не только меньшей стоимостью аренды, но и одновременно большими выбросами  $\text{CO}_2$  за счет меньшего КПД двигателя. Стоимость транспортировки единицы продукции для различных типов используемых грузовых автомобилей составляет 1, 0.85, 0.70 для типов грузовиков 1, 2 и 3, соответственно. Уровень выбросов  $\text{CO}_2$  составил 1.3, 2.8 и 3.1 г/миля для типов грузовиков 1, 2 и 3, соответственно. Повышение прибыли в сети за счет ремонта продукции составляет 5500/ед, за счет переработки единичного компонента 1, 2, 3, 4 и 5 – 250, 50, 90, 55 и 300, соответственно.

Таблица 2. Информация, связанная с транспортировкой

Типы грузовых автомобилей	Срок эксплуатации	Стоимость транспортировки единицы продукции	Уровень выбросов $\text{CO}_2$
1	0-3	1	1.3 г/миля
2	4-7	0.875	2.8 г/миля
3	8-11	0.70	3.1 г/миля

Другие параметры берутся в следующем виде:  $Rr = 0.60$ ,  $Rp = 0.25$  и  $Rc_a = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$ . Стоимость закупки единичного компонента у поставщика 1, 2 и 3 составляет (460, 0, 190, 125, 0, 80), (480, 120, 200, 150, 650, 100) и (470, 95, 0, 0, 620, 90), соответственно. Стоимость переработки компонентов у поставщика 1, 2, и 3 составляет (20, 0, 60, 10, 0, 0), (25, 90, 55, 20, 390, 0) и (0, 65, 0, 0, 380, 0), соответственно. Стоимость 0 означает, что обслуживание компонента соответствующим поставщиком не выполняется. 2500 и 3000 – стоимость производства единицы продукции, 1500 и 2200 – стоимость ремонта единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно. Стоимость работы с единицей продукции в распределительном центре 1, 2 и 3 составляет 500, 550 и 600, соответственно. Стоимость проверки единицы продукции в центрах сбора 1, 2 и 3 составляет 100, 100 и 120, соответственно. Стоимость разборудования единицы продукции в центре разборудования 1 и 2 составляет 125 и 110, соответственно. Стоимость утилизации единицы продукции компонента 6 составляет 15.

### Параметры

-  $Rr=0.60$ ,  $Rp=0.25$  и  $Rc_a=(1,1,1,1,1,0)$ .

- Стоимость 0 означает, что обслуживание компонента соответствующим поставщиком не выполняется.

- Стоимость производства единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно: 2500 и 3000.
- Стоимость ремонта единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно: 1500 и 2200.
- Стоимость разоборудования единицы продукции в центре разоборудования 1 и 2, соответственно: 125 и 110.
- Стоимость утилизации единичного компонента 6 составляет 15.
- Стоимость работы с единицей продукции в распределительном центре 1, 2 и 3, соответственно: 500, 550 и 600.
- Стоимость проверки единицы продукции в центрах сбора 1, 2 и 3, соответственно: 100, 100 и 120.

**Таблица 3: стоимость, участвующая в потоке**

Поста щик	Единичная стоимость закупки компонентов	Единичная стоимость переработки компонентов	Стоимость работы с единицей продукции в распределитель- ном центре	Стоимость проверки единицы продукции
1	(460, 0, 190, 125, 0, 80)	(20, 0, 60, 10, 0, 0),	500	100
2	(480, 120, 200, 150, 650, 100)	(25, 90, 55, 20, 390, 0)	550	100
3	(470, 95, 0, 0, 620, 90)	(0, 65, 0, 0, 380, 0)	600	120

Данные о возможностях различных объектов: поставщик 1 может поставить максимум 8000, 0, 9000, 12000, 0 и 14000 единичных компонентов 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответственно. Возможности поставщиков 2 и 3: (7500, 40000, 5000, 27000, 7700, 15000) и (0, 20000, 0, 0, 7500, 1400), соответственно. Возможности переработки в пунктах 1, 2 и 3: (3000, 0, 2900, 4000, 0, 0), (2000, 15000, 2000, 6000, 2500, 0) и (0, 8000, 0, 0, 2500, 0), соответственно. Производственные возможности заводов: 8000, 7500, соответственно. Возможности выполнения ремонта: 2000, 1800, соответственно. Возможности центров распределения: 4800, 5000 и 5500, центров сбора: 3500, 3000 и 2500; центров разоборудования: 5000, 5000, пункта утилизации: 250000.

Данные о расстоянии (в милях) между двумя любыми объектами:

$$D_{ij} = \{D_{11}, D_{12}, D_{13}, \dots, D_{21}, D_{22}, D_{23}, \dots\}$$

$$D_{sp} = \{200, 190, 310, 350, 290, 280\}, D_{pk} = \{120, 100, 135, 170, 190, 200\},$$

$$D_{ke} = \{24, 17, 22, 21, 18, 29, 19, 21, 20, 31, 33, 25, 28, 15, 28\},$$

$$D_{ec} = \{6, 9, 8, 8.5, 7, 10, 11, 12, 13, 9, 8, 9.5, 11, 9, 8\}, D_{cp} = \{150, 120, 135, 110, 130, 100\}$$

$$D_{cm} = \{8.5, 9, 11, 12, 10, 11\}, D_{ch} = \{15, 21, 19, 24, 16, 18, 20, 22, 21\}$$

$$D_{ms} = \{100, 150, 120, 95, 154, 130\}, D_{mf} = \{80, 75\}$$

Представленные выше данные применялись для проверки предложенной модели. Разработан и с помощью LINGO11.0 [20] решен LINGO код для генерации предложенных математических моделей рассматриваемых данных. Задача решается индивидуально, причем каждое целевое значение имеет заданный набор ограничений. Таким образом, прибыль и размер выбросов CO<sub>2</sub> будут 66625630 и 252121600, соответственно. Они считаются желаемыми значениями функций прибыли и выбросов. Затем решается задача многокритериального программирования, сочетающая в себе все целевые значения и отдельные желаемые значения, откуда получается недопустимое решение, т.к.

использована методика целевого программирования, с помощью которой получено компромиссное решение задачи. Если ввести весовые коэффициенты 0.5 и 0.5 для прибыли и CO<sub>2</sub>, соответственно, получается компромиссное решение для распределения объектов и средств транспорта. Тогда суммарная прибыль в сети Rs. 55454580, объем выбросов CO<sub>2</sub> составляет 10681.55. Поток между объектами при использовании разных типов транспортных средств приведен ниже.

$$\begin{aligned}
 x_{spa}^t : x_{111}^2 &= 2499, x_{113}^2 = 3499, x_{114}^2 = 10002, x_{116}^2 = 14000, x_{121}^1 = 5501, x_{123}^1 = 5501, x_{124}^1 = 1998, x_{211}^2 = 3570, x_{212}^2 = 4552, \\
 x_{213}^2 &= 2570, x_{214}^2 = 2136, x_{222}^1 = 21728, x_{224}^1 = 4202, x_{224}^3 = 4802, x_{225}^1 = 4070, x_{226}^3 = 15000, x_{312}^2 = 19724, x_{315}^2 = 6069, \\
 x_{316}^2 &= 4207, x_{322}^1 = 276, x_{325}^3 = 1431, x_{326}^1 = 1503 \\
 x_{pk}^t : x_{11}^2 &= 4800, x_{12}^3 = 2900, x_{23}^3 = 5500 \\
 x_{ke}^t : x_{13}^1 &= 2100, x_{15}^1 = 2700, x_{21}^1 = 2000, x_{23}^1 = 900, x_{32}^3 = 2700, x_{33}^3 = 250, x_{34}^3 = 2550 \\
 x_{ec}^t : x_{11}^3 &= 1200, x_{22}^1 = 1620, x_{33}^3 = 1950, x_{41}^3 = 150, x_{42}^1 = 1380, x_{51}^1 = 1070, x_{53}^3 = 550 \\
 x_{cp}^t : x_{11}^1 &= 255, x_{21}^1 = 750, x_{31}^2 = 625 \\
 x_{cm}^t : x_{11}^3 &= 765, x_{21}^3 = 2250, x_{31}^1 = 1875 \\
 x_{ch}^t : x_{11}^2 &= 500, x_{12}^2 = 350, x_{13}^2 = 550 \\
 x_{msa}^t : x_{111}^1 &= 2890, x_{113}^3 = 2890, x_{114}^3 = 3780, x_{121}^3 = 2000, x_{122}^3 = 11560, x_{123}^3 = 2000, x_{124}^3 = 6000, x_{125}^3 = 2390, x_{132}^3 = 8000, \\
 x_{135}^3 &= 2500 \\
 x_{mfa}^t : x_{116}^3 &= 14670
 \end{aligned}$$

## 6. Заключение, выводы с точки зрения управления, перспективы исследования

В области управления цепочками поставок (УЦП) чрезвычайно важно разработать сетевую структуру цепочки поставок. Кроме того, в связи с глобальным потеплением в последнее время особое внимание уделяется логистике обратного потока продукции в УЦП. Задача моделирования структуры ЦПСС может оказаться чрезвычайно трудной задачей, т.к. в модель необходимо вводить множество компонентов. В данной работе исследованы компромиссные сочетания эксплуатационных и экологических параметров при транспортировке продукции. В связи с глобальным потеплением авторы сосредоточились на выбросах CO<sub>2</sub>. Один из основных результатов работы состоит в том, что, как было установлено, расходы по устранению негативных экологических последствий все еще не настолько очевидны в сравнении с эксплуатационными расходами, если рассматривать их значимость как функцию уровня выбросов. Стоимость затрат на работы с продукцией в прямом и обратном направлении поставок преобладает по сравнению с расходами на поддержку требуемого экологического уровня. Другой интересный результат связан с продвижением продукции, подлежащей повторному использованию. Она снижает операционные расходы в цепочке, но повышает экологическую нагрузку. При помощи данной работы мы хотели бы выделить ключевые идеи и методики, которые могут помочь компаниям решить вопросы транспортировки продукции и при этом даже улучшить ситуацию с выбросами CO<sub>2</sub> и затратами. Область исследования была существенно ограничена, но ее можно легко расширить и учесть гибкий спрос. Кроме того, затронутую область можно расширить и за счет включения других регионов, т.к. мы исследовали только Дели и национальный столичный регион. Мы рекомендовали применение моторики с целью снижения вредного воздействия на окружающую среду и повышения

эффективности затрат. Однако моторикши доступны не во всех регионах Индии. Мы рекомендуем провести дальнейшие исследования области применения и выгоды использования моторикш-грузовиков на больших расстояниях в коммерческих целях.

### Литература

1. Saman H. Amin, Guoqing Zhang, (2012), Proposed mathematical model for closed-loop network configuration based on product life cycle, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58, 5-8, 791-801.
2. N. Aras, T. Boyaci, V. Verter, (2010), Designing the reverse logistics network. In: in Ferguson, M.E., Souza, G.C. (Eds.), *Closed-loop Supply Chains: New Developments to Improve the Sustainability of Business Practices*, CRC Press, Taylor & Francis, Boca Raton, 67–97.
3. B.M. Beamen, (2008), Sustainability and the future of supply chain management. *Operations and Supply Chain Management* 1(1), 4–18.
4. B. Beamen, (1999), Designing the green supply chain. *Logistics Information Management*, 12(4), 332–342.
5. F. T. S. Chan, H. K. Chan, J. Zhang, (2006), “Reverse Logistics Model for Mobile Phone Industry”, *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, SOLI'2006*, 294-299.
6. M. Ciupek, C. Franke, G. Seliger, (2003) “Simultaneous Design of a Disassembly Network and its Facilities”, in *Proceedings of the International Conference on Computer Integrated Manufacturing-Advanced Design and Management*, Wisla, Poland.
7. M. P. De Brito, S. D. P. Flapper, R. Dekker, (2003) “Reverse Logistics: a review of case studies”, *ERIM Report Series Reference No. ERS-2003-012-LIS*
8. M. Fleischmann, P. Beullens, J.M. Bloemhof-Ruwaard, and L.N. Van Wassenhove, (2001), “The impact of product recovery on logistics network design”, *Production and operations Management*, 10, (2), 156–173.
9. D. Francas, S. Minner, (2009) Manufacturing network configuration in supply chains with product recovery. *Omega* 37(4), 757–769.
10. M.M. Helm, and A.A. Harvani, (2006) Reverse logistics for recycling: Challenges facing the carpet industry. In J. Sarkis (Ed.), *Greening the supply chain*, 117–135, London: Springer-Verlag
11. A.A. Hervani, M.M. Helms, J. Sarkis, (2005), Performance measurement for green supply chain management, *Benchmarking: An International Journal* 12 (4), 330–353 (2005)
12. W. Hoffman, (2007), Who’s carbon-free? Wal-Mart takes on supply chains of products as expansive carbon measuring plan eyes distribution. *Traffic World* 271 (42), 15–20.
13. V. Jayaraman, V.D.R. Guide Jr., R. Srivastava, (1999), A closed-loop logistics model for remanufacturing, *Journal of the Operational Research Society* 50 (5), 497–508.
14. JE, Lee; M. Gen, Rhee KG (2009), Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. *Comput Ind Eng* 56(3), 951–964.
15. G. Kannan, P. Sasikumar, K. Devika, (2010), A genetic algorithm approach for solving a closed loop supply chain model: a case of battery recycling. *Applied Mathematical Modelling* 34 (3), 655–670 (2010).
16. K. Kim, I. Song, J. Kim, B. Jeong (2006), Supply planning model for remanufacturing system in reverse logistics environment. *Comput Ind Eng* 51(2), 279–287.
17. A. Klose, M.G. Speranza, and L. van Wassenhove (Eds.), *Quantitative approaches to distribution logistics and supply chain management*, 47–60. [https://www.informs.org/content/.../Lei\\_Zhong\\_Chaovalitwongse.pdf](https://www.informs.org/content/.../Lei_Zhong_Chaovalitwongse.pdf)

18. H. Krikke, J. Bloemhof-Ruwaard, L.V. Wassenhove, (2003), Concurrent product and closed-loop supply chain design with an application to refrigerators, *International Journal of Production Research* 41(16), 3689–3719.
19. D.H. Lee, M. Dong, (2008), A heuristic approach to logistics network design for end-of-lease computer products recovery, *Transportation Research Part E* 44: 455–474.
20. M.J. Meixell, V.B. Gargeya, (2005), Global supply chain design: a literature review and critique. *Transportation Research Part E* 41 (6), 531–550.
21. A. Mutha, S. Pokharel (2009), Strategic network design for reverse logistics and remanufacturing using new and old product modules, *ComputIndEng* 56(1) 334–346.
22. M. Pagell, C.L. Yang, D.W. Krumwiede, C. Sheu, (2004) Does the competitive environment influence the efficacy of investment in environmental management? *Journal of Supply Chain Management*, 40 (3): 30–39.
23. R.K. Pati, P. Vrat, P. Kumar, (2008), A goal programming model for paper recycling system. *Omega* 36(3), 405–417.
24. Maja I. Piecyk, and Alan C. McKinnon (2010), Forecasting the carbon footprint of road freight transport in 2020, *International Journal of Production Economics*, 2010, 128, 1, 31–42.
25. M.S. Pishvaei, R.Z. Farahani, W. Dullaert (2010), Amemetic algorithm for bi-objective integrated forward/reverse logistics network design. *ComputOper Res* 37(6):1100–1112.
26. Purbaand Rao, Diane Holt (2005) “Do green supply chains lead to competitiveness and economic performance?”, *International Journal of Operations & Production Management*, 25, 9, 898 – 916.
27. D. Rogers, T. Lembke, (1999), *Going backwards: Reverse Logistics Trends and Practices*. Reno, NV: Center for Logistics Manage, Univ. Nevada.
28. Z.M. Shen, (2007), Integrated supply chain design models: a survey and future research directions. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(1), 1–27.
29. M. Salema, A. P’ovoa, and A. Novais, (2009) “A strategic and tactical model for closed-loop supply chains,” *OR spectrum*, 31, 3, pp. 573–599.
30. J. Sarkis, (2003), A strategic decision framework for green supply chain management, *Journal of Cleaner Production*, 11 (4), 397–409
31. R. Schleiffer, J. Wollenweber, H.J. Sebastian, (2004), Application of Genetic Algorithms for the Design of Large-Scale Reverse Logistic Networks in Europe’s Automotive Industry”, *Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences*.
32. F. Schultmann, M. Zumkeller, O. Rentz, (2006), “Modeling reverse logistic tasks within closed-loopsupply chains: An example from the automotiveindustry”, *European Journal of Operational Research*, 171, ( 3), 1033–1050.
33. J.B. Sheu, Y.H. Chou, C. Hu, (2005) An integrated logistic operational model for green supply chain management, *Transportation Research Part E* 41 (4), 287– 313 (2005).
34. T. Spengler, W. Stolting, M. Ploog, (2004), Recovery planning in closed loopsupply chain: An activity analysis based approach. In H. Dyckhoff, R. Lackes, & J. Reese (Eds.), *Supply chain management and reverse logistics* (pp. 61–89). Berlin: Springer-Verlag
35. S.K. Srivastava, (2008) Network design for reverse logistics, *Omega* 36(4), 535–548.
36. S.K. Srivastava, (2007) Green supply-chain management: a state-of-the-art literature review. *International Journal of Management Reviews* 9 (1), 53–80.
37. M. Thierry, M. Salomon, J.V. Nunen, L.V. Wassenhove, (1995), Strategic issues in product recovery management, *California Management Review*, 37(2), 114–135.
38. H. Thiriez, (2000) OR software LINGO, *European Journal of Operational Research*, 12: 655–656, (2000).
39. W. Ulaga, A. Eggert, (2006), Value-based differentiation in business relationships: gaining and sustaining key supplier status. *Journal of Marketing* 70 (1), 119–136.

40. S. Verstrepen, F. Cruijssen, M.P. De Brito, and Dullaert, W (2007) An exploratory analysis of reverse logistics in Flanders. *European Journal of Transport and Infrastructure Research* 7(4):301–316.
41. S.M. Wagner, C. Bode, (2008), An empirical examination of supply chain performance along several dimensions of risk, *Journal of Business Logistics*, 29 (1), 307–325.
42. H.F. Wang, Hsin-Wei Hsu (2010), A closed-loop logistic model with a spanning-tree based genetic algorithm. *ComputOper Res* 37 (2), 376–389.
43. H. C. Zhang, T.C. Kuo, H. Lu, and S.H. Huang, (1997). Environmentally conscious design and manufacturing: A state of the art survey. *Journal of Manufacturing Systems*, 16, 352–371.
44. Q. Zhu, J. Sarkis, K. Lai (2008) Green supply chain management implications for closing the loop. *Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review* 44(1), 1–18. [http://www.unep.fr/shared/docs/review/vol25no3-4/I&E25\\_34.pdf](http://www.unep.fr/shared/docs/review/vol25no3-4/I&E25_34.pdf)

**Садия Самар Али**, Др., ассистент профессора, координатор проекта (Институт международного бизнеса). Область научных интересов: «зеленые цепочки» поставок, проблемы экологии, управление с обратной связью, логистика, устойчивый бизнес.

## **Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization**

**A.G. Grappone**

Rome Second University – Tivoli Didactic Pole  
via Carlo Dossi, 87 – 00137 Roma

This paper proposes abstraction processes as self-organizations of pre-frontal areas neurons. To prove it holon theory is applied to cortex histology by using cerebellum data integration system as base model and by analyzing equalities and differences in involved Brodman's areas. A brief study of found correlations between distinct mind performances and distinct Brodman's areas involvement completes previous data, particularly, the relations between the frontal lobe, pre-frontal areas mainly, and the so-called divergent thinking. But the fundamental data that permit the comprehension of brain abstraction processes are the starts of distinct thalamic output ways: ovular for thalamus-parietal ways and laminar for frontal ways, with suggestion of a perceptive parietal organization that is distinct as regards of a perceptive frontal organization. In analogy with binocular vision that gives the vision depth we can think that a bi-perceptive organization gives a depth too that may be the abstraction whose geometric representation is similar to graphic perspective that, in fact, represents also the vision depth in pictures. To strengthen this hypothesis, frontal-parietal brain interlinks are analyzed, after, correlations between frontal lobe and problem solving. This data and the individual constant uselessness in standard mathematical logic permit to propose a neurophysiologic model of abstraction.

*Key words:* abstraction; brain; frontal lobe; holon; neurology; neurosciences; complex systems

### **1. Preliminaries**

#### **1.1. Holons**

A "holon" (Greek: *'ολον*, *holon* neuter form of *'ολος*, *holos* "whole") is everything that is simultaneously a whole and a part [1]. Arthur Koestler introduced this concept for two observations:

***the self-organization speed of any complex system increases if there are stable intermediate forms present in that self-organizing process (cf. Herbert Simon's parable of the two watchmakers);***

***even though it is easy to identify sub-wholes or parts, wholes and parts in an absolute sense do not exist anywhere.***

Koestler affirms that holons handle contingencies autonomously but they are also subject to control of some higher authorities. Thus he introduces the concept of "*holarchy*", i.e. a hierarchy of holons that are contemporary manager of their parts, managed by higher levels and in coordination with their environment.

Holons give a best representation of systems that have got an evolving self-organizing dissipative structure of other holons, each of which has got a balance point between chaos and order.

Finally, Koestler defines a holarchy as a hierarchy of self-regulating holons that function first as autonomous wholes in supra-ordination to their parts, secondly as a dependent parts in subordination to controls on higher levels, and thirdly in coordination with their local environment.

Usually the following types of holons are described:

***individual holon:*** it has got a dominant monad (a definable "*I-ness*"). It is discrete, self-contained and has self-directed behavior. It is made up of parts that move themselves together when holons perform their agency;

**social holon**: it hasn't a dominant monad, only a definable "we-ness". It is made up of individual holons. It possesses a "nexus agency": e.g., a bee is an individual holon, a swarm is a social holon;

**artifact**: anything is created by individual or social holons. To include individuals and social holons in a comprehensive scheme that includes in their potential the ability to replicate aspects and profoundly affect them (via, so to say, interpretation) Ken Wilber has introduced this holon type [2]. Artifacts have not to feature agency, self-maintenance, *I-ness*, self-transcendence of the previous two holons in their standard definition but artificial intelligence has softened these differences. Finally, artifacts can be made up of individual or social holons (i.e. a house is made up of atoms).

**heap**: anything holon collection that is completely random, i.e. with no organizational significance; e.g. a collection of heterogeneous names is a heap. The difference between heaps and artifacts consists respectively in the absence or presence of intentionality in the genesis of such a holon.

A very explicative example of program construction scheme by holons has been given in Ulieru (2002). We report it in the following figure [3]:

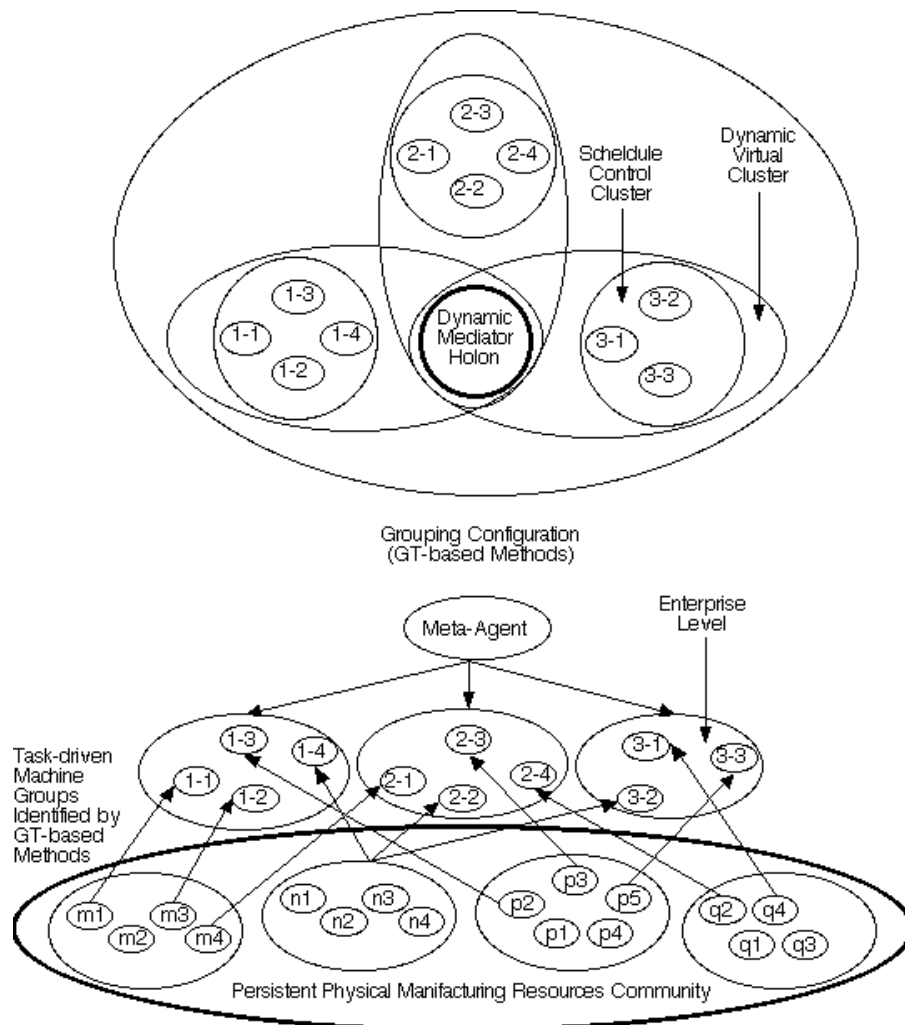


Fig. 1.

From Grobbelaar and Ulieru (2006) by kind permission of the publishers.



## 1.2. Brief dictionary on holons

- **Adaptive risk number** Risk as leaving %, comparing the priority ratio of the holon to the *leaving ratios* of holons in the same *holarchic* cluster (*cf. below for definitions*).
- **Holarchic context** Any information that can be used to characterize the situation of an entity. An entity is a person, place or object that is considered relevant to the interaction between a user and an application, including the user and application themselves.
- **Holarchy** Hierarchy of holons.
- **Holon** It is a system (or phenomenon) that is a whole in itself as well as a part of a larger system. It can be conceived as a set of systems nested within each other. Every system can be considered as a holon, from a subatomic particle to the universe as a whole. On a non-physical level – **words, ideas, sounds, emotions**, everything that can be identified – is simultaneously part of something, and can be viewed as having parts of its own, similar to sign in regard of semiotics. Since a holon is embedded in larger wholes, it is influenced by and influences these larger wholes. And since a holon also contains subsystems, or parts, it is similarly influenced by and influences these parts. Information flows bidirectionally between smaller and larger systems, as well as rhizomatic contagion.
- **Intended goal** A goal which increases a holon's autonomy, and hence increases its ability to group freely with other holons on its level. It is associated to high priority. An intended goal may sometimes coincide with a user's goal or a holarchic goal imposed from the higher levels.
- **Leaving ratio** The priority ratio of a holon at a time of leaving the holarchy.
- **Prediction** It is a representation of particular future event.
- **Priority ratio** The ratio(s) of *Intended goal priority(s)/Imposed goal priority(s)*.
- **Stigmergic holarchy** A system of holons which belong to a holarchy and have stigmergic properties (*cf. below*) and where user needs are translated into context to become either *intended or imposed goals*.
- **Stigmergy** Method of communication in a system in which the individual parts of the system communicate with one another by modifying their local environment.

## 1.3. Data integration in cerebral cortex

Observe this very simplified schema of cerebellum cortex:

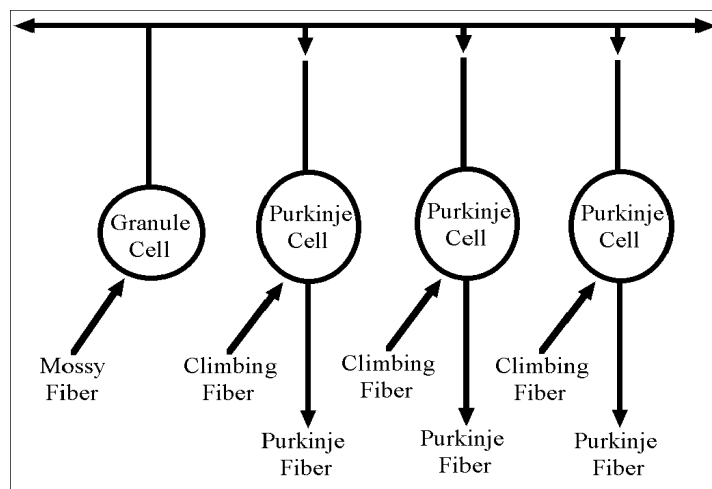


Fig. 2.

This is a simple example of two data integration in the brain without information loss: we have a one-to-one correspondence between every couple {mossy fiber, climbing fiber} with a given Purkinje fiber that, in this way, transports either the whole information of its corresponding mossy fiber or the whole information of its corresponding climbing fiber.

Observe that such an information sum is possible by the multiple horizontal connections of the granule cells.

Consider now scheme of cerebral cortex:

This scheme permits us to suppose a most basic data integration very roughly similar, at least of complex holarchies determined by columns, to cerebellum two data integration where layers I, II, III integrate data as cerebellum granule cells, layer IV get external data as the terminals of mossy and climbing fibers, layer V, VI send data away as Purkinje cells.

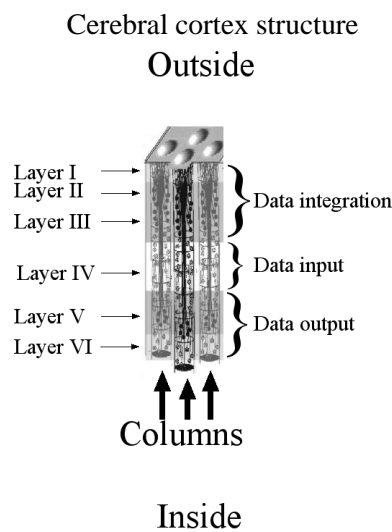


Fig. 3.

As cerebral cortex has to be divided by Brodmann in numbered histologically homogeneous areas, cortex layer analysis permits us to evaluate very roughly the specific function of such areas. Consider Brodmann's mapping as in Fig. 4:

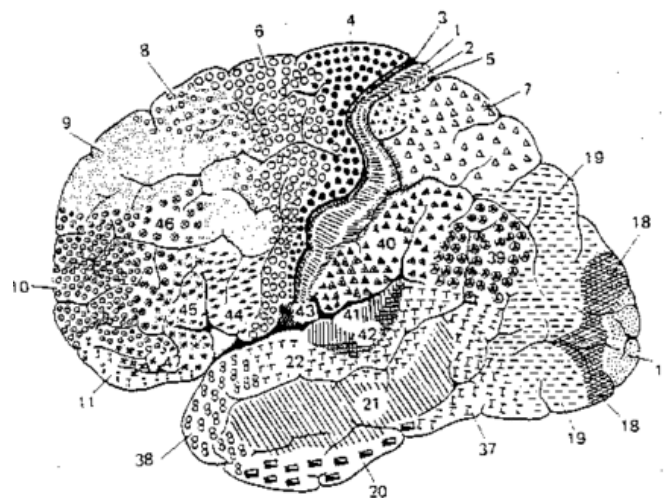


Fig. 4.

Consider histology of some Brodmann's areas as in Fig. 5:

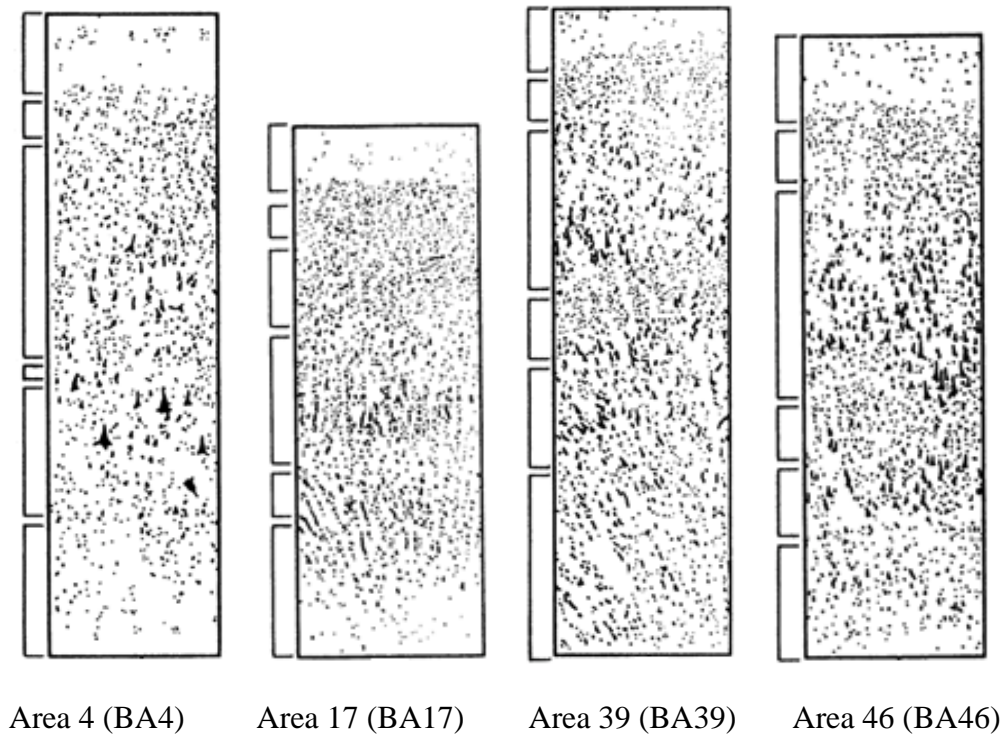


Fig. 5.

Observe the development of the integration data layers I, II, III in frontal cortex (either prefrontal association cortex (area 46) or primary motor cortex (area 4)) that decrease in the parietal association cortex (area 39) and more in the primary visual cortex (area 17). The input data layer IV is obviously maximal in a sensorial cortex as the primary visual cortex, minimal in the primary motor cortex, intermediate in association cortex (either parietal or prefrontal). The output data layers V, VI are obviously very developed in primary motor cortex but also in parietal association cortex.

A cortical column, also called hypercolumn or sometimes cortical module, [4] is a group of neurons in the brain cortex which can be successively penetrated by a probe inserted perpendicularly to the cortical surface, and which have nearly identical receptive fields. Neurons within a minicolumn encode similar features, whereas a hypercolumn “denotes a unit containing a full set of values for any given set of receptive field parameters” [5]. A cortical module is defined as either synonymous with a hypercolumn (Mountcastle) or as a tissue block of multiple overlapping hypercolumns (Hubel & Wiesel) [6]. We agree with Hubel & Wiesel’s definition because it permits us to define a useful holarchy “**minicolumn > hypercolumn > cortical module > Brodman’s area > cortex**”.

The previous considerations in 1.3 permit us to consider Brodman’s areas as sets of cortical modules that have the same cell distribution in the cortex six layers. Space contiguity and histological similarity of the cortical modules of a same Brodman’s area is strongly suggestive of an unitary function that can be managed in integrated and/or parallel mode.

#### 1.4. Cognitive processes in terms of activation of Brodmann’s areas

Consider Brodman’s area activity that Lloyd has described in 2007 [7] in relation with the execution of various performances. We present part of this data in the following table (Fig. 6):

Brodman's Areas	Cognitive Reasoning		Music Processing		Working Memory		Syncretical Processing		Semantic Processing		Language: Phonology		Language: Orthography		Attention for Cognition		Cognition		Inhibition of Action			
	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN		
1,2,3																						
4																						
6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
7	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
8																						
9	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
10	•	•					•	•														
18							•	•														
19									•													
22							•	•														
24																						
32			•																			
37		•							•	•												
38								•														
39																						
40	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
41																						
42																						
44																						
45																						
46	•																					
47			•	•					•													

Fig. 6.

Prefrontal Brodmann's areas 9 (BA9) and 6 (BA6) participate to every cognitive performance. Parietal Brodmann's areas 40 (BA40) and 7 (BA7) act similarly. Other Brodmann's areas have not so a universal presence. We can start to assume that cerebral cognitive performances are managed by two holons: a prefrontal holon and a parietal holon.

### 1.5. Frontal lobe and divergent thinking

Joy Paul Guilford distinguishes “convergent thinking”, i.e. ability to give the correct answer to standard question without a significant creativity (essentially deduction capacity), from “divergent thinking”, i.e. generation of creative ideas by exploring many possible solutions [8]. Divergent thinking generates many ideas in an unorganized fashion. Many possible solutions are explored in a short amount of time, and unexpected connections are drawn. After the process of divergent thinking has been completed, ideas and information are organized and structured using convergent thinking [9]. Psychologists have observed that standard IQ (intelligence quotient) isn't capable to evaluate divergent thought. Non-conformism, curiosity, willingness to take risk and persistence are characteristic traits of the personalities that have a developed divergent thinking [10]. Also, musicians use both hemispheres and more likely divergent thinking in their mind processes [11].

Stuss (1985) has observed that frontal lobe damage has insignificant effect on traditional IQ testing [12].

Badre and others affirm: “Cognitive control permits us to make decisions about abstract actions, such as whether to e-mail versus call a friend, and to select the concrete motor programs required to produce those actions, based on our goals and knowledge. The frontal lobes are necessary for cognitive control at all levels of abstraction. Recent neuroimaging data have motivated the hypothesis that the frontal lobes are organized hierarchically, such that control is supported in progressively caudal regions as decisions are made at more concrete levels of action. We found that frontal damage impaired action decisions at a level of abstraction that was dependent on lesion location (rostral lesions affected more abstract tasks, whereas caudal lesions affected more concrete tasks), in addition to impairing tasks requiring more, but not less, abstract action control. Moreover, two adjacent regions were distinguished on the basis of the level of control, consistent with previous functional magnetic resonance imaging results. These results provide direct evidence for a rostro-caudal hierarchical organization of the frontal lobes.” [13]

Finally, Deric Bownds proposes these models of frontal lobe organization [14]:

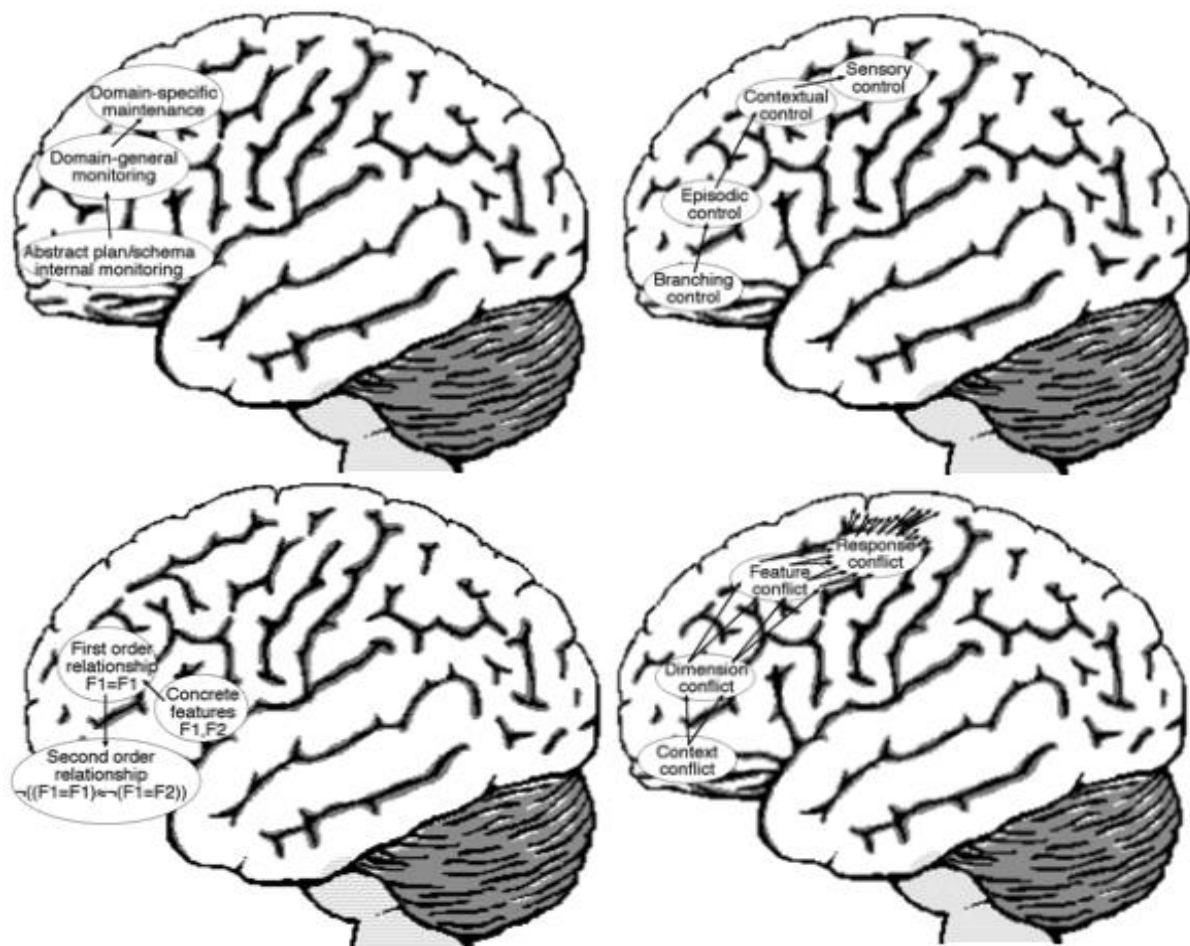


Fig. 7.

The previous observation permits us to suppose that prefrontal holon that we assume in 1.4 (BA6 and BA9 and near zones) manages divergent thought by an holarchic structure and so parietal holon has to manage convergent thought.

### 1.6. Frontal and parietal thalamic afferences

Kievit and Kuypers have injected horseradish peroxidase in different parts of the frontal cortex in 25 Rhesus monkeys. “The retrogradely labelled thalamic **neurons** formed longitudinal bands, some of which crossed the internal medullary lamina, and extended from one thalamic nucleus into another. On the basis of these findings the frontal cortex was subdivided into **seven** transverse cortical strips which receive afferents from seven longitudinal bands of thalamic neurons. The most rostral transverse strip receives afferents from the most medial thalamic band which is oriented vertically and extends through the most medial part of the MD into the medial pulvinar. Progressively more caudally located transverse strips **receive** afferents from progressively more laterally located thalamic bands which in part are situated in the VL and show an increasing tilt towards the horizontal. Moreover, those parts of the various bands which are situated along the dorsal and lateral margin of the thalamus project to the medial portions of the transverse cortical strips, i.e. along the medial margin of the frontal lobe, while the other parts situated ventromedially in the thalamus project to the lateral portions of these strips, i.e. along the lateral margin of the frontal lobe. [...] These data provide an alternative view of the organization of the thalamus and suggest that this structure contains a matrix of longitudinal cell columns which in some cases extend across specific nuclear borders and may **represent** the basic thalamic building blocks in respect to the thalamo-cortical connexions.” [15]

All anatomic observation have revealed until now that parietal thalamic afferences are instead related to thalamus nuclei and not to thalamus strips and so elementar anatomy manuals affirm now. It is evident a distinct integration of arriving sensorial data for prefrontal holon and for parietal holon. If this last one manages convergent thought than we can suppose that arriving sensorial data that are organized by thalamus nuclei are useful to integrate concrete objects in parietal holons. As prefrontal holon manages divergent thought we can suppose that arriving sensorial data that are organized by thalamus strips has to be useful to permit the same divergent thought, i.e. also to define abstract categories and predicates instead of concrete objects.

### 1.7. Frontal and parietal interlinks and parieto-frontal integration theory

Jung and Haier affirm: “Is there a biology of intelligence which is characteristic of the normal human nervous system?” Here we review 37 modern neuroimaging studies in an attempt to address this question posed by Halstead (1947) as he and other icons of the last century endeavored to understand how brain and behavior are linked through the expression of intelligence and reason. Reviewing studies from functional (i.e., functional magnetic resonance imaging, positron emission tomography) and structural (i.e., magnetic resonance spectroscopy, diffusion tensor imaging, voxel-based morphometry) neuroimaging paradigms, we report a striking consensus suggesting that variations in a distributed network predict individual differences found on intelligence and reasoning tasks. We describe this network as the Parieto-Frontal Integration Theory (P-FIT). The P-FIT model includes, by Brodmann areas (BAs): the dorsolateral prefrontal cortex (BAs 6, 9, 10, 45, 46, 47), the inferior (BAs 39, 40) and superior (BA 7) parietal lobule, the anterior cingulate (BA 32), and regions within the temporal (BAs 21, 37) and occipital (BAs 18, 19) lobes. White matter regions (i.e., arcuate fasciculus) are also implicated. The P-FIT is examined in light of findings from human lesion studies, including missile wounds, frontal lobotomy/leukotomy, temporal lobectomy, and lesions resulting in damage to the language network (e.g., aphasia), as well as findings from imaging research identifying brain regions under significant genetic control. Overall, we

conclude that modern neuroimaging techniques are beginning to articulate a biology of intelligence. We propose that the P-FIT provides a parsimonious account for many of the empirical observations, to date, which relate individual differences in intelligence test scores to variations in brain structure and function. Moreover, the model provides a framework for testing new hypotheses in future experimental designs.” [16]

Colom and Haier affirm: “The parieto-frontal integration theory (P-FIT) nominates several areas distributed throughout the brain as relevant for intelligence. This theory was derived from previously published studies using a variety of both imaging methods and tests of cognitive ability. Here we test this theory in a new sample of young healthy adults ( $N = 100$ ) using a psychometric battery tapping fluid, crystallized, and spatial intelligence factors. High resolution structural MRI scans (3T) were obtained and analyzed with Voxel-based Morphometry (VBM). The main findings are consistent with the P-FIT, supporting the view that general intelligence ( $g$ ) involves multiple cortical areas throughout the brain. Key regions include the dorsolateral prefrontal cortex, Broca's and Wernicke's areas, the somato-sensory association cortex, and the visual association cortex. Further, estimates of crystallized and spatial intelligence with  $g$  statistically removed, still share several brain areas with general intelligence, but also show some degree of uniqueness.” [17]

Jung, Haier and others affirm: “Creativity has long been a construct of interest to philosophers, psychologists and, more recently, neuroscientists. Recent efforts have focused on cognitive processes likely to be important to the manifestation of novelty and usefulness within a given social context. One such cognitive process – divergent thinking – is the process by which one extrapolates many possible answers to an initial stimulus or target data set. We sought to link well established measures of divergent thinking and creative achievement (Creative Achievement Questionnaire – CAQ) to cortical thickness in a cohort of young ( $23.7 \pm 4.2$  years), healthy subjects. Three independent judges ranked the creative products of each subject using the consensual assessment technique (Amabile, 1982) from which a “composite creativity index” (CCI) was derived. Structural magnetic resonance imaging was obtained at 1.5 Tesla Siemens scanner. Cortical reconstruction and volumetric segmentation were performed with the FreeSurfer image analysis suite. A region within the lingual gyrus was negatively correlated with CCI; the right posterior cingulate correlated positively with the CCI. For the CAQ, lower left lateral orbitofrontal volume correlated with higher creative achievement; higher cortical thickness was related to higher scores on the CAQ in the right angular gyrus. This is the first study to link cortical thickness measures to psychometric measures of creativity. The distribution of brain regions, associated with both divergent thinking and creative achievement, suggests that cognitive control of information flow among brain areas may be critical to understanding creative cognition (Hum Brain Mapp, 2010. © 2009 Wiley-Liss, Inc.” [18]).

Johnson, Jung, Colom and Haier affirm: “There is increasing evidence relating psychometric measures of general intelligence and reasoning to regional brain structure and function assessed with a variety of neuroimaging techniques. Cognitive dimensions independent of general intelligence can also be identified psychometrically and studied for any neuroanatomical correlates. Here we investigated two such dimensions, rotation–verbal and focus–diffusion. We used structural MRI and voxel-based morphometry (VBM) in two independent samples to identify gray and white matter correlates of both dimensions. Based on statistical conjunction of both samples, ( $N = 45$ ;  $p < .001$ ), there were correlations with gray matter in Brodmann areas (BA) 20 and 9 involving the rotation–verbal dimension and in BA 18 involving the focus–diffusion dimension. There were white matter correlations involving the rotation–verbal dimension near BA 18, 40, 39, 10, 8, and 4 and involving the



focus–diffusion dimension near BA 5 and the right sub-lobar amygdala. These correlations may have implications for understanding individual differences in the manifestation of intelligence.” [19]

### **1.8. Frontal lobe and problem solving**

Dimitrov, Grafman and Hollangel affirm: “Everyday problem-solving involves both non-social executive processes, social and emotional processes, and draws upon social and practical knowledge. A series of studies including both adult-acquired lesions and neurodevelopmental disorders is reviewed examining problem-solving on a real-life-type task that involves generating a range of solutions to brief problem scenarios and selecting preferred solutions to solve the problems. Impairments in problem-solving are described in groups of participants with left anterior frontal lobe lesions, Tourette’s syndrome and Asperger’s syndrome. By contrast, healthy older people did not show problem-solving deficits on the same task. The possible contributions of non-social executive skills, social and emotional skills, and knowledge acquired from experience are each considered in relation to everyday performance. Multiple cognitive/emotional routes to the development of everyday life difficulties pose a complex challenge both in understanding the nature of the relevant processes and in developing adequate methods for management and rehabilitation.” [20]; “The prefrontal cortex plays an especially important role in human social-cognitive behavior. It has been difficult to quantify deficits in this domain in patients with frontal lobe lesions using standardized psychological instruments. We administered the Everyday Problem Solving Inventory (EPSI), which is composed of a range of scenarios depicting everyday social problems and their possible solutions, to a group of patients with frontal lobe lesions who were required to rate each of 4 possible solutions to each problem for their effectiveness. Our sample consisted of 27 normal controls (NCs), 33 patients with focal frontal lobe lesions (FLL), and 3 patients with frontal lobe dementia (FLD). The performance of the FLL patients on the EPSI instrument was also compared with their performance on traditional neuropsychological tests. The results indicated that the FLD patients’ EPSI rank ordering of social problem solutions was uncorrelated with the performance of NCs and about half of the FLL patients EPSI rank orderings of solutions also varied substantially from those of the NCs. These same FLL patients also had the lowest scores, compared to FLL patients whose judgements on the EPSI were similar to that of the NCs, on a set of neuropsychological tasks sensitive to frontal lobe dysfunction. There was no obvious relationship between locus of lesion within the frontal lobes and performance on the EPSI. These results suggest that some patients with prefrontal lobe lesions may have impaired social judgement that can be directly revealed through the use of a conventional psychological inventory such as the EPSI.” [21]; Sánchez-Benavides and others affirm: “Mild cognitive impairment (MCI) is considered a transitional state between normal aging and Alzheimer disease. Most MCI subjects present disturbances in multiple neuropsychological domains, including executive function. This study aimed at exploring frontal lobe cortical thinning in MCI and healthy controls, and its relationship with problem-solving abilities. Twenty-three MCI patients and 30 elderly controls underwent MRI and neuropsychological assessment. Cortical thickness was measured by means of FreeSurfer. Problem-solving was assessed by means of the Tower of London (TOL) task. MCI showed a global thinning of the cortex. With regard to specific regions of interest, a thinning in the left frontal lobe and the bilateral posterior cingulate gyri was found. Partial correlations, after controlling for age, education, Mini-Mental Status



Examination, and non-frontal mean thickness revealed negative significant correlations between frontal lobe thickness and executive outcomes in the control group. This counterintuitive relationship was not observed in the MCI group, suggesting that the frontal cortical atrophy observed in MCI entails a specific pathology-related relationship with high-level executive outcomes that is qualitatively different from that observed in healthy aging.” [22].

### 1.9. Non-necessity of individual constant in standard logic

Consider Mendelson formal theory K for first order predicative calculus whose model is standard relation logic [23]. To represent use:

- The alphabet:  $(, ), A_1^1, A_1^2, \dots, A_2^1, A_2^2, \dots, \dots, f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots, a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots \sim, \supset$ .
- The syntax rules: 1)  $a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots$  are terms; 2) if  $t_1, \dots, t_n$  are terms then  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  is term; 3) if  $t_1, \dots, t_n$  are terms then  $A_i^n(t_1, \dots, t_n)$  is sentence; 4) if  $\alpha$  is sentence then  $(x_i)\alpha$  is sentence; 5) if  $\alpha$  is sentence then  $\sim\alpha$  is sentence; 6) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then  $\alpha\supset\beta$  is sentence; 7) K sentences can be built only by 1), ..., 6).
- The definitions: D1) if  $\alpha$  is sentence then let  $(Ex_i)\alpha$  be  $\sim((x_i)\sim\alpha)$ ; D2) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then let  $\alpha\vee\beta$  be  $(\sim\alpha)\supset\beta$ ; D3) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then let  $\alpha\wedge\beta$  be  $\sim(\alpha\supset(\sim\beta))$ ; D4) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then let  $\alpha\wedge\beta$  be  $\sim((\alpha\supset\beta)\supset(\sim\beta\supset\alpha))$ ; D5) let  $x_1, x_2, \dots$  be variables; D6) Given  $(x_i)\alpha$ , let  $(x_i), x_i, \alpha$  be respectively universal quantifier, variable of  $(x_i)$ , scope of  $(x_i)$ ; D7) Let an occurrence of variable in a sentence be linked if is a variable of a quantifier or it is in the scope of a quantifier; D8) let an occurrence of variable be free if and only if it is not linked; D9) let  $\alpha(x_i, x_j, \dots)$  mean that  $x_i, x_j, \dots$  may occur freely in  $\alpha$ ; D10) let a term  $t_i$  be free for  $x_j$  in  $\alpha(x_j)$  if no free occurrences of  $x_j$  in  $\alpha(x_j)$  are in the scope of a quantifier  $(x_k)$  when  $x_k$  occurs in  $t_i$ ; D10) let  $a_1, a_2, \dots$  be individual constants; D11) let  $f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots$  be functional letters and thus  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  an operation on  $t_1, \dots, t_n$  whose achievement is however a term;
- The axioms: A1) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then  $\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$ ; A2) if  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  are sentences then  $(\alpha\supset(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\gamma))$ ; A3) if  $\alpha$  and  $\beta$  are sentences then  $((\sim\beta)\supset(\sim\alpha))\supset(((\sim\beta)\supset\alpha)\supset\beta)$ ; A4)  $(x_j)\alpha(x_j)\supset\alpha(t_j)$  if  $t_j$  is free for  $x_j$  in  $\alpha(x_j)$ ; A5)  $(x_j)(\alpha\supset\beta(x_j))\supset(\alpha\supset(x_j)\beta(x_j))$  if  $\alpha$  hasn't free occurrences of  $x_j$ .
- The inference schemes: MP)  $\alpha, \alpha\supset\beta \vdash \beta$  (read “ $\vdash$ ” “deduces”); Gen)  $\alpha \vdash (x_i)\alpha$ .

Mendelson proves that every sentence of K is completely equivalent to another sentence of K without individual constants and functional letters. [24] He gives the following statements to eliminate individual constants and functional letters from a sentence:

- a) If  $x_i$  and  $A_j^1$  don't occur in an isolated sentence  $\beta(a_k)$  then  $\beta(a_k)$  is logically equivalent to  $(Ex_i)A_j^1(x_i)\supset(Ex_i)(A_j^1(x_i)\wedge\beta(x_i))$ ;
- b) If  $x_i$  and  $A_j^{n+1}$  don't occur in an isolated sentence  $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$  then  $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$  is logically equivalent to  $(Ex_i)A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\supset(Ex_i)(A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\wedge\beta(x_i))$ .

The possibility to eliminate individual constant from a sentence and to use predicates or relations in their place makes evidently easier the problem solving in standard logic. Consider the possibility that the brain can use this strategy in problem solving when convergent thought of Parietal holon isn't sufficient. Frontal lobe is involved either in divergent thought (see 1.5) or in problem solving (see 1.6). Thus a prefrontal holon may receive unsolved problems from a parietal holon, then, it may replace individual terms of such unsolved problems with more abstract predicate sets structured by logic relation as we have seen in standard logic, and finally, it may reconstitute the unsolved problem to parietal holon in easier solving form. This cycle may be iterative with more and more abstract terms until the problem is solved.

## 2. Work hypothesis and some remarks

All the previous considerations permit us to formulate a work hypothesis on brain problem solving. We summarize it in the following figure (Fig. 8).

A parietal holon (BA7, BA40 and so on) can be the top of recognition process of external objects by the brain. To show the building of a concrete object by parietal holon from sensitive thalamic pathways assume the following simplified figure (Fig. 9).

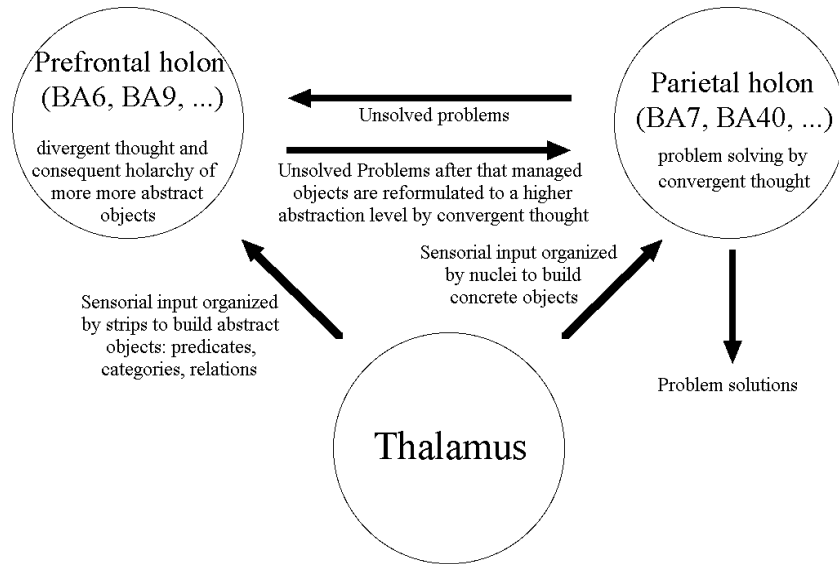


Fig. 8.

We have seen that parietal holon can manage the built concrete object in problem solving by convergent thought. QI test solving is typical example of work typology of this holon. If no solution appears for an examined problem then we suppose an activation of Prefrontal holon by pathways previewed by P-FIT (see 1.5) in the following figure (Fig. 10).

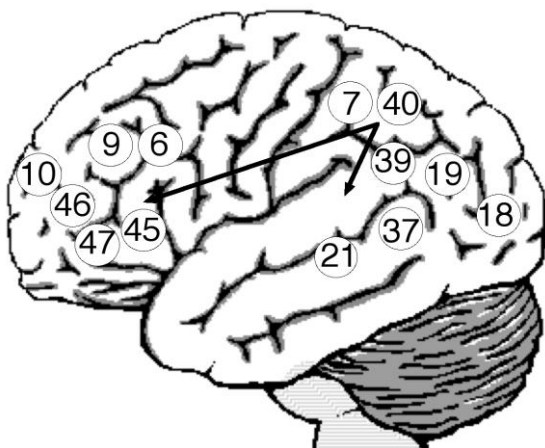


Fig. 9.

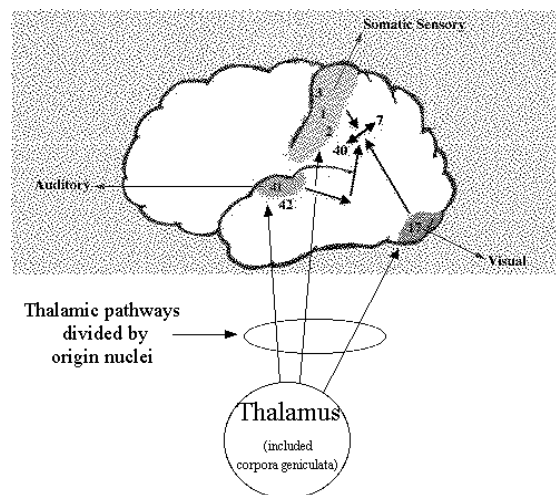


Fig. 10.

Prefrontal holon receives thalamus inputs by pathways divided by origin strips and not by origin nuclei. We suppose that Prefrontal input pathways from thalamus are organized for

strips and not for nuclei because their integration has to generate predicates, categories, relation, abstract objects finally, but not concrete objects. The following figure (Fig. 11) shows the known prefrontal input pathways from thalamus organized by strips:

There is a holarchy between the built abstract object in prefrontal holon that has an anatomic equivalent. We have already observed in Fig. 7 this particular:

Observe that concrete feature localization in Fig. 12 corresponds roughly to the end of pathways from parietal holon to prefrontal holon previewed by by P-FIT and shown in Fig. 11.

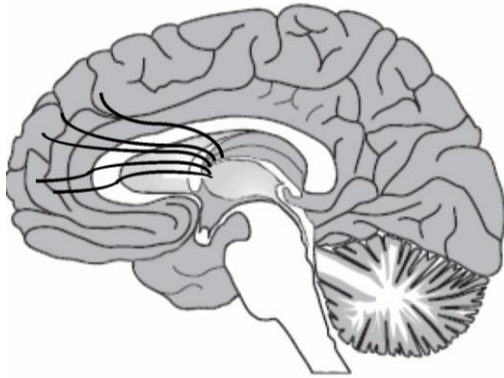


Fig. 11.

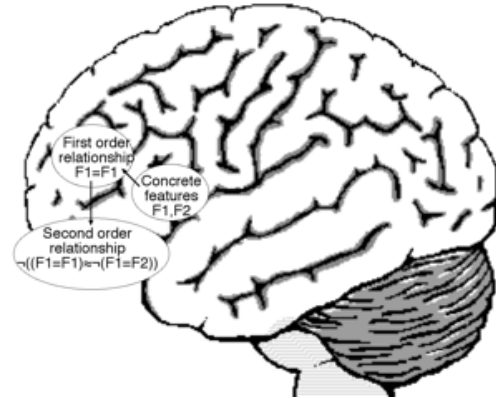


Fig. 12.

Observe too that first and second order relationships are located roughly at the end of pathways from thalamus to prefrontal holon. This datum confirms the hypothesis of elaboration in abstract objects of thalamic pathways organized by strips. Another confirm of supposed prefrontal holarchy is in Badre: “Cognitive control supports flexible behavior by selecting actions that are consistent with our goals and appropriate for our environment. The prefrontal cortex (PFC) has an established role in cognitive control, and research on the functional organization of PFC promises to contribute to our understanding of the architecture of control. A recently popular hypothesis is that the rostro-caudal axis of PFC supports a control hierarchy whereby posterior-to-anterior PFC mediates progressively abstract, higher-order control. This review discusses evidence for a rostro-caudal gradient of function in PFC and the theories proposed to account for these results, including domain generality in working memory, relational complexity, the temporal organization of behavior and abstract representational hierarchy. Distinctions among these frameworks are considered as a basis for future research.”[25]

Consider now an overlapping figure between Fig. 10 and Fig. 12:

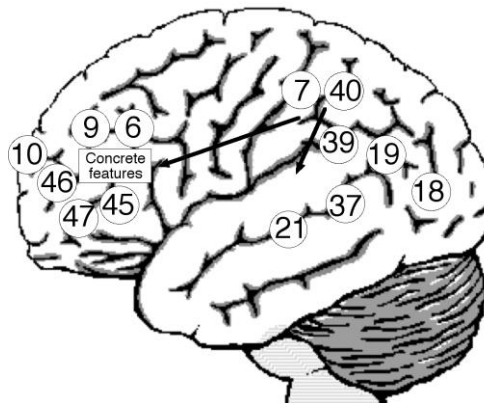


Fig. 13.

and between Fig. 11 and Fig. 12:

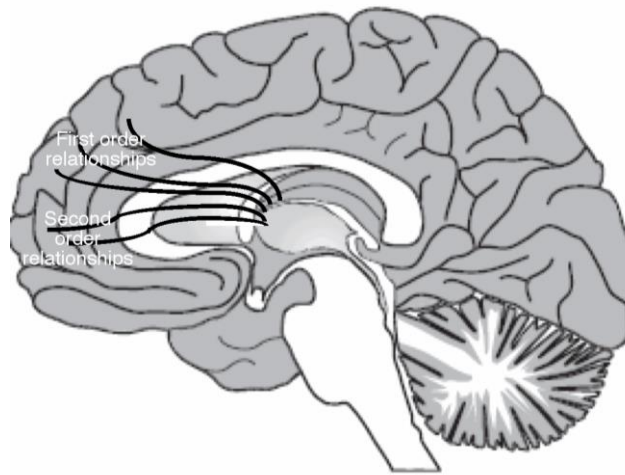


Fig. 14.

Fig. 13 and Fig. 14 confirm our work hypothesis.

Consider now the characteristic of Brodmann's area 9 BA9: "... unlike Brodmann area 6-1909, area 9 has a distinct internal granular layer (IV); unlike Brodmann area 6 or Brodmann area 8-1909 its internal pyramidal layer (V) is divisible into two sublayers, an outer layer 5a of densely distributed medium sized ganglion cells that partially merges with layer IV, and an inner, clearer, cell-poor layer 5b; the pyramidal cells of sublayer 3b of the external pyramidal (III) are smaller and sparser in distribution; the external granular layer (II) is narrow, with small numbers of sparsely distributed granule cells." [26]. The distinct internal granular layer (IV) of BA9 that misses in BA6 suggests an important input function as regard the same BA6. Thus BA9 may perform a first integration of the data of BA45, BA46, BA47 (concrete features) with the data of BA10 (second order relationships) and of BA32 (first order relationships), instead BA6 may be the interactive target of BA9 to replace a concrete feature with its equivalent description in terms of first and/or second order relationships.

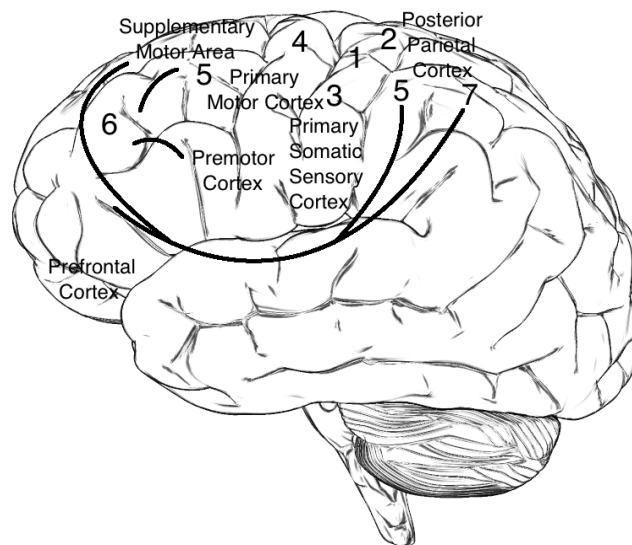


Fig. 15.

Brodmann's area 6 is strictly related to primary motor cortex BA4 and perhaps, with large consensus, it plays a role in the planning of complex, coordinated movements (does it apply the found solutions?). For our purpose it is useful consider some known neuron pathways that involve motor cortex in the following figure:

Our work hypothesis is perfectly compatible with these statements and the overlapping is very interesting as the following figure shows:

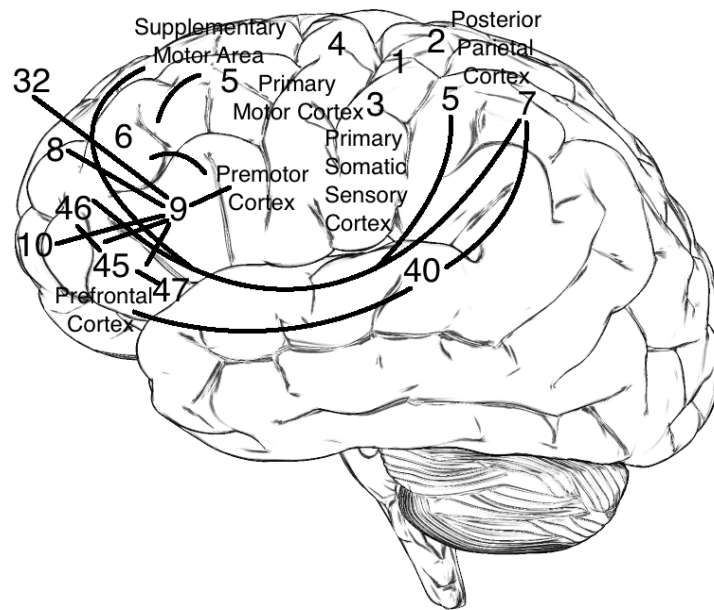


Fig. 16.

Author invites: "Let us start the debate!"

## References

1. A. Koestler , *The Ghost in the Machine*, Hutchinson, London, U.K., 1967, 48.
2. K. Wilber K., *Introducing Ken Wilber: Concepts for an Evolving Word*, Lew Howard, Bloomington, Ind., U.S.A., 2005.
3. S. Grobbelaar , and M. Ulieru M., Holonic Stigmergy as a Mechanism for Engineering Self-Organizing Applications, *Proceedings of ICINCO 2006 – 3rd International Conference of Informatics in Control, Automation and Robotics*, Setubal, Portugal, 5-10, (2006).
4. B. Kolb , I.Q. Whishaw, *Fundamentals of human neuropsychology*. Worth, New York, NY, U.S.A., 2003.
5. J.C. Horton, D.L. Adams D, The cortical column: a structure without a function, *Philos. Trans. R. Soc. Lond., B, Biol. Sci.* **360**, no. 1456, 837–62 (2005).
6. Wikipedia: *Cortical column*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Cortical\\_column](http://en.wikipedia.org/wiki/Cortical_column)
7. D. Lloyd, What do Brodmann areas do? Or: Scanning the Neurocracy (personal communication), *Program in Neuroscience*, Trinity College, Hartford, CT, U.S.A., (2007).
8. J.P. Guilford, Creativity, *American Psychologist* **5**, no. 9, 444–454, (1950).
9. University of Washinton, Strategies of Divergent Thinking, <http://faculty.washington.edu/ezent/imdt.htm>, (2009)
10. C. Wade, C. Tavris, *Inviation to Psychology*, Pearson - Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, U.S.A., 2008, 258.

11. Vanderbilt University, Musicians use both sides of their brains more frequently than average people, <http://www.physorg.com/news142185056.html>, (2006)
12. D. Stuss et al., Subtle neuropsychological deficits in patients with good recovery after closed head injury, *Neurosurgery* **17**, 41-47, (1985).
13. D. Badre et al., Hierarchical cognitive control deficits following damage to the human frontal lobe, *Nature, Neuroscience* **12**, 515 – 522, (2009).
14. D. Bownds, Models of Cognitive Control in Prefrontal Cortex, *Deric Bowd's Mindblog*, <http://mindblog.dericbownds.net/2008/05/models-of-cognitive-control-in.html>, (2008-5-30).
15. J. Kievit, G. J. M. Kuypers, Organization of the thalamo-cortical connexions to the frontal lobe in the rhesus monkey, *EXPERIMENTAL BRAIN RESEARCH* **29**, no. 3-4, 299-322, (1977).
16. R.E. Jung, R. J. Haier, The Parieto-Frontal Integration Theory (P-FIT) of intelligence: converging neuroimaging evidence, *Behavioral and Brain Sciences* **30**, no. 2, 135-154, (2007).
17. R. Colom, R.J. Haier, Gray matter correlates of fluid, crystallized, and spatial intelligence: Testing the P-FIT model, *Intelligence* **37**, no. 2, 124-135, (2009).
18. R.E. Jung, R.J. Haier et al., Neuroanatomy of creativity, *Human Brain Mapping* **31**, no. 3, 398-409, (2010).
19. W. Johnson, R.E. Jung, R. Colom, R. J. Haier, Cognitive abilities independent of IQ correlate with regional brain structure, *Intelligence* **36**, no. 1, 18-28, (2008).
20. S. Channon, Frontal lobe dysfunction and everyday problem-solving: Social and non-social contributions, *Acta Psychologica* **115**, no. 2-3, 235-254, (2004).
21. M. Dimitrov, J. Grafman, C. Hollangel, The effects of frontal lobe damage on everyday problem solving, *Cortex* **32**, no. 2, 357-366, (1996).
22. G. Sánchez-Benavides et al., Problem-solving abilities and frontal lobe cortical thickness in healthy aging and mild cognitive impairment, *J Int Neuropsychol Soc* **16**, no. 5, 836-845, (2010).
23. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, U.S.A., 1964, §2.3.
24. *Ibid.*, **Lemma** 3.46.
25. D. Badre, Cognitive control, hierarchy, and the rostro-caudal organization of the frontal lobes, *Trends Cogn. Sci.* **12**, no. 5, 193-200, (2008).
26. Wikipedia: *Brodmann area 9*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Brodmann\\_area\\_9](http://en.wikipedia.org/wiki/Brodmann_area_9)

**Arturo Graziano Grappone**, Dr. He was born in Italy. He is medicine doctor from the 1981, neurologist from the 1986 with neuropsychological address, Red Cross member from the 1987 with catastrophe medicine address, psychotherapist from the 1990. He works in Monterotondo Hospital as internist, neurologist and psychiatrist from 1990. He teaches neurosciences in Rome Second University from the 1997. He is editor-in-chief of international review *Metalogicon* and invited member of CHAOS, EURO, EUROPT. He is macintosh computer signed developer from the 2007. He has developed a scientific activity in pure and applied mathematical logic (under M. Malatesta's overview from the 1977), in Matte Blanco's bi-logic psychodynamics (under A. Jaria's overview from the 1987), in anticipatory systems (under D.M. Dubois' overview from the 1997), in nano-sciences and quantum mechanics (under S. Santoli's overview from the 2006). He has published about 40 papers. He has got the CASYS '2000 Best Paper Award by CHAOS in the 2000 and the I.I.A.S. Outstanding Scholarly Contribution Award in the 2002 and the 2004; also — in another years. He has been chairman in international congresses on operational research and anticipatory systems. More information can be found in [www.grappone.it](http://www.grappone.it) .

E-mail: [a.grappone@mclink.it](mailto:a.grappone@mclink.it)

## Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга

А.Г. Граппоне

Rome Second University – Tivoli Didactic Pole  
via Carlo Dossi, 87 – 00137 Roma

Деятельность, связанная с абстракцией, представляется как самоорганизация нейронов префронтальных областей. Для доказательства автор применяет теорию холонов к гистологии коры головного мозга, используя систему интеграции данных в мозжечке в качестве основной модели и анализируя сходства и различия в задействованных полях Бродмана. Данные дополнены кратким исследованием обнаруженных корреляций между конкретными видами интеллектуальной деятельности и конкретными полями Бродмана, участвующими в этой деятельности, в частности, описана взаимосвязь передней доли, в основном – префронтальных областей – с так называемым дивергентным мышлением. Однако фундаментальные данные, позволяющие понять процессы абстракции в мозге, связаны (являясь особым «запуском») с начальными участками отводящих таламических путей: овулярными (ovular) для таламо-теменных путей и ламинарными для фронтальных путей. При этом предполагается, что теменная организация восприятия отличается от фронтальной организации восприятия. По аналогии со стереоскопическим зрением, благодаря которому зрение имеет «глубину», можно сказать, что би-восприятие также придает «глубину», которая может быть абстракцией. Ее геометрическое представление аналогично перспективе на рисунке (фактически, перспектива как раз и передает «глубину» зрения). В поддержку этой гипотезы после анализа корреляций между передней долей и решением задач проведен анализ фронтально-париетальных взаимосвязей в мозге. Эти данные и бесполезность индивидуальных констант в классической математической логике позволили предложить новую нейрофизиологическую модель абстракции.

*Ключевые слова:* абстракция, мозг, лобная доля, холон, неврология, нейронауки; сложные системы

### 1. Исходные положения (некоторый обзор)

#### 1.1. Холоны

Холон (греч. *'ολον*, *holon* средняя форма *'ολος*, *holos* “целый”) – это всё то, что одновременно является и целым, и частью чего-либо [1]. Артур Кестлер ввел это понятие из результатов наблюдений:

*- скорость самоорганизации любой сложной системы возрастает, если в процессе самоорганизации имеются устойчивые промежуточные формы (см. Притчу Герберта Саймона о двух часовщиках);*

*- несмотря на то, что выявить части целого, казалось бы, легко, целое и части в абсолютном смысле слова нигде не существуют.*

Кестлер утверждает, что холоны способны справляться с непредвиденными обстоятельствами самостоятельно, но они также являются и объектом управления со стороны «вышестоящих органов». При этом он вводит понятие «холархии», т.е. иерархии холонов, которые одновременно управляют своими составляющими частями и управляются вышестоящими элементами в соответствии с окружением.

Холоны лучше всего описывают системы, обладающие развивающейся самоорганизующейся диссипативной структурой других холонов, каждый из которых имеет точку равновесия между хаосом и упорядоченностью (порядком).

Наконец, Кестлер определяет холархию как иерархию саморегулирующихся холонов, которые функционируют, во-первых, как автономные целостные элементы, управляющие другими элементами, во-вторых, как части, зависящие от элементов более высокого уровня, в-третьих, в соответствии с локальным окружением.

Обычно описывают следующие типы холонов:

- **индивидуальный холон**: имеет доминантную монаду (определимое «Я»). Он дискретный, автономный и характеризуется самоуправляемым поведением. Он состоит из частей, которые двигаются все вместе, когда холоны выполняют свои функции;
- **социальный холон**: имеет доминантную монаду, только определимое «мы». Состоит из индивидуальных холонов. Обладает «сетевой» функцией. Например, пчела – это индивидуальный холон, а рой – социальный холон.
- **артефакт**: всё, что создается индивидуальными или социальными холонами. Кен Уилбер [2] ввел этот тип холонов для того, чтобы включить индивидуальные и социальные холоны в общую схему, в которую потенциально входит способность размножать свойства холонов и сильно влиять на них (например, посредством толкования). Артефакты не выполняют функций, не являются самоподдерживающимися, не имеют «Я», само-трансцендентности двух предыдущих холонов в их стандартном определении, хотя искусственный интеллект сгладил эти различия. Наконец, артефакты могут объединяться в индивидуальный или социальный холон (как, например, дом состоит из атомов).
- **массив**: любое множество холонов, которое является совершенно неупорядоченным, неорганизованным. Например, множество разнородных названий – это массив. Разница между массивами и артефактами состоит, соответственно, в отсутствии и наличии преднамеренности в возникновении такого холона.

Очень наглядный пример схемы построения программы с помощью холонов приводится в работе Ulieru (2002). Приведем ее на следующем рисунке [3]:

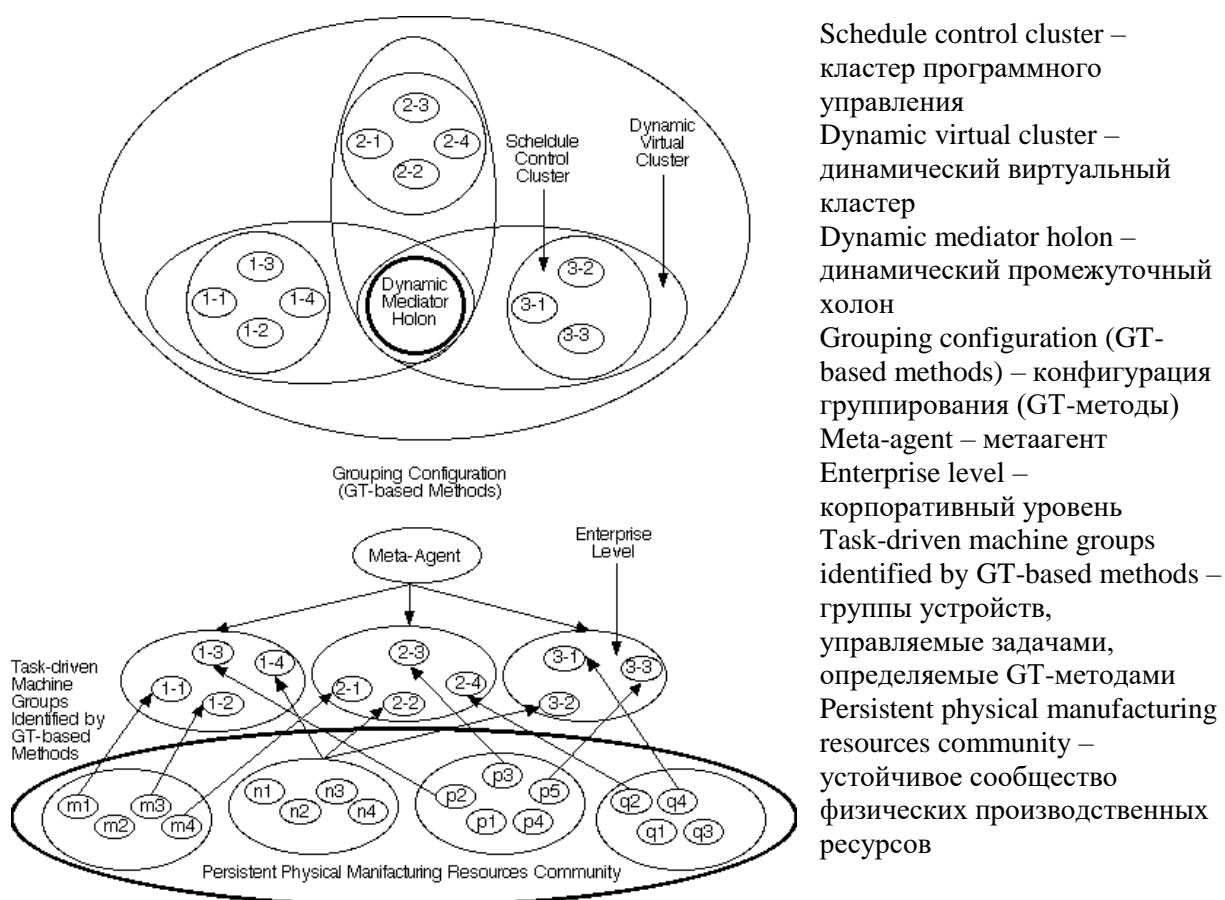


Рис.1. Из работы Grobbelaar and Ulieru, 2006 (рис. приводится с разрешения издателей)



## 1.2. Краткий «словарь» по холонам

**Адаптивный риск** – риск покидания (в %), который сопоставляет коэффициент (оценку) приоритета холона с *коэффициентом покидания* холонов в том же *холархическом* кластере (см. определения ниже)

**Холархический контекст** – любая информация, которую можно использовать для характеристики контекста субъекта. Субъект – это человек, место или объект, который считается значимым по отношению к взаимодействию между пользователем и приложением, включая самого пользователя и приложение.

**Холархия** – иерархия холонов.

**Холон** – это система (или явление), которая сама по себе является целостной и автономной и одновременно – частью более крупной системы. Его можно представить как набор систем, вложенных одна в другую. Каждую систему можно считать холоном, начиная от субатомной частицы и до Вселенной в целом. На не физическом уровне (**слова, идеи, звуки, эмоции, всё, что поддается определению**) всё является одновременно частью чего-либо и имеет свои составные части по аналогии со знаком в семиотике. Т.к. холон встроен в более крупные объекты, то он находится под их влиянием и одновременно влияет на них сам. Т.к. холон также содержит подсистемы, или части, он сам также находится под их влиянием, одновременно оказывая свое влияние на них. Обмен информацией между более мелкими и более крупными системами происходит в двух направлениях.

**Преднамеренная (*intended*) цель** – цель, которая повышает автономность холона, а следовательно, его возможность свободно объединяться с другими холонами на своем уровне. Это связано с высоким приоритетом. Преднамеренная цель иногда может совпадать с целью пользователя или холархической целью, назначенной на более высоком уровне.

**Коэффициент покидания** – коэффициент приоритета холона в момент покидания холархии.

**Прогнозирование** – представление конкретного события в будущем.

**Коэффициент приоритета** – Отношение(я) *Приоритета(ов) преднамеренной цели/Приоритета(ов) назначенной цели*.

**Стигмергическая холархия** – система холонов, принадлежащих холархии и имеющих стигмергические свойства (см. ниже), в которой потребности пользователя преобразуются либо в *преднамеренные, либо в назначенные цели*.

**Стигмергия** – метод коммуникации в системе, отдельные части которой общаются друг с другом посредством изменения локальной окружающей среды.

## 1.3. Интеграция данных в мозговой коре

Рассмотрим следующую упрощенную схему коры мозжечка (рис. 2).

Вот простой пример интеграции двух массивов данных в мозге без потери информации: имеем взаимно-однозначную связь между каждой парой {мшистое волокно, лазающее волокно} и данным волокном Пуркинье, которое передает либо всю информацию своего соответствующего мшистого волокна или всю информацию своего соответствующего лазающего волокна.

Отметим, что такая «совокупность» информации возможна благодаря многочисленным горизонтальным связям гранулярных клеток.

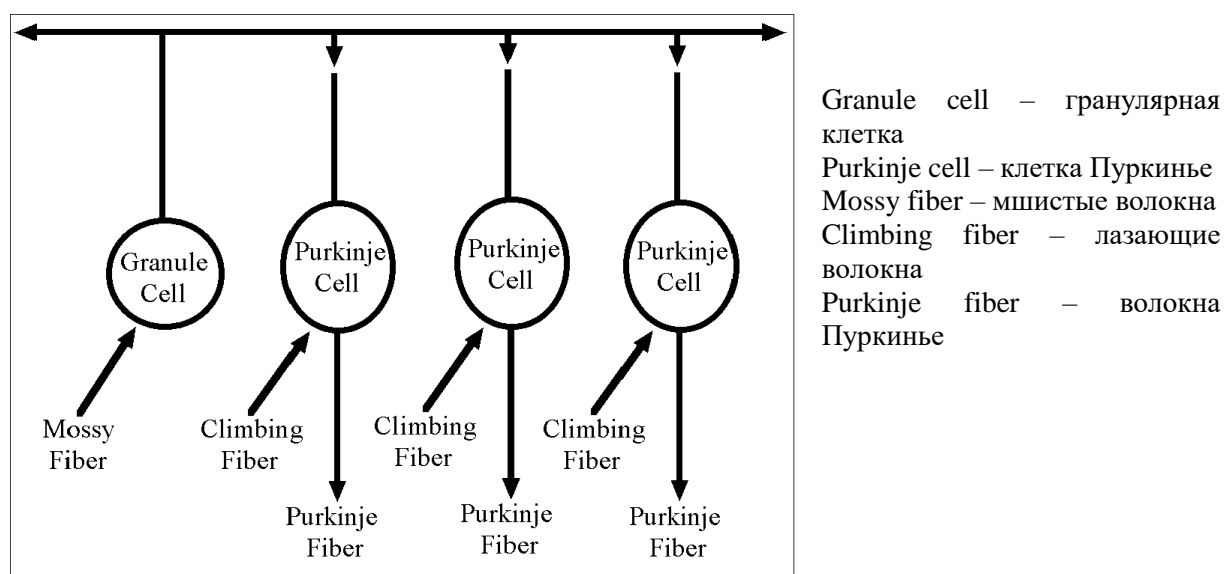


Рис. 2.

Рассмотрим теперь кору головного мозга:

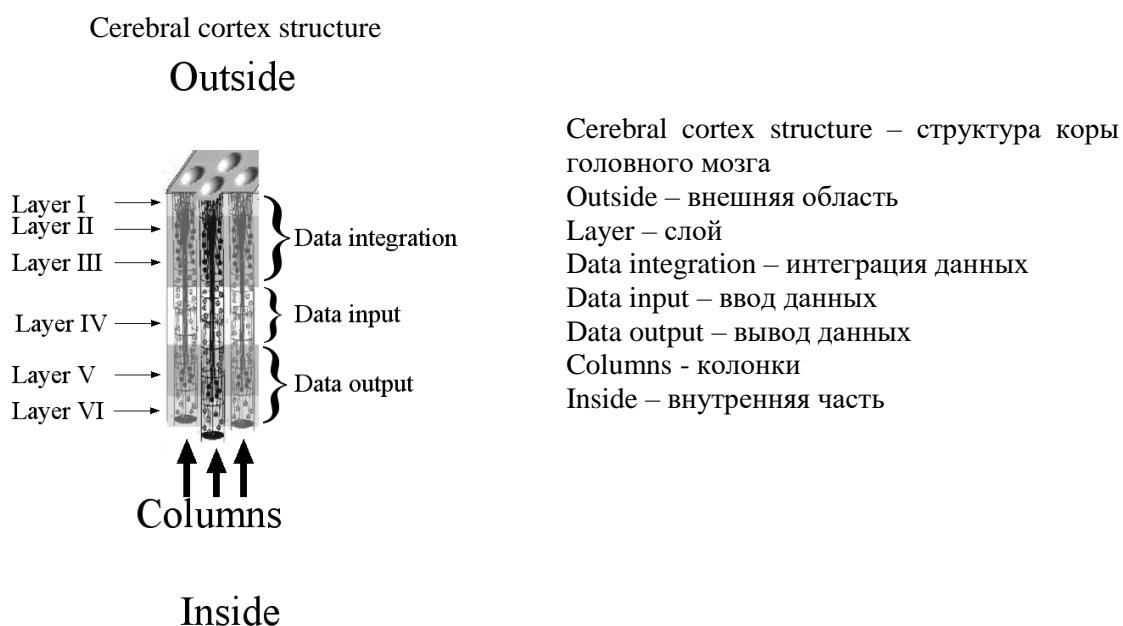


Рис.3.

Данная схема позволяет предположить, что интеграция данных, по крайней мере, приблизительно напоминает интеграцию двух массивов данных в мозжечке, где слои I, II, III интегрируют данные как гранулярные клетки мозжечка; слой IV получает внешние данные как концевые части мшистых и лазающих волокон; слои V, VI отсылают данные как клетки Пуркинье.

Т.к. кору головного мозга следует делить по Бродману на пронумерованные гистологически однородные поля, анализ слоев коры позволяет весьма приближенно оценить функции, присущие таким полям. Поля Бродмана приведены на рис.4.

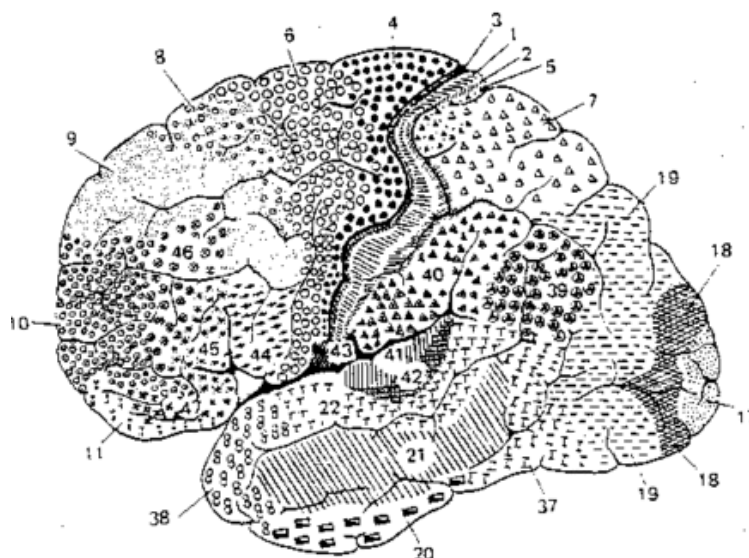
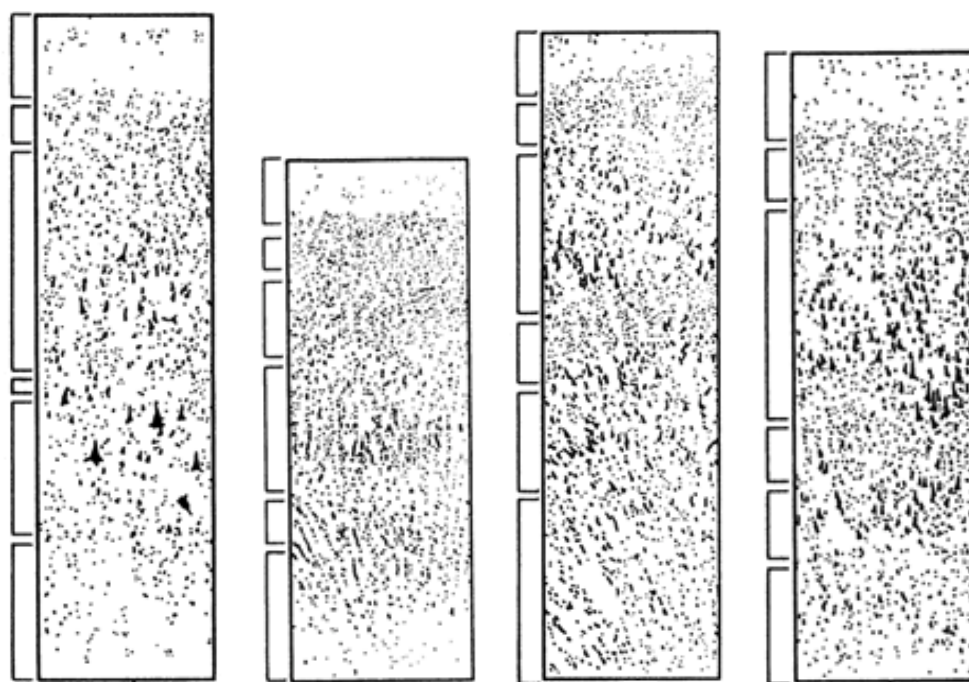


Рис. 4.

Рассмотрим гистологию ряда полей (областей) Бродмана (рис.5).



Поле 4 (BA4)    Поле 17 (BA17)    Поле 39 (BA39)    Поле 46 (BA46)

Рис. 5.

Рассматривается развитие слоев I, II, III интеграции данных в лобной коре (либо префронтальной ассоциативной коре (поле 46), либо первичной двигательной коре (поле 4)), которое снижается в теменной ассоциативной коре (поле 39) и далее в первичной зрительной коре (поле 17). Слой ввода данных IV, очевидно, является наибольшим (максимальным) в сенсорной коре как первичной зрительной коре,

наименьшим в первичной двигательной коре, промежуточным в ассоциативной коре (либо в теменной, либо в префронтальной). Слои V, VI вывода данных, очевидно, чрезвычайно развиты в первичной двигательной коре и в теменной ассоциативной коре. Колонка кортекса, которую также называют гиперколоной или корковым модулем [4], – это группа нейронов в коре головного мозга, которую можно последовательно пройти датчиком, установленным перпендикулярно к корковой поверхности, и которые обладают практически идентичными рецептивными полями. В нейронах в миниколонке закодированы одинаковые свойства, в то время как гиперколона «это объект, содержащий полный массив значений для любого множества параметров рецепторного поля» [5]. Корковый модуль определяется либо как синоним гиперколоны (Маунткасл), либо как тканевый блок из многочисленных перекрывающихся друг друга гиперколонок (Hubel & Wiesel) [6]. Мы согласны с определением Hubel & Wiesel, т.к. это позволяет нам определять такую холархию: **«миниколонка > гиперколона > корковый модуль > поле Бродмана > кора»**.

Предыдущие рассуждения (раздел 1.3) позволяют рассматривать поля Бродмана как множества корковых модулей, имеющих одинаковое распределение клеток в шести слоях коры. Пространственная близость и историческое сходство корковых модулей одного поля Бродмана заставляет предположить, что в интегрированном и/или параллельном режиме они могут выполнять единую функцию.

#### 1.4. Когнитивные процессы с точки зрения активации полей Бродмана

Рассмотрим работу полей Бродмана, как ее описывал Ллойд (Lloyd) в 2007 г. [7] в связи с выполнением различных действий. В таблице (рис. 6) эти данные приводятся частично. Префронтальные поля Бродмана 9 (BA9) и 6 (BA6) участвуют в любой когнитивной деятельности. Теменные поля Бродмана 40 (BA40) и 7 (BA7) действуют аналогичным образом. Другие поля Бродмана не настолько универсальны. Мы предполагаем, что интеллектуальная познавательная деятельность управляется двумя холонами: префронтальным и теменным.

#### 1.5. Лобная доля и дивергентное мышление

Джой Пол Гилфорд (Joy Paul Guilford) различает «конвергентное мышление», т.е. способность давать правильный ответ на стандартный вопрос без существенной креативности (в основном дедукция), и «дивергентное мышление», т.е. генерация креативных идей посредством исследования многих возможных решений [8]. Дивергентное мышление генерирует множество идей неупорядоченным образом. За короткое время исследуется множество возможных решений, получаются самые неожиданные взаимосвязи. После завершения процесса дивергентного мышления идеи и информация упорядочиваются и структурируются при помощи конвергентного мышления [9]. Психологи отмечают, что стандартный IQ (коэффициент умственного развития) не способен оценить дивергентное мышление. Оригинальное мышление, любопытство, готовность рисковать, настойчивость – это характерные черты личностей с дивергентным мышлением [10]. Кроме того, музыканты используют оба полушария головного мозга и, скорее, дивергентное мышление в своей деятельности [11].

Стусс (Stuss), 1985, [12] отмечал, что повреждение лобной доли мозга имеет незначительное влияние на результаты традиционного IQ-теста.

Бадре и др. (Badre) подтверждают: «Когнитивное управление позволяет принимать решения об абстрактных действиях, например, позвонить другу или отправить ему электронное сообщение, либо какие программы требуется выполнить для

соответствующих действий, на основе наших целей и знаний. Лобные доли необходимы для когнитивного управления на всех уровнях абстракции.

Brodmann's Areas	Cognitive Reasoning		Music Processing		Working Memory		Syntactical Processing		Semantic Processing		Language: Phonology		Language: Orthography		Attention for Cognition		Cognition		Inhibition of Action	
	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN
1,2,3																				
4																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
18																				
19																				
22																				
24																				
32																				
37																				
38																				
39																				
40																				
41																				
42																				
44																				
45																				
46																				
47																				

Рис.6.

Brodmann's areas – поля Бродмана;  
 Inhibition of action – подавление действия;  
 Cognition – познание;  
 Attention for cognition – внимание к познанию ;  
 Language: Orthography – язык: орфография;  
 Language: Phonology – язык: фонология;  
 Semantic Processing – семантическая обработка;  
 Syntactical Processing – синтаксическая обработка;  
 Working memory – кратковременная память;  
 Music processing – обработка музыки;  
 Cognitive reasoning – когнитивные умозаключения.

Последние данные нейровизуализации позволили предположить, что лобные доли организованы в иерархию, благодаря которой управление поддерживается в определенных (каудальных) областях, когда решения принимаются на более конкретных уровнях действия. Мы обнаружили, что повреждение фронтальных областей негативно сказывается на принятии решений о действии на уровне абстракции, который зависит от локализации повреждения (повреждения верхней области влияют больше на абстрактные задачи, каудальные повреждения – на конкретные задачи). Кроме того, это отрицательно сказывается на выполнении тех задач, которые требуют абстрактного управления. На основе уровня управления выявлены две смежные области, что согласуется с последними результатами функционального магнитно-резонансного исследования. Эти результаты напрямую свидетельствуют о рострально-каудальной иерархической организации лобных долей» [13].

Наконец, Дерик Боундс (Deric Bownds) предложил следующие модели организации фронтальных долей [14] (рис. 7):



Рис.7 [14]

Domain-specific maintenance – специфичные для области задачи

Domain-general monitoring – общий мониторинг области

Abstract plan/schema internal monitoring – внутренний мониторинг абстрактной схемы

Sensory control – органолептическое управление

Contextual control – контекстуальное управление

Episodic control – эпизодическое управление

Branching control – управление с разветвлением  
First order relationship – связь первого порядка  
Concrete features – конкретные свойства  
Second order relationship – связь второго порядка  
Response conflict – конфликт реакций  
Feature conflict – конфликт свойств  
Dimension conflict – конфликт размерности  
Context conflict – контекстуальный конфликт

Предыдущие рассуждения позволяют предположить, что префронтальный холон, о котором мы говорим в 1.4 (ВА6 и ВА9 и ближайшие области) управляет дивергентным мышлением при помощи холархической структуры, поэтому теменной холон вынужден управлять конвергентным мышлением.

### 1.6. Фронтальная и теменная таламическая афферентация

Кивит и Куйперс (Kievit and Kuypers) впрыскивали пероксидазу в различные части фронтальной коры 25 макак-резус. «Ретроградно» помеченные таламические **нейроны** образовали продольные полосы, некоторые из которых пересекали внутреннюю мозговую пластинку таламуса и тянулись от одного ядра таламуса до другого. На основе этих результатов фронтальная кора делилась на **семь** поперечных полос, получающих разную афферентацию от семи продольных полос таламических нейронов. Самая верхняя поперечная полоса получает афферентацию от самой ближней к центру таламической полосы, которая ориентирована вертикально и тянется практически по всей срединной части MD внутри медиальной подушки. Поперечные полосы, расположенные в каудальной области, получают афферентацию от таламических полос с более латеральным положением, которые частично расположены в VL и демонстрируют увеличивающийся наклон относительно горизонтальной линии. Более того, эти части различных полос, расположенные вдоль дорсальной и латеральной границы таламуса, проецируются на медиальные участки поперечных корковых полос, т.е. вдоль медиальной границы фронтальной доли, в то время как другие части, расположенные вентромедиально в таламусе, проецируются на латеральные участки этих полос, т.е. вдоль латеральной границы фронтальной доли [...] Эти данные позволяют по-другому взглянуть на организацию таламуса и предположить, что эта структура содержит матрицу продольных колонок клеток, которые в некоторых случаях пересекают определенные границы ядер и могут представлять собой базовые элементы структуры таламуса по отношению к таламо-корковым связям» [15].

Анатомические исследования до сих пор показывали, напротив, что теменные таламические афферентации связаны с таламическими ядрами, а не с таламическими полосами, и теперь об этом написано в учебниках по основам анатомии. Очевидна интеграция поступающих органолептических данных для префронтального холона и теменного холона. Если последний управляет конвергентным мышлением, то мы можем предположить, что поступающая органолептическая информация, которая организуется ядрами таламуса, полезна для интеграции конкретных объектов в теменных холонах. Так как префронтальный холон управляет дивергентным мышлением, можно предположить, что поступающая органолептическая информация, которая организуется таламическими полосами, должна быть полезна для того же дивергентного мышления, т.е. также должна определять абстрактные категории и предикаты вместо конкретных объектов.



### 1.7. Фронтальные и теменные взаимосвязи и теория фронтально-теменной интеграции

Отметим, что Джунг и Хайер (Jung, Haier) подтверждают вопрос: «Существует ли биология интеллекта, которая характерна для нервной системы нормального человека? Здесь мы рассматриваем 37 современных исследований нейровизуализации, в которых сделана попытка ответить на данный вопрос, поставленный Халстедом (Halstead, 1947) во время изучения связи мозга и поведения посредством интеллекта и мыслительных способностей. Изучая результаты функциональной (функциональное магнитно-резонансное исследование, позитронно-эмиссионная томография) и структурной (магнитно-резонансная спектроскопия, диффузионно-тензорная методика визуализации, воксель-базируемая морфометрия) нейровизуализации, мы отметили поразительное совпадение, которое позволяет предположить, что изменения в распределенной сети прогнозируют индивидуальные различия, обнаруженные в задачах по исследованию интеллекта и построения логических рассуждений. Мы описываем эту сеть как теорию фронтально-теменной интеграции (ТФТИ). ТФТИ модель включает по Бродману: дорсолатеральную префронтальную кору (поля 6, 9, 10, 45-47), нижнюю теменную (поля 39, 40) и верхнюю (поле 7) теменную извилину, переднюю поясную часть (поле 32), области височной (поля 21, 37) и затылочной (поля 18, 19) долей. Включаются и области белого вещества (дугообразный пучок). ТФТИ изучается в свете открытий из области исследования повреждений тела, включая раны от попадания снарядов, фронтальную лоботомию/лейкотомию, височную лобэктомию и повреждения, которые приводят к нарушению речи (афазии), и результатов визуализации, в которых идентифицируются области мозга, которые управляются генетической информацией. В целом, мы делаем вывод, что с помощью современных методов нейровизуализации начинают проясняться вопросы биологии интеллекта. Мы предполагаем, что ТФТИ учитывает множество современных эмпирических наблюдений, которые связывают индивидуальные различия в тестах на уровень интеллекта с различиями в структуре и функциях мозга. Более того, модель дает среду для проверки новых гипотез в будущих экспериментах» [16].

Колом и Хайер (Colom, Haier): «Теория фронтально-теменной интеграции (ТФТИ) называет несколько распределенных по мозгу областей существенными для интеллекта. Эта теория получена из ранее опубликованных исследований при помощи методов нейровизуализации и тестов познавательной способности. Здесь мы проверяем эту теорию на основе выборки молодых здоровых взрослых людей (N=100). Получены магнитно-резонансные изображения, которые проанализированы при помощи воксель-базированной морфометрии. Основные результаты согласуются с ТФТИ, подтверждая, что общий уровень интеллектуального развития задействует многочисленные области коры по всему мозгу. Ключевые области включают в себя дорсолатеральную префронтальную кору, центр Брока и область Вернике, соматосенсорную ассоциативную кору и визуальную ассоциативную кору. Далее, оценки кристаллизованного и пространственного интеллекта, которые получены при статистически исключенном уровне интеллектуального развития, относятся к одним и тем же нескольким областям мозга, что и общий уровень интеллекта, но также имеют некоторые особенности» [17].

Юнг, Хайер и др. (Jung, Haier) подтверждают: «Креативность давно является предметом исследования философов, психологов и специалистов в области нейронауки. В последнее время основные работы посвящаются когнитивным процессам, которые, скорее всего, важны для демонстрации новизны и полезности в



рамках данного социального контекста. Один из таких когнитивных процессов – дивергентное мышление – это процесс, во время которого происходит экстраполирование многих возможных ответов на исходный стимул или целевое множество данных. Мы стремились связать известные показатели дивергентного мышления и креативные достижения (анкета творческих достижений – АТД) с толщиной коры у здоровых молодых людей ( $23,7 \pm 4,2$  лет). Три независимых эксперта оценивали результаты творческого труда каждого из участников при помощи согласованной методики оценки (Amabile, 1982). В результате был получен комплексный индекс креативности (КИК). С помощью сканера 1.5 Tesla Siemens были получены структурные магнитно-резонансные изображения. Реконструкция коры и объемная сегментация выполнялась при помощи программного комплекса FreeSurfer. Область в пределах язычной извилины имела отрицательную корреляцию с КИК. Правая задняя часть поясной извилины имела положительную корреляцию с КИК. В отношении АТД – нижняя левая орбито-фронтальная область соответствует лучшим творческим достижениям; повышенная толщина коры соответствует более высоким оценкам по АТД в правой угловой извилине. Это первая работа, связывающая толщину коркового слоя с психометрическими измерениями креативности. Распределение областей мозга, связанных с дивергентным мышлением и творческими достижениями, предполагает, что когнитивное управление потоком информации между областями мозга может иметь ключевое значение для понимания креативного познания. (Hum Brain Mapp, 2010; 2009, Wiley-Liss, Inc.” [18])

Джонсон, Юнг, Колом и Хайер (Johnson, Jung, Colom, Haier) подтверждают: «Все большее подтверждение находит связь психометрических измерений общего уровня интеллекта и логического мышления с региональной структурой мозга и функцией, оцениваемой при помощи различных методов нейровизуализации. Когнитивные измерения, не зависящие от общего уровня интеллекта, можно также определять психометрически и исследовать на любые нейроанатомические связи. Мы исследовали два таких измерения: вращательно-вербальное и фокус-диффузионное. С помощью структурной магнитно-резонансной визуализации и воксель-базированной морфометрии исследованы две выборки с целью определить взаимосвязь между белым и серым веществом для двух измерений. В соответствии со статистическим сопряжением обеих выборок ( $N = 45$ ;  $p < 0,001$ ), существуют корреляции с серым веществом в полях Бродмана 20 и 9 (где имеется вращательно-вербальное измерение) и в поле 18 (фокус-диффузия). Существуют корреляции белого вещества с вращательно-вербальным измерением вблизи полей Бродмана 18, 40, 39, 10, 8 и 4 и с измерением фокуса-диффузии вблизи поля 5 и правой суб-лобарной миндалины. Эти корреляции могут способствовать пониманию индивидуальных различий проявления интеллекта» [19].

### 1.8. Передняя доля и решение задач

Димитров, Графман и Холлэнджел (Dimitrov, Grafman, Hollangel): «Решение ежедневных задач сопровождается несоциальными, социальными и эмоциональными процессами и полагается на социальные и практические знания. Выполнен обзор серии исследований, затрагивающих повреждения, приобретенные во взрослом возрасте, и нейропсихические расстройства. Эти исследования были посвящены решению проблем в реальных задачах, которые включают генерацию ряда решений задачи и выбор предпочтительных решений задачи. Нарушение функции решения задач описаны для группы пациентов с повреждением передней лобной доли, синдромом Туретта и синдромом Аспергера. В отличие от них, здоровые пожилые люди не имели проблем

при решении тех же задач. Возможный вклад несоциальных и эмоциональных навыков и знаний, приобретенных из опыта, рассматриваются в связи с ежедневной деятельностью. Многочисленные когнитивные/эмоциональные пути решения задач ежедневной жизни – сложная задача и с точки зрения понимания природы важнейших процессов, и с точки зрения разработки адекватных методов управления и восстановления» [20].

«Префронтальная кора играет особенно важную роль в социально-когнитивном поведении человека. Количественно определить нарушения в этой области у пациентов с повреждениями лобной доли при помощи стандартных средств психологии оказалось трудно. Мы попросили группу пациентов с повреждениями лобной доли заполнить опросник, содержащий ряд сценариев, отражающих ежедневные социальные задачи и их возможные решения. Пациенты должны были ранжировать каждый из четырех возможных сценариев решения каждой задачи в зависимости от их эффективности. Выборка состояла из 27 здоровых респондентов, 33 пациентов с очаговыми повреждениями лобной доли (ПЛД) и 3 пациентов с фронтально-лобным слабоумием (СЛД). Показатели опросника пациентов с ПЛД сравнивались с их показателями в традиционных нейропсихологических тестах. Результаты показали отсутствие корреляции результатов опросника пациентов с СЛД и опросника здоровых людей. Кроме того, около половины опросников пациентов с ПЛД существенно отличались от опросников здоровых респондентов. Те же самые пациенты с ПЛД получили самые низкие результаты (по сравнению с пациентами с ПЛД, чьи оценки по опроснику были аналогичны оценкам здоровых людей) в традиционных нейрофизиологических заданиях, которые являлись чувствительными к дисфункции лобной доли. Очевидная связь между локализацией повреждения на передней доле и результатами опросника отсутствует. Эти выводы позволяют предположить, что некоторые пациенты с повреждениями префронтальной доли могут иметь нарушенное социальное мышление, которое можно непосредственно обнаружить по результатам традиционных психологических исследований наподобие рассмотренного опросника» [21].

Санчез-Бенавидес и др. (Sánchez-Benavides) подтверждают: «Умеренные нарушения когнитивных функций (УНКФ) считается переходным состоянием между нормальным процессом старения и болезнью Альцгеймера. У многих пациентов с УНКФ наблюдаются нарушения в многочисленных нейрофизиологических областях, включая способность к целенаправленной деятельности. Данное исследование направлено на изучение истончения коры передней доли у пациентов с УНКФ и у здоровых людей и его связи со способностью решать задачи. Нейрофизиологическую оценку и магнитно-резонансную томографию прошли 23 пациента с УНКФ и 30 пожилых представителей контрольной группы. Толщина коры оценивалась при помощи FreeSurfer. Способность решать задачи оценивалась при помощи теста «Tower of London». У пациентов с УНКФ обнаружено глобальное истончение коры. В частности, обнаружено истончение коры левой передней доли и задней части поясной извилины. После учета возраста, образования, мини-диагностики психических состояний, средней толщины коры других долей частные корреляции показали существенные отрицательные корреляции между толщиной лобной доли и результатами целенаправленной деятельности контрольной группы. Эта неожиданная связь не наблюдалась у группы с УНКФ, что позволяет предположить, что атрофия коры лобной доли головного мозга у пациентов с УНКФ вызывает обусловленную патологией связь с высокими результатами целенаправленной деятельности, что качественно отличается от наблюдений в отношении здоровых пожилых людей» [22].

### 1.9. Ненужность индивидуальной константы в классической логике

Рассмотрим формальную теорию Мендельсона К для исчисления предикатов первого порядка, моделью которой является стандартная логика взаимосвязей [23]. Пусть

- Алфавит:  $(\cdot), A_1^1, A_1^2, \dots, A_2^1, A_2^2, \dots, \dots, f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots, a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots \sim, \supset$ .

- Синтаксические правила: 1)  $a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots$  – члены предложения; 2) если  $t_1, \dots, t_n$  – члены предложения, то  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  – член предложения; 3) если  $t_1, \dots, t_n$  – члены предложения, то  $A_i^n(t_1, \dots, t_n)$  – предложение; 4) если  $\alpha$  – предложение, то  $(x_i)\alpha$  – предложение; 5) если  $\alpha$  – предложение, то  $\sim\alpha$  – предложение; 6) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то  $\alpha\supset\beta$  – предложение; 7) К предложений можно построить только в соответствии с 1), ..., 6).

- Определения: D1) если  $\alpha$  – предложение, то пусть  $(Ex_i)\alpha$  be  $\sim((x_i)\sim\alpha)$ ; D2) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то пусть  $\alpha\vee\beta$  будут  $(\sim\alpha)\supset\beta$ ; D3) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то пусть  $\alpha\wedge\beta$  будут  $\sim(\alpha\supset(\sim\beta))$ ; D4) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то пусть  $\alpha\wedge\beta$  будут  $\sim((\alpha\supset\beta)\supset(\sim(\beta\supset\alpha)))$ ; D5) пусть  $x_1, x_2, \dots$  – переменные; D6) Если дано  $(x_i)\alpha$ , пусть  $(x_i), x_i, \alpha$  – соответственно квантор общности, переменная величина  $(x_i)$ , область действия  $(x_i)$ ; D7) Полагаем, что появление переменной в предложении является связанным, если это переменная квантора общности или она принадлежит области действия квантора общности; D8) пусть появление переменной является свободным тогда и только тогда, когда оно не является связанным; D9) пусть  $\alpha(x_i, x_j, \dots)$  означает, что  $x_i, x_j, \dots$  могут появляться свободно в  $\alpha$ ; D10) пусть член  $t_i$  свободный для  $x_j$  в  $\alpha(x_j)$ , если нет свободных появлений  $x_j$  в  $\alpha(x_j)$  в области действия квантора общности  $(x_k)$ , когда  $x_k$  появляется в  $t_i$ ; D10) пусть  $a_1, a_2, \dots$  – индивидуальные константы; D11) пусть  $f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots$  – функциональные символы, и, таким образом,  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  – операция над  $t_1, \dots, t_n$ , достижение которой является целью;

- Аксиомы: A1) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то  $\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$ ; A2) если  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – предложения, то  $(\alpha\supset(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\gamma))$ ; A3) если  $\alpha$  и  $\beta$  – предложения, то  $((\sim\beta)\supset(\sim\alpha))\supset(((\sim\beta)\supset\alpha)\supset\beta)$ ; A4)  $(x_j)\alpha(x_j)\supset\alpha(t_j)$ , если  $t_j$  является свободным для  $x_j$  в  $\alpha(x_j)$ ; A5)  $(x_j)(\alpha\supset\beta(x_j))\supset(\alpha\supset(x_j)\beta(x_j))$ , если  $\alpha$  не имеет свободных появлений  $x_j$ .

- Схемы умозаключений: MP)  $\alpha, \alpha\supset\beta \vdash \beta$  (“ $\vdash$ ” означает «отсюда следует»); Gen)  $\alpha \vdash (x_i)\alpha$ .

Мендельсон доказывает, что каждое предложение К полностью эквивалентно другому предложению К без «индивидуальных констант» и функциональных символов [24]. Он приводит следующие утверждения для исключения «индивидуальных констант» и функциональных символов из предложения:

а) Если  $x_i$  и  $A_j^1$  не появляются в изолированном предложении  $\beta(a_k)$ , то  $\beta(a_k)$  логически эквивалентно  $(Ex_i)A_j^1(x_i)\supset(Ex_i)(A_j^1(x_i)\wedge\beta(x_i))$ ;

б) Если  $x_i$  и  $A_j^{n+1}$  не появляются в изолированном предложении  $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$ , то  $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$  логически эквивалентно  $(Ex_i)A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\supset(Ex_i)(A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\wedge\beta(x_i))$ .

Возможность исключить «индивидуальную константу» из предложения и использовать предикаты или связи вместо них, очевидно, сильно упрощает решение задач в классической логике. Рассмотрим вероятность того, что мозг может использовать эту стратегию при решении задач, когда конвергентного мышления теменного холона недостаточно. Лобная доля участвует либо в дивергентном мышлении (см. 1.5), либо в решении задач (см. 1.6). Таким образом, префронтальный холон может получать нерешенные задачи от теменного холона, а затем он может заменять отдельные члены

таких нерешенных задач на более абстрактные предикаты, логически структурированные, как мы видели в классической логике, и, наконец, он может возвращать нерешенную задачу теменной холону в более простой для решения форме. Этот цикл может носить итерационный характер с растущим уровнем абстракции, пока задача не будет решена.

## 2. Основная гипотеза и некоторые выводы

Все вышеприведенные рассуждения позволяют сформулировать рабочую гипотезу процесса решения задач в мозге. Приведем ее в виде рисунка (рис. 8).

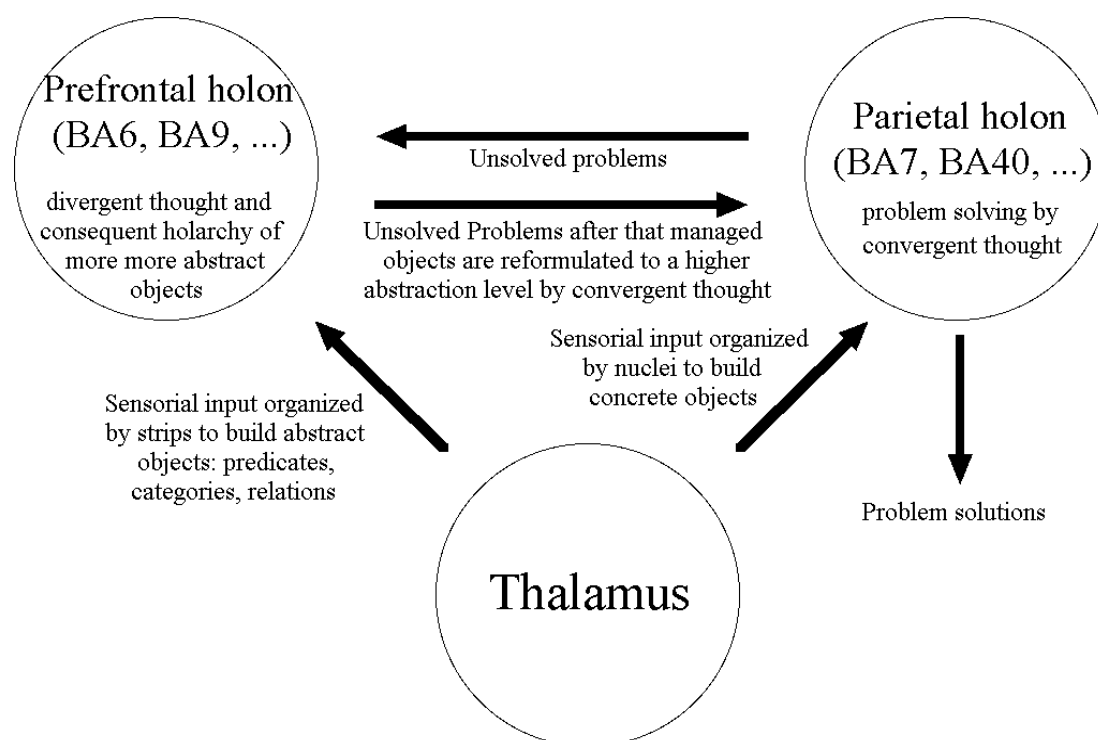


Рис.8.

Prefrontal holon (BA6, BA9, ...) – префронтальный холон (BA6, BA9, ...)

Divergent thought and consequent holarchy of more more abstract objects – Дивергентное мышление и следующая из него холархия все более и более абстрактных объектов

Unsolved problems – нерешенные задачи

Unsolved problems after that managed objects are reformulated to a higher abstraction level by convergent thought – нерешенные задачи после преобразования на более высокий уровень абстракции за счет конвергентного мышления

Parietal holon (BA7, BA40, ...) – теменной холон (BA7, BA40, ...)

Problem solving by convergent thought – решение задачи за счет конвергентного мышления

Sensorial input organized by strips to build abstract objects: predicates, categories, relations – органолептическая информация на входе, организованная полосами для построения абстрактных объектов: предикат, категорий, связей

Sensorial input organized by nuclei to build concrete objects – органолептическая информация на входе, организованная ядрами для построения конкретных объектов

Problem solutions – решения задач

Thalamus – таламус

Теменной холон (ВА7, ВА40 и т.д.) может быть вершиной процесса распознавания мозгом внешних объектов. Чтобы показать построение конкретного объекта с помощью теменного холона по сенситивным таламическим путям, приведем следующий упрощенный рисунок (рис. 9).

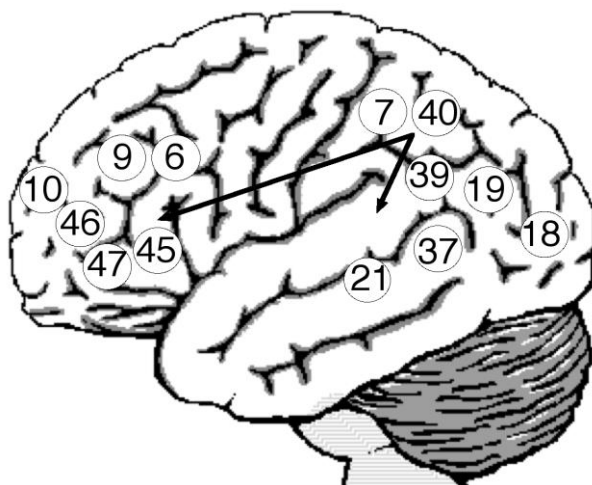


Рис. 9.

Мы видели, что теменной холон может работать с конкретным объектом при решении задачи при помощи конвергентного мышления. Решение задач теста на уровень интеллектуального развития (IQ тест) – типичный пример типологии работы этого холона. Если не появляется решения рассматриваемой задачи, то мы считаем, что активизируется префронтальный холон по путям, показанным на следующем рисунке 10 (см. 1.5).

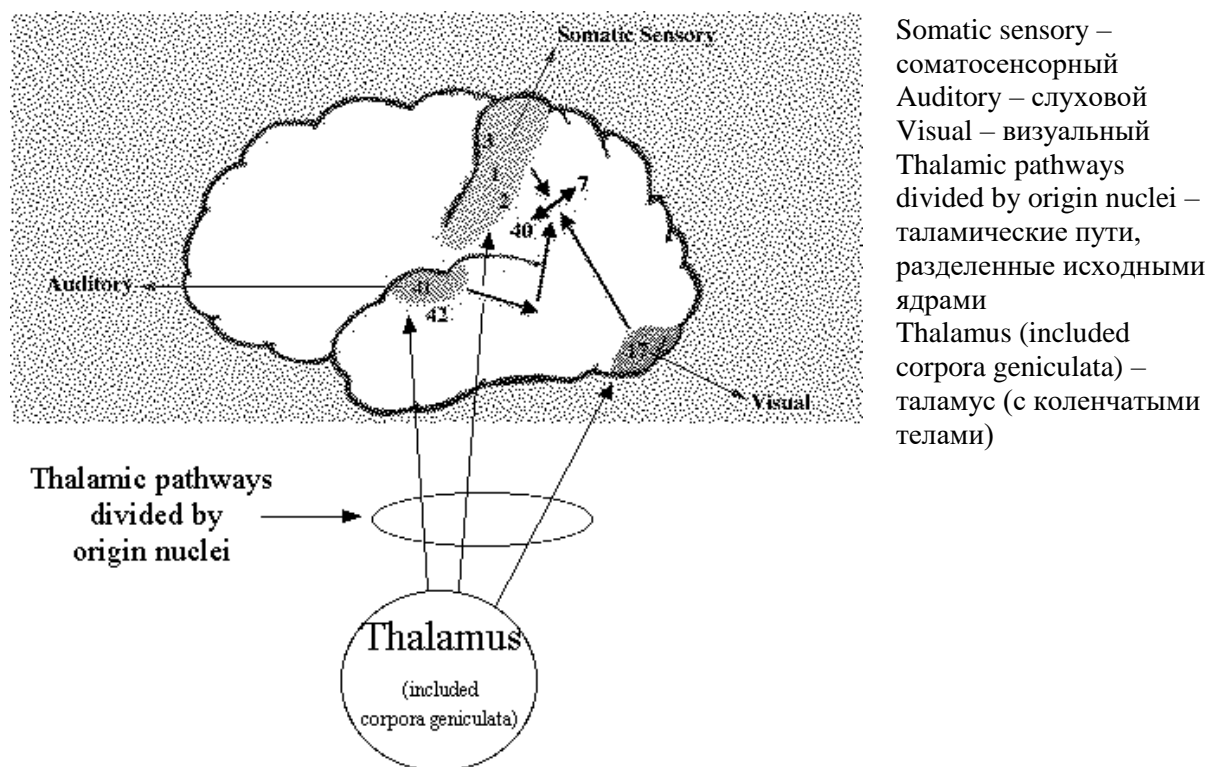


Рис. 10

Префронтальный холон получает входной сигнал от таламуса по путям, разделенным полосами, а не ядрами. Мы полагаем, что пути передачи префронтальных входных сигналов от таламуса организованы по полосам, а не по ядрам, т.к. их интеграция должна генерировать предикаты, категории, связи, абстрактные объекты, но не конкретные объекты. На следующем рисунке показаны известные пути передачи префронтальных входных данных от таламуса, организованные по полосам:

Существует холархия для построенного абстрактного объекта в префронтальном холоне, которая имеет анатомический эквивалент. Мы уже наблюдали это на рис.7.

Отметим, что локализация конкретного свойства на рис. 12 приблизительно соответствует концу путей от теменного холона к префронтальному холону (рис. 11).

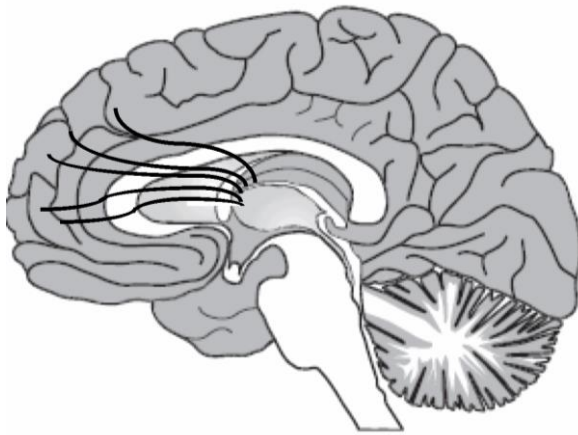


Рис. 11

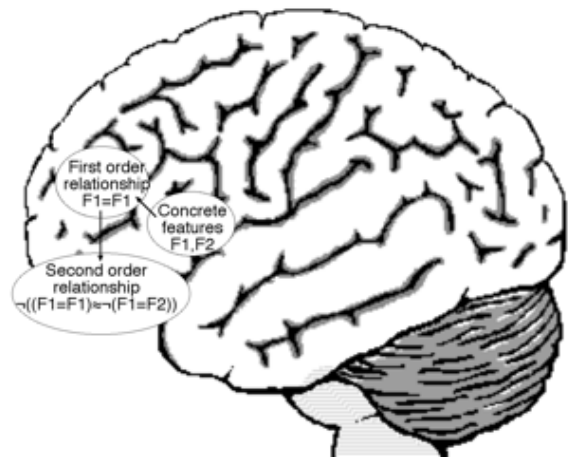


Рис.12.

First order relationship – связь первого порядка

Concrete features – конкретные свойства

Second order relationship – связь второго порядка

Отметим также, что связи первого и второго порядка расположены приблизительно на концах путей от таламуса к префронтальному холону. Эти данные подтверждают гипотезу разработки в абстрактных объектах таламических путей, организованных «полосками». Другое подтверждение предполагаемой префронтальной холархии находим в словах Бадре (Badre): «Когнитивный контроль поддерживает гибкое поведение за счет выбора действий, согласованных с нашими целями и соответствующих нашему окружению. Префронтальная кора выполняет известную роль в когнитивном управлении, а исследование в области функциональной организации префронтальной коры должно внести ясность в наше представление об архитектуре управления. Популярная в последнее время гипотеза заключается в том, что роstralно-каудальная ось префронтальной коры поддерживает иерархию управления, а то время как задне-передняя префронтальная кора является посредником прогрессивно абстрактного управления на более высоком уровне. В этом обзоре рассматривается подтверждение роstralно-каудального градиента функции префронтальной коры и теорий, предложенных для учета этих результатов, включая общность областей в оперативной памяти, сложность связей, временную организацию поведения и абстрактную иерархию представления. Различия между этими концепциями рассматриваются как база для будущих исследований» [25].

Теперь рассмотрим совместно рисунки 10 и 12 (рис. 13) и рисунки 11 и 12 (рис. 14):

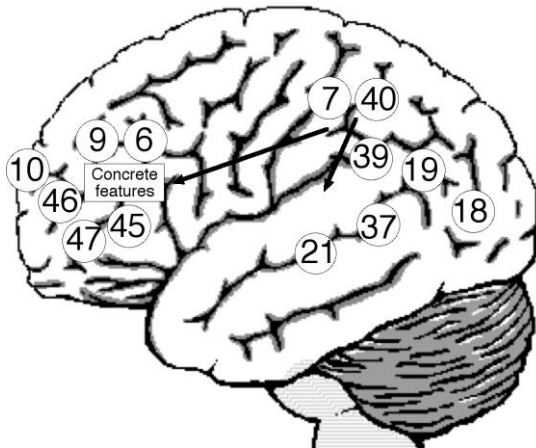


Рис. 13.

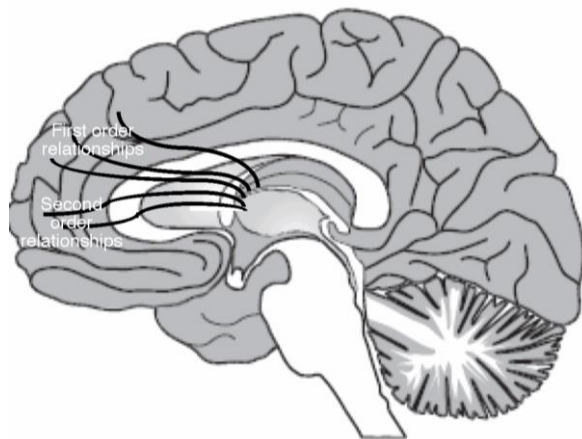
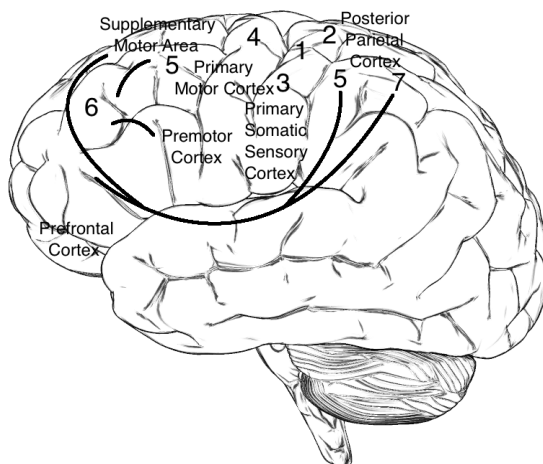


Рис. 14

Рис.13 и 14 подтверждают нашу рабочую гипотезу.

Теперь рассмотрим описание поля Бродмана 9 ВА 9: «... в отличие от поля Бродмана 6-1909, поле 9 обладает четким внутренним гранулярным слоем (IV); в отличие от поля Бродмана 6 или поля Бродмана 8-1909, его внутренний пирамидальный слой (V) можно разделить на два подслоя, внешний слой 5a из плотно упакованных средних по размеру ганглионарных клеток, который частично сливается со слоем IV, и внутренний более прозрачный и с меньшим числом клеток слой 5b. Пирамидальные клетки подслоя 3b внешнего пирамидального слоя III меньше по размеру и распределены менее плотно. Внешний гранулярный слой II узкий, с меньшим числом гранулярных клеток» [26]. Четко выделяющийся внутренний гранулярный слой IV в поле ВА9, которого нет в ВА6, предполагает важную входную функцию того же ВА6. Таким образом, ВА9 может выполнять первую интеграцию данных ВА45, ВА46, ВА47 (конкретные свойства) с данными ВА10 (связи второго порядка) и ВА32 (связи первого порядка). ВА6 может быть интерактивной целью ВА9 для замены конкретного свойства эквивалентным описанием с позиций связи первого и/или второго порядка.

Поле Бродмана 6 строго связано с первичной двигательной корой ВА4 и, скорее всего, оно играет роль в планировании сложных координированных движений (применяются ли при этом найденные решения?). Полезно взглянуть на некоторые известные нейронные пути, которые задействуют двигательную кору:



Supplementary motor area –  
дополнительная моторная область  
Primary motor cortex – первичная  
двигательная кора  
Posterior parietal cortex – задняя  
теменная кора  
Primary somatic sensory cortex –  
первичная соматосенсорная кора  
Premotor cortex – премоторная кора  
Prefrontal cortex – префронтальная кора

Рис.15.

Наша рабочая гипотеза полностью согласуется с этими утверждениями. Чрезвычайно интересно «наложить» результаты:

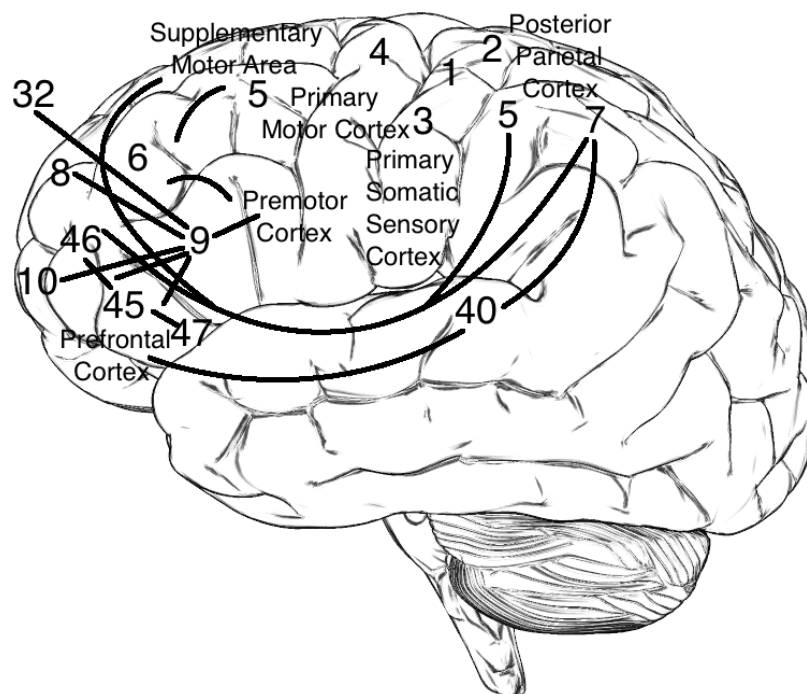


Рис.16.

Автор приглашает: «Начнем обсуждение!»

### Литература

1. A. Koestler , *The Ghost in the Machine*, Hutchinson, London, U.K., 1967, 48.
2. K. Wilber K., *Introducing Ken Wilber: Concepts for an Evolving Word*, Lew Howard, Bloomington, Ind., U.S.A., 2005.
3. S. Grobbelaar , and M. Ulieru M., Holonic Stigmergy as a Mechanism for Engineering Self-Organizing Applications, *Proceedings of ICINCO 2006 – 3rd International Conference of Informatics in Control, Automation and Robotics*, Setubal, Portugal, 5-10, (2006).
4. B. Kolb , I.Q. Whishaw, *Fundamentals of human neuropsychology*. Worth, New York, NY, U.S.A., 2003.
5. J.C. Horton, D.L. Adams D, The cortical column: a structure without a function, *Philos. Trans. R. Soc. Lond., B, Biol. Sci.* **360**, no. 1456, 837–62 (2005).
6. Wikipedia: *Cortical column*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Cortical\\_column](http://en.wikipedia.org/wiki/Cortical_column)
7. D. Lloyd, What do Brodmann areas do? Or: Scanning the Neurocracy (personal communication), *Program in Neuroscience*, Trinity College, Hartford, CT, U.S.A., (2007).
8. J.P. Guilford, Creativity, *American Psychologist* **5**, no. 9, 444–454, (1950).
9. University of Washinton, Strategies of Divergent Thinking, <http://faculty.washington.edu/ezent/imdt.htm>, (2009)
10. C. Wade, C. Tavis, *Invitation to Psychology*, Pearson - Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, U.S.A., 2008, 258.
11. Vanderbilt University, Musicians use both sides of their brains more frequently than average people, <http://www.physorg.com/news142185056.html>, (2006)



12. D. Stuss et al., Subtle neuropsychological deficits in patients with good recovery after closed head injury, *Neurosurgery* **17**, 41-47, (1985).
13. D. Badre et al., Hierarchical cognitive control deficits following damage to the human frontal lobe, *Nature, Neuroscience* **12**, 515 – 522, (2009).
14. D. Bownds, Models of Cognitive Control in Prefrontal Cortex, *Deric Bowd's Mindblog*, <http://mindblog.dericbownds.net/2008/05/models-of-cognitive-control-in.html>, (2008-5-30).
15. J. Kievit, G. J. M. Kuypers, Organization of the thalamo-cortical connexions to the frontal lobe in the rhesus monkey, *EXPERIMENTAL BRAIN RESEARCH* **29**, no. 3-4, 299-322, (1977).
16. R.E. Jung, R. J. Haier, The Parieto-Frontal Integration Theory (P-FIT) of intelligence: converging neuroimaging evidence, *Behavioral and Brain Sciences* **30**, no. 2, 135-154, (2007).
17. R. Colom, R.J. Haier, Gray matter correlates of fluid, crystallized, and spatial intelligence: Testing the P-FIT model, *Intelligence* **37**, no. 2, 124-135, (2009).
18. R.E. Jung, R.J. Haier et al., Neuroanatomy of creativity, *Human Brain Mapping* **31**, no. 3, 398-409, (2010).
19. W. Johnson, R.E. Jung, R. Colom, R. J. Haier, Cognitive abilities independent of IQ correlate with regional brain structure, *Intelligence* **36**, no. 1, 18-28, (2008).
20. S. Channon, Frontal lobe dysfunction and everyday problem-solving: Social and non-social contributions, *Acta Psychologica* **115**, no. 2-3, 235-254, (2004).
21. M. Dimitrov, J. Grafman, C. Hollangel, The effects of frontal lobe damage on everyday problem solving, *Cortex* **32**, no. 2, 357-366, (1996).
22. G. Sánchez-Benavides et al., Problem-solving abilities and frontal lobe cortical thickness in healthy aging and mild cognitive impairment, *J Int Neuropsychol Soc* **16**, no. 5, 836-845, (2010).
23. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, U.S.A., 1964, §2.3.
24. *Ibid.*, **Lemma** 3.46.
25. D. Badre, Cognitive control, hierarchy, and the rostro-caudal organization of the frontal lobes, *Trends Cogn. Sci.* **12**, no. 5, 193-200, (2008).
26. Wikipedia: *Brodmann area 9*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Brodmann\\_area\\_9](http://en.wikipedia.org/wiki/Brodmann_area_9)

**Артуро Грациано Граппоне**, Др. Родился в Италии. В 1981 г. получил медицинское образование (MD), с 1986 г. – невролог со специализацией в нейропсихологии, член общества Красного Креста с 1987 г. со специализацией в области медицины катастроф, психотерапевт с 1990 г. Работает в больнице Монтеротондо в качестве терапевта, невролога и психиатра с 1990 г. Преподает нейронауки в Римском университете (Rome Second University) с 1997 г. Главный редактор международного обзорного журнала «Metalogicon», приглашенный член CHAOS, EURO, EUROPT. Является разработчиком Macintosh с 2007 г. Занимается научными исследованиями в области чистой логики и логики в прикладной математике (под руководством M.Malatesta с 1977 г.), в области биологической психодинамики Matte Blanco (под руководством A.Jaria с 1987 г.), в области систем предупреждения (под руководством D.M. Dubois с 1997 г.), в области нанонаук и квантовой механики (под руководством S. Santoli с 2006 г.). Автор около 40 работ. Обладатель награды CASYS '2000 Best Paper Award от CHAOS за лучшую работу в 2000 г. и награды за выдающийся вклад в науку I.I.A.S. Outstanding Scholarly Contribution Award в 2002 г. и 2004 г., а также в последующие годы. Является председателем на международных конгрессах по исследованиям операций и систем предупреждения. Более подробно см. [www.grappone.it](http://www.grappone.it) .  
E-mail: [a.grappone@mclink.it](mailto:a.grappone@mclink.it)

## **Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015)**

**L. Lotero<sup>1</sup>, E. del Rosario<sup>2</sup>, G.-W. Weber<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Universidad Pontificia Bolivariana,  
050031, Medellin, Colombia

<sup>2</sup> Operations Research Society of the Philippines  
1110 Quezon City, Metro Manila, Philippines

<sup>3</sup> Institute of Applied Mathematics, Middle East Technical University,  
06531 Ankara, Turkey

Some recent Operational Research events that took place in Glasgow and Edinburgh, United Kingdom, specifically those held during the EURO 2015 and two of its satellite events, Workshops: the EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (EUROPT Workshop 2015) and EURO Operational Research for Development – International Federation of Operational Research Societies Workshop (EURO ORD – IFORS Workshop) show how Operational Research theory has and is continuing to improve decision processes in a constantly changing and unstable World. The entire conference season is dealt with, while paying particular attention to OR for development and developing countries, continuous optimization and the social aspects of the various events.

*Key words:* operational research, optimization, developing countries, developed countries

### **1. Introduction**

In addition to the challenges of big volumes of disparate data on one hand, and enhanced technological and computational resources on the other, societies now have to deal with more uncertainty in a rapidly changing environment. The usage of decision-making tools and methodologies for a non-stable world has thus become a necessity for practitioners, stakeholders, researchers and academics [1–3].

In an effort to provide a forum for discussing these issues, a series of conferences and workshops dedicated to the theory and application of Operational Research methodologies in uplifting living conditions in developing and developed countries, among others, had been organized.

### **2. EURO Conference**

The European Conference on Operational Research, organized by the Association of European Operational Research Societies (EURO; <https://www.euro-online.org/>) within the International Federation of Operational Research Societies (IFORS; <http://ifors.org/ewg-ord/>) is a major conference that gathers more than 2000 participants each year, between the IFORS triennial conferences. For 2015, the EURO conference was held at the University of Strathclyde in Glasgow from 12<sup>th</sup> to 15<sup>th</sup> of July 2015 and the main theme of the conference was “Making an Impact”. This conference was prepared in conjunction with the OR Society of the United Kingdom [4].

The conference program included excellent and worldwide known plenary speakers in Operational Research. Ralph Tyrrell Rockafellar, designated as the IFORS Distinguished Lecturer for the Conference, talked about risk and reliability in stochastic optimization. Sir Alan Wilson gave an overview of the challenges in solving long-term complex problems in

cities. Maria Grazia Speranza presented the history and trends in transportation and logistics. All the plenary talks were given at the highly solemn Barony Great Hall with great success.

Keynote and tutorial speakers gave talks about diverse areas and trends of operational research. These included: “Automatic Algorithm Configuration” (Thomas Stuetzle), “Business Analytics” (Michael Trick); “Regional Innovation Ecosystems” (Markku Markkula); “The Relationship Between OR and the Government” (Tony O’Connor); “Criterion Space Search Methods” (Martin Savelsbergh); “Modern Supply Chain Planning” (Stefan Nickel); “Evacuation Planning Models” (Horst Hamacher); “Healthcare System Optimization” (Eva K. Lee); “Behavioural Operational Research” (Raimo P. Hämäläinen); “OR and Bioinformatics” (Jacek Blazewicz); and “OR Education” (Ariela Sofer).

A very interesting feature of the conference was the series of participative activities related to *Making an Impact*, with the idea of making the practice of OR in the real world more effective. Some of the activities included workshops, seminars and tutorials dedicated to the practice of OR, and case studies in OR and analytics. Activities bridging the academic-practitioner divide included poster and round table discussions, speed networking, mentoring clinics featuring one on one sessions with experienced practitioners. In the area of practice, the European Excellence in Practice Award (EEPA) was given to Jesse O’Hanley (University of Kent, UK) for his work on *Optimizing River Connectivity Restoration*. The EURO Gold Medal 2015 was awarded to Alexander Schrijver (CWI, Amsterdam, The Netherlands).

### 3. EURO working groups

The EURO association also has a remarkable number of different working groups devoted to specific areas of Operational Research (<https://www.euro-online.org/web/pages/1458/euro-working-groups>). Below are the highlights of two such workshops held prior to the main EURO 2015 conference.

#### 3.1. EUROPT Workshop

EUROPT is a EURO working group that aims to promote and facilitate communication links among researchers working in the area of continuous optimization (<http://europt.iam.metu.edu.tr/>). Since its founding in 2000, EUROPT has continuously contributed to the international OR community.

The annual EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (EUROPT Workshop) was held during July 8-10, 2015, in Edinburgh, Scotland (<http://www.maths.ed.ac.uk/hall/EUROPT15/>), right before and under collaboration with the main EURO Conference. At this opportunity, the workshop gathered some famous and leading researchers in the field of mathematical optimization along with many specialists from the different research areas as well as young academicians. EUROPT Fellow 2015 Panos Pardalos from the Department of Industrial and Systems Engineering at the University of Florida addressed the history of the development of nonconventional computer models, such as quantum or DNA computer architectures, as an attempt to solve some of the intractable optimization problems. Serge Gratton from the University of Toulouse presented some of the recent computational results on multigrid approaches for large scale non-convex optimization problems, which make some of the large scale real-world problems arising in, for example physics and industry, efficiently solvable. Lieven Vanderberghe from the Electrical Engineering Department at the University of California, Los Angeles, spoke about chordal graphs and their applications in sparse semidefinite programming. Sven Leyffer from the Argonne National Laboratory tackled PDE-constrained mixed-integer programming

problems that arise in various engineering applications, discussed the existing approaches to solve these problems, and pointed out some of their emerging applications [5].

### **3.2. EURO ORD – IFORS Workshop**

The purpose of the EURO working group on OR for Development (EWG-ORD; <https://www.euro-online.org/web/ewg/29/or-for-development-ewg-ord>) is to help raise consciousness and promote efforts towards the use of Operational Research to achieve the goals of development. Since its establishment in 2006, it has organized annual workshops intended to gather together experienced scientists, young scholars, and practitioners so that they may share ideas and collaborate on projects devoted to the specific idea area of development.

The EWG-ORD workshop for 2015 was held from July 9 to 10 at the University of Strathclyde in Glasgow, Scotland (<http://ifors.org/ewg-ord/>). The Workshop, with the theme “OR: Uplifting Living Conditions”, was jointly sponsored by EWG-ORD, IFORS and offered in conjunction with the EURO conference.

This workshop aimed to bring together members of our European and worldwide OR community who have utilized OR tools to address problems in education, health (e.g., epidemics), basic public services, water management, technology, use and reuse of resources (physical or financial), infrastructure, agriculture, industries, environmental sustainability, energy sector, unabated population growth and climate change.

The keynote speech was presented by Geoff Royston, former head of strategic analysis and Operational Research in the Department of Health for England and Past President of The Operational Research Society of the UK. He gave insightful comments and solutions that have been implemented by the Department to solve some known and existing real-world health OR issues. He also challenged the OR community to draw on a broader range of analytical methods including the use of “Big Data” analytics to address the growing need for better health in developing countries.

The presentations of workshop participants emphasized development issues from the traditional OR applications (e.g., optimum allocation in forestry, improving service quality in hospitals, supply chain management) and presented novel approaches to investigating issues on uplifting living conditions by incorporating data or models from geo-informatics, neuroscience, and non-parametric statistics [6].

## **4. Conclusions**

The EURO Conference that took place in Scotland in 2015 catered to OR professionals engaged in a wide variety of OR areas. In depth treatment and discussion of some of the specific areas were possible through the Working Groups that EURO itself has established. Two such groups that conducted their satellite conferences were in the methodological area of continuous optimization and in the interest area focused on development and developing countries. The active involvement of these OR professionals in the enrichment of theory and continuing search for solutions to development problems is proof of the relevance of the discipline and its role in improving decision processes in a rapidly changing unstable world.

## **References**

1. D. DeTombe and G.-W. Weber. An Emerging Field in Operational Research: Methodology of Societal Complexity - with a Note on Operational Research and

Development, *International Journal Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, vol.21, n. 1(43), 2015, pp. 36-48.

2. F.A. Crespo, C.S. Pedamallu, L. Özdamar and G.-W. Weber. Contribution to the Collaborative Work in Virtual Organization - a Case Study, *Organizacija Journal of Management, Information Systems and Human Resources*, vol. 45, n. 5, 2012, pp. 228-235.

3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp. 647-648.

3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp.647-648.

4. L. Lotero, O. Kocadagli and G.-W. Weber, OR People Make EURO: Glasgow Hosts 27th EURO Conference, *IFORS News*, vol. 9, n. 3(September), 2015 pp. 3-4.

5. T. Bajbar, G.-W. Weber and O. Kocadagli, 13th EUROPT: Auld Reekie Blows Optimizers Away, *IFORS News* vol. 9, n. 3(September), 2015 pp.10.

6. N. Kajiji, G. Gash and G.-W. Weber, "OR: Uplifting Living Conditions" - EWG ORD - IFORS Workshop on OR for Development 2015 in Glasgow, to appear in *IFORS News* vol. 9, n. 4 (December), 2015.

**Laura Lotero**, doctoral student of Systems Engineering at the Universidad Nacional de Colombia; Assistant Professor at the Industrial Engineering Faculty of Universidad Pontificia Bolivariana, Colombia. She is an active supporter of working groups and conferences organized by EURO and IFORS all over the world.

[laura.lotero@upb.edu.co](mailto:laura.lotero@upb.edu.co)

**Elise del Rosario**, Consultant for the public and private sectors in the Philippines and is currently Chief Financial Officer of the family foundation – the One Small Step Forward Foundation, Inc. She worked for 20 years with San Miguel Corporation and retired as its Vice President for Operations Research. She was a lecturer at the University of the Philippines Graduate School of Engineering as well as Accenture's Operations Management for BPO Operations MBA Program. She was founding President of the Operations Research Society of the Philippines and President of the International Federation of Operational Research Societies from 2007 to 2009.

[elise.del.rosario@stepforward.ph](mailto:elise.del.rosario@stepforward.ph)

**Gerhard-Wilhelm Weber**, Professor at IAM of METU (Turkey). With research areas covering financial mathematics, economics, optimization and control, life sciences, data mining, education and development, he also finds time to help people network by organizing numerous international conferences. He received his Diploma and Doctorate in mathematics, and economics / business administration, at RWTH Aachen, and his Habilitation at TU Darmstadt. At IAM, he is currently in the programs of Financial Mathematics and Scientific Computing and a member of five other graduate schools, institutes and departments of METU. He is EURO Conference Advisor and Chair of the *OR for Developing Countries Online Resources of IFORS*.

[gweber@metu.edu.tr](mailto:gweber@metu.edu.tr)

## Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015)

Л. Лотеро<sup>1</sup>, Э. дель Розарио<sup>2</sup>, Г.-В. Вебер<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidad Pontificia Bolivariana,  
050031, Medellin, Colombia

<sup>2</sup> Operations Research Society of the Philippines  
1110 Quezon City, Metro Manila, Philippines

<sup>3</sup> Institute of Applied Mathematics, Middle East Technical University,  
06531 Ankara, Turkey

Научные форумы по исследованию операций (ИО), прошедшие в 2015 году в Глазго и Эдинбурге (Великобритания), в том числе, в рамках Европейской конференции по исследованию операций (EURO 2015) и сопутствующих Семинарах (EUROPT 2015 и EURO ORD – IFORS Workshops), показывают, что теория исследования операций усовершенствует процесс принятия решений в постоянно меняющемся неустойчивом мире во всех областях. В работе рассматриваются все аспекты конференций по этой тематике, прошедших в течение года, причем особое внимание уделяется исследованию операций в целях успешного развития для развивающихся стран, непрерывной оптимизации и в рамках социальных аспектов различных событий.

*Ключевые слова:* исследование операций, оптимизация, развивающиеся страны, развитые страны

### 1. Введение

Сочетание больших объемов неупорядоченных данных, с одной стороны, и современные технические и вычислительные ресурсы, с другой стороны, приводит к тому, что общество сталкивается с возрастающей неопределенностью в быстро изменяющейся обстановке. Использование специальных инструментов для принятия решений стало необходимостью для специалистов, теоретиков и практиков, участников проектов, исследователей и научных работников [1–3].

Серия конференций и семинаров, посвященных теории и приложениям методов исследования операций в улучшающихся условиях жизни в развивающихся и развитых странах, организована в качестве площадки для обсуждения этих вопросов.

### 2. Конференция EURO

Европейская конференция по исследованию операций (European Conference on Operational Research <https://www.euro-online.org/>), организованная Ассоциацией европейских обществ по исследованию операций (Association of European Operational Research Societies <http://ifors.org/ewg-ord/>), Международной федерацией обществ по исследованию операций (IFORS) – это крупная конференция, в которой ежегодно участвует более 2000 человек. Она организуется в те годы, когда не проходят конференции IFORS, организуемые раз в три года. В 2015 г. конференция EURO проводилась в университете Стратклайда, Глазго, с 12 по 15 июля. Основной тематикой конференции были методы исследования операций как конструктивный инструмент для теоретиков и практиков, среди которых одной из главных была тема «Направленное воздействие» (“Making an Impact”). Конференция готовилась совместно с Британским Обществом исследования операций [4].

В программу конференции вошли доклады всемирно известных блестящих специалистов в области исследования операций. Ральф Тиррел Рокафеллар (Ralph Tyrrell Rockafellar) докладывал о рисках и надежности стохастической оптимизации. Сэр

Алан Уилсон (Alan Wilson) сделал обзор проблем в области долгосрочных комплексных задач, которые стоят перед крупными городами. Мария Грация Сперанза (Maria Grazia Speranza) рассказала об истории и тенденциях в транспортировке и логистике. Все пленарные доклады были сделаны в торжественной обстановке в зале Barony Great Hall с большим успехом.

В главных программных и обучающих докладах затрагивались различные области и тенденции исследования операций. Были сделаны выступления по различным темам, среди которых: «Автоматическое конфигурирование алгоритма» (Thomas Stuetzle), «Бизнес-аналитика» (Michael Trick), «Региональные инновационные экосистемы» (Markku Markkula), «Взаимоотношения между специалистами по ИО и руководством страны» (Tony O'Connor), «Методы поиска по пространству критериев» (Martin Savelsbergh), «Современное планирование цепочки поставок» (Stefan Nickel), «Модели планирования эвакуации» (Horst Hamacher), «Оптимизация системы здравоохранения» (Eva K. Lee), «Исследование операций в области поведения» (Raimo P. Hämmäläinen), «ИО и биоинформатика» (Jacek Blazewicz), «ИО и образование» (Ariela Sofer).

Чрезвычайно важной особенностью конференции была серия мероприятий, связанных с темой «Направленное воздействие» (“Making an Impact”), основной идеей которых было повышение эффективности научного направления по ИО в реальном мире. Среди этих мероприятий были семинары и обучающие секции, посвященные практическим вопросам, ситуационным исследованиям и аналитике. Ученые и специалисты в прикладной области участвовали в стендовых докладах, круглых столах, деловом общении в формате Speed Networking, мастер-классах с опытными практиками. В практической области награда European Excellence in Practice Award (EIPA) была присвоена Джесс О’Хэнли (Jesse O’Hanley, университет графства Кент, Великобритания) за работу по оптимизации восстановления рек и водных бассейнов. Другая награда – Золотая медаль EURO Gold Medal 2015 была присуждена Александру Шрижверу (Alexander Schrijver, CWI, Амстердам, Нидерланды).

### 3. Рабочие группы EURO

Ассоциация европейских обществ по исследованию операций (Ассоциация EURO) включает в себя значительное число различных рабочих групп, специализирующихся в различных областях исследования операций (<https://www.euro-online.org/web/pages/1458/euro-working-groups>). Ниже приводится подробная информация о двух семинарах, состоявшихся перед главной конференцией EURO 2015.

#### 3.1. Семинар EUROPT

EUROPT – это рабочая группа EURO, целью которой является усиление связей между исследователями в области непрерывной оптимизации (<http://europt.iam.metu.edu.tr/>). С даты своего основания (2000 г.) EUROPT непрерывно работает на благо международного сообщества по ИО.

Ежегодный семинар EUROPT проводился 8-10 июля 2015 г. в г. Эдинбург, Шотландия, непосредственно перед основной конференцией EURO. В семинаре участвовали известные ведущие ученые в области математической оптимизации и специалисты из других областей, а также молодые ученые. Член рабочей группы EUROPT Панос Пардалос (Panos Pardalos) с кафедры промышленной техники и системного проектирования университета Флориды рассказал об истории развития нетрадиционных математических моделей, таких как квантовые модели или архитектура ДНК-компьютеров, в свете решения трудных задач оптимизации. Серж Граттон (Serge Gratton) из университета г.Тулузы представил последние результаты расчетов с использованием многосеточных методов в области

крупномасштабных невыпуклых задач оптимизации, которые позволяют эффективно решать крупномасштабные задачи, возникающие в реальном мире, например, в физике и промышленности. Доклад Ливен Вандерберг (Lieven Vanderberghe) с кафедры электротехники университета Калифорнии, Лос-Анджелес, был посвящен хордовым графам и их применению в разреженном полуопределенном программировании. Свен Лейффер (Sven Leyffer) из Аргоннской национальной лаборатории решил задачи частично-целочисленного программирования с частными производными в различных инженерных приложениях. Он рассматривает существующие методы решения этих задач и выделяет некоторые вновь появляющиеся области их применения [5].

### 3.2. Семинар EURO ORD – IFORS

Целью рабочей группы EURO по ИО для развития, EWG-ORD (EURO working group on OR for Development; <https://www.euro-online.org/web/ewg/29/or-for-development-ewg-ord>) является повышение информированности и распространение методов ИО для развития развивающихся стран. Со времени своего основания в 2006 г. группа организует ежегодные семинары, на которые опытные и молодые ученые и специалисты в прикладных областях собираются вместе, делятся своими идеями и сотрудничают в области выполнения проектов, посвященных определенным областям развития.

Семинар EWG-ORD в 2015 г. проходил 9-10 июля в университете Стратклайда, Глазго, Шотландия (<http://ifors.org/ewg-ord/>). Семинар, который назывался «Исследование операций: повышение уровня жизни», проводился при поддержке EWG-ORD, IFORS совместно с конференцией EURO.

Целью данного семинара была организация встречи членов европейского и международного сообщества ИО, которые применяют свои методы и средства для решения задач образования, здравоохранения (например, эпидемий), коммунального хозяйства, использования водных ресурсов, технологии использования и повторного использования ресурсов (физических и финансовых), инфраструктуры, сельского хозяйства, промышленности, возобновляемости окружающей среды, энергетического сектора, неспадающего роста населения и изменений климата.

Вступительное слово произнес Джофф Ройстон (Geoff Royston), бывший руководитель стратегического анализа и исследования операций Министерства здравоохранения Англии и экс-президент общества ИО Великобритании. Он подробно рассказал о тех мерах, которые были реализованы Министерством при решении существующих реальных проблем с помощью методов ИО в области здравоохранения. Кроме того, он призвал сообщество ИО привлекать более широкий спектр аналитических методов, включая аналитику «больших данных», при решении задач растущей потребности в улучшении здравоохранения в развивающихся странах.

В выступлениях участников семинара особое внимание уделялось вопросам развития в традиционных областях применения ИО (например, оптимальное распределение в лесном хозяйстве, повышение качества обслуживания в больницах, управление цепочками поставок), а также представлялись новые методы исследования в области повышения уровня жизни, основанные на данных и моделях геоинформатики, нейронауки и непараметрической статистики [6].

### 4. Выводы

Конференция EURO (Шотландия, 2015 г.) была организована в интересах специалистов (теоретиков и прикладников) в самых разнообразных областях исследования операций. Подробное обсуждение некоторых частных областей ИО состоялось в рамках рабочих групп EURO. В частности, две такие группы, организовавшие свои конференции в рам-



ках основной, рассматривали методологию непрерывной оптимизации, а также особенности развития применительно к развивающимся странам. Активное привлечение этих специалистов в области ИО в развитие теории поиска решений задач развития подтверждает значимость методов этой дисциплины и ее роль в процессе принятия решений в быстро меняющемся нестабильном мире.

### Литература

1. D. DeTombe and G.-W. Weber. An Emerging Field in Operational Research: Methodology of Societal Complexity - with a Note on Operational Research and Development, *International Journal Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, vol.21, n. 1(43), 2015, pp. 36-48.
2. F.A. Crespo, C.S. Pedamallu, L. Özdamar and G.-W. Weber. Contribution to the Collaborative Work in Virtual Organization - a Case Study, *Organizacija Journal of Management, Information Systems and Human Resources*, vol. 45, n. 5, 2012, pp. 228-235.
3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp. 647-648.
3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp.647-648.
4. L. Lotero, O. Kocadagli and G.-W. Weber, OR People Make EURO: Glasgow Hosts 27th EURO Conference, *IFORS News*, vol. 9, n. 3(September), 2015 pp. 3-4.
5. T. Bajbar, G.-W. Weber and O. Kocadagli, 13th EUROPT: Auld Reekie Blows Optimizers Away, *IFORS News* vol. 9, n. 3(September), 2015 pp.10.
6. N. Kajiji, G. Gash and G.-W. Weber, "OR: Uplifting Living Conditions" - EWG ORD - IFORS Workshop on OR for Development 2015 in Glasgow, to appear in *IFORS News* vol. 9, n. 4 (December), 2015.

**Лаура Лотеро**, соискатель (postdoc) в области системного проектирования в университете Колумбии (Universidad Nacional de Colombia), доцент факультета промышленной технологии университета (Universidad Pontificia Bolivariana) в Колумбии. Активно участвует в рабочих группах и конференциях, организуемых EURO и IFORS по всему миру.

**Элиса дель Розарио**, консультант в области государственного и негосударственного сектора Филиппин. Финансовый директор семейного фонда (One Small Step Forward Foundation, Inc.). 20 лет работала в San Miguel Corporation, последняя занимаемая должность – вице-президент общества ИО. Читала лекции для докторантов в области технических наук Филиппинского университета и в рамках MBA (программы ВРО Operations). Основатель и президент Филиппинского общества исследования операций, президент международной федерации обществ ИО в 2007-2009 гг.

**Герхард-Вильгельм Вебер**, профессор Института прикладной математики Ближневосточного технического университета (Турция). Области исследования: финансовая математика, экономика, оптимизация и управление, науки о жизни, добыча данных, образование и развитие. Содействует в организации многочисленных международных конференций. Имеет степени по математике, экономике, административному управлению, полученные в Рейнско-Вестфальском техническом университете Ахена, в Дармштадтском техническом университете. В настоящее время работает в Институте прикладной математики (Анкара) в рамках программ финансовой математики и научных расчетов. Член Советов некоторых образовательных школ, институтов и факультетов Ближневосточного технического университета. Руководитель-консультант конференций EURO, руководитель онлайн-ресурса IFORS «ИО для развивающихся стран».

## **Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !**

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского Российской Академии Наук (ИПМех РАН) отметил 50-летие своего создания. Институт был основан в январе 1945 г. Первым директором института был академик Александр Юльевич Ишлинский, организатор института, выдающийся ученый- механик.

Институт проблем механики (ИПМех) был создан на базе Института механики АН СССР (организованного в 1939г.). Одним из директоров Института механики АН СССР в свое время был блестящий механик и математик Николай Гурьевич Четаев, выпускник КГУ (Казанского государственного университета), Глава известной научной Казанской Четаевской Школы механики и устойчивости, основатель - инициатор создания в 1932 г. Казанского авиационного института (ныне – КНИТУ-КАИ).

ИПМех РАН сегодня – это известная Отечественная Школа, крупный научный центр мирового масштаба, связанный с комплексными исследованиями во всех областях общей механики, среди которых: фундаментальные теоретические и прикладные проблемы динамических систем; гамильтоновы системы; теория гироскопических и навигационных систем; механика твердого тела; физико-механические процессы деформирования и разрушения; механика жидкости, газа и плазмы; механика композитов и нано-материалов; геомеханика и механика природных процессов, включая все области окружающей среды; проблемы термогазодинамики, горения и взрыва; междисциплинарные проблемы авиационных и аэрокосмических систем; аэро-термодинамика; робототехника и мехатроника; трибология; вычислительные проблемы в механике. ИПМех РАН – уникальный Отечественный научно- исследовательский институт, занимающийся комплексными разработками во всех областях механики и смежных дисциплин как фундаментального, так и прикладного характера.

Как государственный научный центр ИПМех РАН осуществляет функции прогнозирования перспектив развития в области механики, с определением рациональных схемно-конструктивных решений и научно- технических рекомендаций для промышленных задач, с совершенствованием методологии разработок в современных экономических условиях. Уникальная научная, методологическая и экспериментальная база института поддерживает высокий уровень исследований в этом направлении: разрабатываются моделирующие компьютерные программы, с использованием стендового и испытательного оборудования.

В ИПМех РАН – многочисленный коллектив выдающихся ученых, которые возглавляют всемирно известные научные Школы.

От имени всех казанцев, от имени Членов Международного Редакционного Комитета желаем всем нашим Коллегам и всему коллективу ИПМех РАН дальнейших успехов и совершенствования по всем направлениям работы в этой труднейшей сфере, связанной с важнейшими проблемами механики.

Мы желаем нашему Партнеру – ИПМех РАН «устойчивости на бесконечном интервале времени при всех постоянно действующих возмущениях»!

**Президент КНИТУ-КАИ**

**Со-Редактор МНЖ**

**Ю.Ф.Гортышов**

**Л.К.Кузьмина**

## **A.Yu.Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS (IPMech RAS) — 50!**

A.Yu. Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS) has celebrated its 50<sup>th</sup> Anniversary. The Institute was founded in January 1945. Its first director was academician Alexander Yuryevich Ishlinskiy, the Founder of the Institute, an outstanding scientist in mechanics.

IPMech was established on the basis of Institute for Mechanics of AS USSR (founded in 1939). One of the Institute's directors was a brilliant specialist in mechanics and mathematics Nikolay Guryevich Chetayev, KSU (Kazan State University) graduate, Head of well-known Kazan Chetayev Scientific School of mechanics and stability, Founder-Initiator of Kazan Aviation Institute in 1932 (at present KNRTU-KAI).

IPMech RAS at present is a well-known National Scientific School, world-wide famous major scientific center, which carries out complex research in all fields of mechanics, including basic and applied problems of dynamic systems; Hamiltonian systems; theory of gyroscopes and navigation systems; mechanics of solid bodies; physical and mathematical processes of deformation and fracture; mechanics of fluid, gas and plasma; mechanics of composite and nano materials; geomechanics and mechanics of natural processes in every field of environment; problems of thermal gas dynamics, combustion and explosion; interdisciplinary problems of aviation and aerospace systems; aerothermodynamics; robotics and mechatronics; tribology; computational problems in mechanics. IPMech RAS is a unique research institute involved in complex investigations in all the fields of mechanics and adjacent disciplines both of basic and applied nature.

Being a National Scientific Center, IPMech RAS implements the prediction functions for development trends in mechanics area, defines rational layout and design concepts, develops scientific and engineering recommendations concerning industrial problems, and improves methodology of developments in current economic conditions. Unique scientific, methodological and experimental base of the Institute sustains high level of the research: computer simulation software is developed with the using of test beds and equipment.

Many outstanding researchers work in IPMech RAS heading their worldwide famous Scientific Schools.

On behalf of all the Colleagues from Kazan and Members of the International Editorial Board we wish all our Colleagues and the whole team of IPMech RAS, our Partner, further success and improvement in all trends of this complicated sphere of Knowledge dealing with the important theoretical and applied problems of mechanics.

We wish our Partner, IPMech RAS, “stability on infinite time interval under all permanently acting perturbations”!

**President of KNRTU-KAI**

**Co-Editor of ISJ**

**Yu.F. Gortyshov**

**L.K. Kuzmina**

**Представление работ**

Статьи, предназначенные для публикации в журнале, должны быть поданы в трех экземплярах. Статьи направляются по указанному ниже адресу или тому члену редакционного комитета, который, по мнению автора, наиболее близок к теме работы.

Адрес: Л.К.Кузьмина, Казанский авиационный институт (КНИТУ им.А.Н.Туполева)  
Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)  
Тел.: (7) (843) 236-16-48  
<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>  
[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)

**Информация о подписке**

“Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”, 2015, т.21 (два выпуска), ISSN 1727-687X.

Стоимость годовой подписки - 6600 руб. (включая пересылку) за любой год с 1996г.

**Банковские реквизиты для платежа:**

ФГБОУ ВПО КНИТУ им.А.Н.Туполева - КАИ  
УФК по РТ (КНИТУ-КАИ л/с 20116X02750)  
ИНН 1654003114 КПП 165501001 БИК 049205001  
р/с 40501810292052000002  
Отделение – НБ Республика Татарстан (БИК 049205001)  
(X – печатается латинская буква).

с указанием: Для МНЖ “Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”.

Пожалуйста, информируйте нас о перечислении и сообщите номер платежного поручения по электронной почте или другим способом

**Manuscript Submission**

Manuscripts for publication in this Journal should be submitted in triplicate to the Editorial Office or to an individual member of the Board of Associate Editors who, in the opinion of the authors, is more closely involved with the topic of the paper.

The address of the Editorial Office:

Dr.Lyudmila Kuzmina, Kazan Aviation Institute (KNRTU of A.N.Tupolev's name)  
Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)  
Tel.: (7) (843) 236-16-48  
<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>  
[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)

**Subscription information:**

“Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems”, 2015, vol.21 (two issues), ISSN 1727-687X.

Annual subscription rate: US\$200 (subscription rates include postage/air speed delivery), for any year from 1996.

Please, send this payment to:

Kazan State Technical University  
S.W.I.F.T. SABRRUMMNA1  
SBERBANK  
(VOLGO-VYATSKY HEAD OFFICE  
NIZHNIY NOVGOROD)  
ACCOUNT 40503840762020200019  
FOR CREDIT TO KGTU ANTUPOLEVA

with indication: For ISE “Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems”.  
Please, inform us about this transfer and the wire number by e-mail.

# INTERNATIONAL FEDERATION OF NONLINEAR ANALYSTS

## RUSSIAN CENTRE

[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

Russia, 420111, Kazan, Karl Marx, 10

(7) (843) 236-16-48

## International Scientific Edition

**IFNA-ANS-AAAS-RAATs - International Scientific Edition (ISE)** is founded (1994) by *Kazan Chetayev School of stability and mechanics*, under the aegis of International Federation of nonlinear analysts and Academy of nonlinear sciences. This interuniversity non-ordinary initiative raised by the intelligence of swiftly developing World brilliantly implements the objectives and goals laid in its foundations which had been formed by the following provisions:

- “True theory cannot be linear” (A.Einstein);
- “Unity in Diversity” (V.Lakshmikantham);
- “If to be, it is necessary to be the First” (V.P.Chkalov);
- “Newtonian Mechanics is an unequalled achievement of physics (natural philosophy), the whole history of human civilization. IT IS EVERLASTING. Its powerful tree is sprouting more and more branches. Among them there are the branches that have grown from scions grafted on this tree and cultivated in other natural sciences” (G.G.Chyorny);
- “Mathematics is an effective “transport” which is able to provide significant breakthrough in understanding of the essence of Environment, with deep penetration of its approaches into all the spheres including the unconventional ones”.

The period of effective and successful activities resulted in establishment of ISE as a *bilingual* interdisciplinary Scientific Edition representing researches of nonlinear problems in all the diversity of basic and applied sciences. Structurally the Journal is organized as periodic Edition in two series (Journals), with preparing invited articles (as problematic character surveys) and also special topical issues on advanced scientific directions including natural sciences and the humanities (mathematics, mechanics, physics, chemistry, engineering sciences, including aviation and aerospace technologies; biological, medical, social and political sciences; ecology, cosmology, economics; nanoscience and nanotechnology, stability and sustainable development in economical, social and political systems; problems of risk and information protection, operational research, problems of higher engineering education, ...).

### Problems of nonlinear analysis in engineering systems (ISSN 1727–687X)

<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>

Among the invited articles there are

[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)

- M.Shaimiyev, R.Khakimov. *Tatarstan Republic: The model of stable development.*
- A.Yu.Ishlinskiy. *Oblique vibration.*
- A.G.Butkovsky. *Some Principal Features of “Unified Geometric Theory of Control”.*
- P.J.Werbos. *Brain-Like Intelligent Control: From Neural Nets to True Brain-Like Intelligence*
- S.Santoli. *Information-driven nonlinear nanoengine hierarchies for biomimetic evolware.*
- P.J.Werbos. *Order from chaos: a reconsideration of fundamental principles.*
- P.Marmet. *The overlooked phenomena in the Michelson-Morley experiment.*
- A.N.Panchenkov. *The entropy model of hydrodynamics.*
- G.A.Kamenskiy. *Direct approximate methods of solving variational problems for non-local functionals (survey)*
- A.A.Shanyavskiy. *Synergetic concept of metals fatigue.*

Among the topical issues there are the *special issues* on the following topics:

- No.3(19), 2003 – *Special issue. In memory of Nobel Prize Laureate Professor Ilya Prigogine.*
- No.2(21), 2004 – *Special issue. Contact Mechanics.*
- No.1(22), 2005 – *Special issue. Integrability Problem.*
- No.2(23), 2005 – *Special issue. Advances in Nanoscience and Nanotechnology.*
- No.3(24), 2005 – *Special issue. Operations Research Approaches in transitional economics.*
- No.1(29), 2008 – *Special issue. Advances in Nanoscience and Nanotechnology.*

### Actual problems of aviation and aerospace systems (ISSN 1727–6853)

<http://kpfu.ru/science/journals/rasj/apaaas>

Among the invited papers there are

[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/rasj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/rasj.html)

- A.D.Ursul. *Space exploration in sustainable development strategy.*
- P.Werbos. *A New Approach to Hypersonic Flight.*
- V.L.Kataev. *Transportation System: “Earth-Space-Earth”. Conception research. Non-traditional Approach.*
- Douglas Davidson. *Boeing in Russia.*
- A.N.Kirilin. *Trends and Outlook for Airships Development.*
- I.V.Prangishvili, A.N.Anuashvili. *The Background Principle of Detecting a Moving Object.*
- Yu.S.Solomonov. *Optimization of Power Capabilities and Trajectory Parameters for Transportable Launch Space Systems.*
- A.Bolonkin. *Hypersonic Space Launcher of High Capability.*
- K.M.Pichkhadze, A.A.Moisheev, V.V.Efanov, K.A.Zanin, Ya.G.Podobedov. *Development of scientific-design legacy of G.N.Babakin in automatic spacecrafts made by Lavochkin Association.*
- J. von Puttkamer. *From Huntsville to Baikonur: A Trail Blazed by S.P.Korolev.*
- G.V.Novozhilov. *Russian-American IL-96MT aircraft (15 years since flight day).*
- D.Guglieri, F.Quagliotti, M.A.Perino. *Preliminary design of a Lunar landing mission.*
- P.J.Werbos. *Towards a rational strategy for the Human settlement of Space.*
- V.A.Popovkin. *The role of Space military units in first artificial Earth satellite launch.*
- B.Ye.Chertok. *The Space Age. Predictions till 2101.*
- C.Maccone. *The statistical Drake equation and A.M.Lyapunov theorem in problem of search for extraterrestrial intelligence, part I.*
- F.Graziani, U.Ponzi. *Luigi Broglio and the San Marco satellites.*
- V.A.Polyachenko. *The first space projects of Academician V.N.Chelomey DB.*

Among the special topical issues there are

- No.1(23), 2007 – *Special issue. To the 50<sup>th</sup> Anniversary of the first artificial Earth satellite launch.*
- No.2(24), 2007 – *Special issue. To the 50<sup>th</sup> Anniversary of the first artificial Earth satellite launch.*
- No.3(25), 2007 – *Special issue. To the 50<sup>th</sup> Anniversary of the beginning of Space Era.*
- No.1(26), 2008 – *Special issue. To the 50<sup>th</sup> Anniversary of the beginning of Space Era and the Military Space Forces Day.*
- No.1(32), 2011 – *Special issue. To the 50<sup>th</sup> Anniversary of the first flight of a Man in Space (Space flight of Yu.A.Gagarin).*

.....  
An outstanding ability to foresee, fundamental nature, responsibility, fine qualification in the whole diversity of the problems of science, education and applications are the main constituents providing functional success of this ISE which contributes much in development of science on the whole, promotes interdisciplinary community of scientists and researchers who work in different spheres.

Dr.Lyudmila Kuzmina, EDITOR-in-Chief

**IFNA RC Head**

[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

**Lyudmila K.Kuzmina**

# **INTERNATIONAL FEDERATION OF NONLINEAR ANALYSTS**

**RUSSIAN CENTER**

Russia, 420111, Kazan, Karl Marx, 10  
phone: (7) (843) 236-16-48  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL**

## **Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems (PNAES)**

International IFNA-ANS scientific Journal "Problems of nonlinear Analysis in Engineering Systems" (ISSN 1727-687X) is founded in 1994 by Russian Scientists, representatives of Kazan Chetayev's School of Mechanics and Stability (Kazan Aviation Institute – Kazan State Technical University of A.N.Tupolev's name, Russia), jointly with foreign Colleagues. The Journal is edited under aegis of International Federation of nonlinear Analysts and Academy of nonlinear Sciences in the cooperation with Kazan Federal University (KFU), with International Nanobiological Testbed Ltd (INT), with CIMNE (International Center for Numerical Methods in Engineering).

"PNAES" is interdisciplinary scientific periodic Edition, presenting the works on nonlinear problems in all areas of fundamental and applied Sciences, including both natural and humanities disciplines: mathematics, mechanics, physics, chemistry; engineering, biological, medical, social, political sciences; ecology, cosmology; economics and financial mathematics; nanoscience and nanotechnology; stability and sustainable development, problems of risk and information protection, problems of operations research and information technology,...

This scientific Journal is *bilingual* Edition, with printed and electronic versions

<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes> [http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)

The Journal has been cataloged:

in Congress Library; the Library of Congress Catalog Number (LCCN) is 98-646147

in British Library; the British Library Catalog Number (LCCN) is 0133.473700

Published papers are reviewed in abstract Journal and abstract database of RAS All-Russian Institute of Scientific-

Engineering Information.; ones will be indexed in International databases; the Journal is indexed in Russian information-analytical system DB

RINZ ( Russian index of scientific citation).

Information about Edition is entered in reference system on periodic Editions "Ulrich's Periodicals Directory"

<http://www.ulrichsweb.com>

Online version of Scientific Edition is implemented in cooperation with Kazan Federal University and is available at KFU-portal

### **Dr.Lyudmila Kuzmina, CO-EDITOR**

Kazan Aviation Institute (KNRTU of A.N.Tupolev's name-KAI)  
Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA

Tel: (7) (843) 236-16-48  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

***Official Plenipotentiary  
Head of IFNA RC***

***Lyudmila K.Kuzmina***

# INTERNATIONAL FEDERATION OF NONLINEAR ANALYSTS

RUSSIAN CENTRE

Russia, 420111, Kazan. Karl Marx, 10  
phone: (7) (843) 236-16-48  
e-mail: [Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

## INTERNATIONAL RUSSIAN-AMERICAN SCIENTIFIC JOURNAL

### **Actual problems of aviation and aerospace systems processes, models, experiment (APAAS)**

International Russian-American Scientific Journal “Actual problems of aviation and aerospace systems” (ISSN 1727-6853) is founded in 1995 on the initiative of Scientists-Professors from Kazan Chetayev School of Mechanics and Stability, representatives of Kazan Aviation Institute – Kazan State Technical University of A.N.Tupolev’s name, (RUSSIA) and Scientists-Professors from Embry-Riddle Aeronautical University (USA).

The Journal is edited on base of Russian Centre of International Federation of Nonlinear Analysts (IFNA), under the aegis of two Academies (Academy of Aviation and Aeronautics Sciences and Russian Academy of Astronautics of K.E.Tsiolkovsky name) and Russian Astronautics Federation, in cooperation with MAI (Moscow Aviation Institute – National Research University), Bauman MSTU (Bauman Moscow State Technical University), ICS of RAS; with support of RF Education-Science Ministry, Federal Space Agency, TsNIIMash, TsNII “Electropribor”, Canadian Space Agency, International Centre for Numerical Methods in Engineering (CIMNE); International Academy of Astronautics.

“APAAS” is International scientific periodic Journal on a broad spectrum of **multidisciplinary problems** in Aviation and Astronautics, including researches in areas of dynamics and flight control; theory, design and technology of aircrafts, engines; sciences on materials; information and computing systems, experimental investigations; economic and humanity problems of operation; remote sensing of Earth, information satellite technology; the problems of Higher Engineering Education; the problems of nanotechnology for Avia-, Aerospace systems, ...

This Scientific Journal is *bilingual* Edition, with printed and electronic versions.

<http://kpfu.ru/science/journals/rasj/apaas>

[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/rasj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/rasj.html)

The Journal has been cataloged:

in Congress Library; the Library of Congress Catalog Number (LCCN) is 98-646147

in British Library; the British Library Catalog Number (LCCN) is 0133.473700

Published papers are reviewed in abstract Journal and abstract database of RAS All-Russian Institute of Scientific-Engineering Information; ones will be indexed in International databases; the Journal is indexed in Russian information-analytical system DB RINZ (Russian index of scientific citation).

Information about Edition is entered in reference system on periodic Editions “Ulrich’s Periodicals Directory”

<http://www.ulrichsweb.com>

Online version of Scientific Edition is implemented in cooperation with Kazan Federal University and is available at KFU-server

#### **Dr.Lyudmila Kuzmina, CO-EDITOR**

Kazan Aviation Institute (KNRTU of A.N.Tupolev’s name-KAI)

Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA

Tel: (7) (843) 236-16-48

[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

*Official Plenipotentiary  
Head of IFNA RC*

*Lyudmila K.Kuzmina*



International scientific Journal "Problems of nonlinear Analysis in Engineering Systems" is the periodic Journal, that is founded in 1994 by Russian Scientists, representatives of Kazan Chetayev School of Mechanics and Stability, jointly with foreign Colleagues, is published under aegis of International Federation of nonlinear Analysts and Academy of nonlinear Sciences together with Kazan National Research Technical University of A.N.Tupolev name (Kazan Aviation Institute). It is interdisciplinary scientific Edition, presenting the works on nonlinear problems in all areas of fundamental and applied Sciences, including both natural and humanities disciplines: mathematics, mechanics, physics, chemistry; engineering, biological, medical, social, political sciences; ecology, cosmology, economics; nanoscience and nanotechnology; stability and sustainable development, problems of risk and information protection, operations research, ...

Scientists of different fields are invited for cooperation.

**<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>**

**[http://www.kcn.ru/tat\\_en/science/ans/journals/ansj.html](http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html)**

Authors should send their manuscripts (3 clean copies, ~15pp.), prepared to the publication, and a disk (MS Word for Windows, IBM PC). It is also possible to duplicate the submitted paper via e-mail.

The text should be printed on A4 size paper within the margins of 160x235 (mm) (including the title, the author name and affiliation, and the contact address), Times New Roman font, 12pt, single space. Upper margin is 35mm, left margin is 25mm, right margin is 25mm. Illustrations are supposed to be in editable formats of .jpg, .gif, .bmp and placed within the same margins. Pagination should be made on the reverse side by pencil. Short information about the author (3-4 lines) should be given at the end of the paper (covering the area of scientific interests and spheres of application).

The paper should be accompanied with an abstract (2p) prepared according to the same guidelines and printed on separate pages. Authors of papers in French, or German, or Russian should also submit in English version of their article and abstracts (2p) in Russian and English.

Authors reserve their right to copy their publication. The Journal can be sent to the author on request for separate payment or by subscription.

Our contacts (on publications, advertisement or business propositions) -

(7) (843) 236-16-48 Lyudmila K. Kuzmina

(7) (843) 238-44-20 Vladimir I. Panchenko

Address:

L.K.Kuzmina, Kazan National Research Technical University of A.N.Tupolev name  
(KNRTU-KAI)  
Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA  
[Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru](mailto:Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru)

*The Journal has been cataloged:  
in Congress Library; the Library of Congress Catalog Number (LCCN) is **98-646147**  
in British Library; the British Library Catalog Number (LCCN) is **0133.473700***

Published papers are reviewed in abstract Journal and abstract database of RAS All-Russian Institute of Scientific-Engineering Information  
Information about Edition is entered in reference system on periodic Editions "Ulrich's Periodicals Directory" <http://www.ulrichsweb.com>

Online version of Scientific Edition is implemented in cooperation with Kazan Federal University and is available at KFU-server

**Edition is carried out with support of ABAK Operating Printing Center**

Original-model is prepared for printing  
**by Humanity Projects and Investigations Center**  
together with

**Foundation of culture development support**  
under TATARSTAN Republic President  
Publishing House **ABAK** (licence No.0195; 03.08.2000)  
Kazan, RUSSIA