ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.547

Ю.М. ДЮКАРЕВ

О НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В работах [1]–[4] были предложены некоторые обобщения метода В.П. Потапова [5]–[8] решения интерполяционных задач для неванлинновских функций. Основная идея этих обобщений состоит в том, что различным интерполяционным задачам по определенным правилам ставят в соответствие наборы операторов. Эти операторы удовлетворяют некоторому операторному тождеству (ОТ). Разным задачам ставятся в соответствие разные наборы операторов, однако вид ОТ не меняется. Поэтому все результаты, вытекающие из вида ОТ, относятся сразу ко всем интерполяционным задачам.

В [1]–[4] для произвольного набора операторов, для которых выполнено ОТ, ставится и решается обобщенная интерполяционная задача, которая при специальных выборах операторов эквивалентна задаче Неванлинны–Пика, проблеме моментов Гамбургера и другим интерполяционным задачам. При этом используются многие идеи и методы подхода В.П. Потапова [5]–[8] к решению интерполяционных задач для неванлинновских функций. В этом смысле можно говорить, что в [1]–[4] предложена общая схема метода В.П. Потапова решения интерполяционных задач.

Следует заметить, что одной и той же конкретной интерполяционной задаче можно поразному поставить в соответствие операторы, удовлетворяющие ОТ. Поэтому соответствие между конкретной и обобщенной интерполяционными задачами не является однозначным. В этой связи возникает вопрос об эквивалентности обобщенных интерполяционных задач. Далее, в основных примерах интерполяционных задач можно говорить о том, что одна задача получается из другой добавлением новых интерполяционных условий. Поэтому возникает вопрос об определении понятия упорядоченности для обобщенных интерполяционных задач. В [1]–[4] вопросы эквивалентности и упорядоченности обобщенных интерполяционных задач не рассматривались.

В [1]–[4] интерполяционные задачи решались так, чтобы сразу оказались выполненными все интерполяционные условия. Однако многие интерполяционные задачи нельзя решить непосредственно по такой схеме. Примерами являются проблема моментов Гамбургера с бесконечным числом заданных моментов, задача Неванлинны–Пика с бесконечным числом узлов интерполяции и им подобные проблемы. Именно по этой причине в [1]–[4] для дискретного случая рассматривались только интерполяционные задачи с конечным числом узлов интерполяции.

В классической теории дискретные интерполяционные задачи с бесконечным числом узлов интерполяции решались по следующей схеме. Сначала решается усеченная интерполяционная задача, в которой должны выполняться лишь первые n интерполяционных условий. После этого при стремлении n к бесконечности рассматривается предельная интерполяционная задача. При этом удается выяснить условия неопределенности задачи с бесконечным числом узлов интерполяции и дать описание множества всех решений для неопределенного случая. Однако к настоящему времени не были предложены достаточно общие подходы, являющиеся обобщением изложенной идеи решения предельных интерполяционных задач для неванлинновских функций.

В этой статье введены понятия эквивалентности и упорядоченности для обобщенных интерполяционных задач. На основе этих понятий предложен общий подход к исследованию предельных интерполяционных задач для неванлинновских оператор-функций (о.-ф.), который содержит в себе все основные идеи метода перехода от усеченных интерполяционных задач к предельной интерполяционной задаче. При этом усеченные задачи могут иметь весьма сложную структуру и две соседние задачи могут отличаться друг от друга произвольным множеством дополнительных интерполяционных условий. В статье используются многие идеи и методы подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач [5]–[8].

Перечислим основные новые понятия и результаты статьи.

В § 2 приведена несколько модифицированная по сравнению с [1]–[4] обобщенная интерполяционная задача неванлинновского типа. В таком виде интерполяционная задача лучше приспособлена для наших целей.

В § 3 вводится понятие унитарной эквивалентности двух обобщенных интерполяционных задач (определение 4) и доказано совпадение множеств решений унитарно эквивалентных задач (теорема 1). Далее вводится понятие упорядоченности двух интерполяционных задач (определение 6) и доказывается естественная упорядоченность по включению соответствующих множеств решений (теорема 2).

В § 5 вводятся понятия упорядоченного семейства обобщенных интерполяционных задач, предельной интерполяционной задачи и множества ее решений (определения 8, 9).

В § 6 получен критерий полной неопределенности предельной интерполяционной задачи (теорема 4). Этот критерий является обобщением классического критерия Данжуа (напр., [5], [8]).

В § 7 дается описание множества всех решений вполне неопределенной предельной интерполяционной задачи и рассмотрены два примера: операторная задача Неванлинны–Пика и операторная проблема моментов Гамбургера. С помощью теоремы 4 для них получены критерии полной неопределенности и с помощью теоремы 7 дано описание всех решений соответствующих предельных интерполяционных задач во вполне неопределенном случае.

2. Обобщенные интерполяционные задачи

Пусть $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ и $\mathbb{C}_\pm = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\}$; $\mathcal{G}$ — сепарабельное и $\mathcal{H}$ — конечномерное гильбертовы пространства. Символом $\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$, символом $\{\mathcal{G}\}$ обозначим множество ограниченных операторов в $\mathcal{G}$, а символом $\{\mathcal{G}\}_H$ — множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0$ $\forall f \in \mathcal{G}$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим символом $\{\mathcal{G}\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ называется строго положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}\}$. Множество строго положительных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим символом $\{\mathcal{G}\}_>$. Пусть операторы A, B принадлежат $\{\mathcal{G}\}_H$. Неравенство $A \geq B$ ($A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ ($A - B \in \{\mathcal{G}\}_>$).

Тождественный и нулевой операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, обозначим символами $I_\mathcal{G}$ и $0_\mathcal{G}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим символом $0_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$.

Пусть заданы операторы $K \in \{\mathcal{G}\}_\geq$, $T \in \{\mathcal{G}\}$, $u, v \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют ОТ

$$TK - KT^* = vu^* - uv^*. \tag{1}$$

Определение 1. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \{K, T, u, v\}, \tag{2}$$

удовлетворяющий ОТ (1), называется *обобщенной интерполяционной задачей неванлинновского типа*, а пространства $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ называются *масштабными пространствами*.

Пусть оператор T таков, что о.-ф. $R_T(z) = (I_{\mathcal{G}} - zT)^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}$. Множество особых точек о.-ф. R_T обозначим символом $\mathcal{Z}$. Из мероморфности R_T следует, что множество $\mathcal{Z}$ дискретно в $\mathbb{C}$, т. е. не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Пусть $\overline{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \mathcal{Z}\}$.

Определение 2. О.-ф. $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ называется неванлинновской, если она голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и $\{w(z) - w^*(z)\}/2i \geq 0_{\mathcal{H}}$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$.

Класс всех таких о.-ф. обозначим $\mathcal{R}$.

Определение 3. О.-ф. $w \in \mathcal{R}$ называется решением обобщенной интерполяционной задачи (2), если она удовлетворяет следующему основному матричному неравенству (ОМН) В.П. Потапова

$$\left[\begin{array}{c|c} K & R_T(z)\{vw(z) - u\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}. \tag{3}$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи (2) обозначим символом $\mathcal{F}$. Можно доказать [1]–[4], что при достаточно общих условиях множество $\mathcal{F}$ не пусто. Всюду в этой статье будем предполагать, что соответствующие условия выполнены и множество решений задачи (2) не пусто.

3. Упорядоченность интерполяционных задач

Определение 4. Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}_1 = \{K_1, T_1, u_1, v_1\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{K_2, T_2, u_2, v_2\}$ с масштабными пространствами $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}$ соответственно. Задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ называются унитарно эквивалентными, если существует такой унитарный оператор $\mathcal{U} : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, что

$$K_1 = \mathcal{U}^* K_2 \mathcal{U}, \quad T_1 = \mathcal{U}^* T_2 \mathcal{U}, \quad u_1 = \mathcal{U}^* u_2, \quad v_1 = \mathcal{U}^* v_2. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть даны обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ и пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ обозначают соответствующие множества решений. Если интерполяционные задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ унитарно эквивалентны, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*

Доказательство. Пусть о.-ф. $w \in \mathcal{F}_2$. Тогда для w можем записать ОМН (3)

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T_2}(z)\{\, v_2 w(z) - u_2 \,\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}.$$

Умножим это неравенство слева и справа на операторы

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{U}^* & 0_{\mathcal{H}\mathcal{G}_2} \\ \hline 0_{\mathcal{G}_2\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{array}\right] \in \{\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{H},\ \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{H}\}, \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{U} & 0_{\mathcal{H}\mathcal{G}_1} \\ \hline 0_{\mathcal{G}_1\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{array}\right] \in \{\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{H},\ \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{H}\}.$$

С учетом равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = I_{\mathcal{G}_2}$ получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{U}^* K_2 \mathcal{U} & \mathcal{U}^* R_{T_2}(z)\mathcal{U}\{\mathcal{U}^* v_2 w(z) - \mathcal{U}^* u_2\,\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}.$$

Отсюда и из (4) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_{T_1}(z)\{v_1 w(z) - u_1\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}.$$

Поэтому $w \in \mathcal{F}_1$. Таким образом, $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Следовательно, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. $\square$

Пусть дана интерполяционная задача

$$\mathcal{P} = \{K, T, u, v\} \tag{5}$$

и пусть ее масштабное пространство $\mathcal{G}$ представлено в виде ортогональной суммы своих нетривиальных подпространств

$$\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \oplus \widehat{\mathcal{G}}. \tag{6}$$

Это равенство понимается в смысле естественного изоморфизма $\mathcal{G}$ и $\widetilde{\mathcal{G}} \oplus \widehat{\mathcal{G}}$. А именно, пусть $\widetilde{P}$ (соответственно $\widehat{P}$) обозначает ортопроектор на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}$ (соответственно $\widehat{\mathcal{G}}$). Тогда изоморфизм имеет вид

$$\forall f \in \mathcal{G} \leftrightarrow \mathrm{col}[\widetilde{P}f,\, \widehat{P}f] \in \widetilde{\mathcal{G}} \oplus \widehat{\mathcal{G}}. \tag{7}$$

Пусть представление (6) таково, что выполнено условие

$$T^*\widetilde{P} = \widetilde{P}T^*\widetilde{P}. \tag{8}$$

В соответствии с (6), (7) и учитывая (8), введем матричные обозначения для операторов

$$K = \begin{bmatrix} \widetilde{K} & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \widetilde{T} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{G}}} \\ E & \widehat{T} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \widetilde{v} \\ \check{v} \end{bmatrix},$$
$$u = \begin{bmatrix} \widetilde{u} \\ \check{u} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{P} = \begin{bmatrix} I_{\widetilde{\mathcal{G}}} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{G}}} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}\widehat{\mathcal{G}}} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{bmatrix} 0_{\widetilde{\mathcal{G}}} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{G}}} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}\widehat{\mathcal{G}}} & I_{\widehat{\mathcal{G}}} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Отсюда и из ОТ (1) следует *индуцированное* ОТ

$$\widetilde{T}\widetilde{K} - \widetilde{K}\widetilde{T}^* = \widetilde{v}\widetilde{u}^* - \widetilde{u}\widetilde{v}^*.$$

Следовательно, операторы

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{K}, \widetilde{T}, \widetilde{u}, \widetilde{v}\} \tag{10}$$

и масштабные пространства $\{\widetilde{\mathcal{G}},\, \mathcal{H}\}$ задают обобщенную интерполяционную задачу неванлинновского типа.

Определение 5. Интерполяционная задача (10) называется сужением интерполяционной задачи (5) на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Определение 6. Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ из определения 4. Говорят, что задача $\mathcal{P}_2$ является продолжением задачи $\mathcal{P}_1$, если в масштабном пространстве $\mathcal{G}_2$ существует подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}_2$, удовлетворяющее условию (8) и такое, что сужение интерполяционной задачи $\mathcal{P}_2$ на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}_2$, обозначаемое символом $\widetilde{\mathcal{P}}_2$, унитарно эквивалентно интерполяционной задаче $\mathcal{P}_1$.

Теорема 2. *Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ и пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ обозначают соответствующие множества решений.*
Если задача $\mathcal{P}_2$ является продолжением задачи $\mathcal{P}_1$, то $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ — подпространство из определения 6, $\widetilde{\mathcal{P}}_2$ — сужение интерполяционной задачи $\mathcal{P}_2$ на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_2$ — множество решений интерполяционной задачи $\widetilde{\mathcal{P}}_2$. По теореме 1 $\mathcal{F}_1 = \widetilde{\mathcal{F}}_2$. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно доказать включение $\mathcal{F}_2 \subset \widetilde{\mathcal{F}}_2$.

Пусть о.-ф. $w \in \mathcal{F}_2$. Тогда для w можем записать ОМН (3)

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T_2}(z)\{v_2 w(z) - u_2\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}_2.$$

Пусть $\widetilde{P}_2$ обозначает оператор ортогонального проектирования на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}_2$. Умножим последнее неравенство слева и справа на операторы

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{P}_2 & 0_{\mathcal{H}\mathcal{G}_2} \\ \hline 0_{\mathcal{G}_2\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{array}\right] \in \{\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{H}\}, \quad \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{P}_2 & 0_{\mathcal{H}\mathcal{G}_2} \\ \hline 0_{\mathcal{G}_2\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{array}\right]^* \in \{\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{H}\}.$$

С учетом вытекающего из (8) равенства $\widetilde{P}_2 R_{T_2}(z) = \widetilde{P}_2 R_{T_2}(z)\widetilde{P}_2$ и равенства $\widetilde{P}_2^2 = \widetilde{P}_2$ получим

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{P}_2 K_2 \widetilde{P}_2 & \widetilde{P}_2 R_{T_2}(z)\widetilde{P}_2\{\widetilde{P}_2 v_2 w(z) - \widetilde{P}_2 u_2\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}_2.$$

Отсюда и из представлений (9) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{K}_2 & R_{\widetilde{T}_2}(z)\{\widetilde{v}_2 w(z) - \widetilde{u}_2\} \\ \hline * & \{w(z) - w^*(z)\}/\{z - \overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\oplus\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}_2.$$

Поэтому $w \in \widetilde{\mathcal{F}}_2$. Таким образом, $\mathcal{F}_2 \subset \widetilde{\mathcal{F}}_2$. $\square$

4. Вполне неопределенная интерполяционная задача

Определение 7. Интерполяционная задача $\mathcal{P} = \{K, T, u, v\}$ с масштабными пространствами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называется вполне неопределенной, если

$$K \in \{\mathcal{G}\}_>, \quad vh = 0 \Leftrightarrow h = 0, \quad uh = 0 \Leftrightarrow h = 0. \tag{11}$$

С каждой вполне неопределенной обобщенной интерполяционной задачей свяжем ее резольвентную матрицу

$$U(z) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + zv^* R_{T^*}(z)K^{-1}u & -zv^* R_{T^*}(z)K^{-1}v \\ \hline u^* R_{T^*}(z)K^{-1}u & I_{\mathcal{H}} - zu^* R_{T^*}(z)K^{-1}v \end{array}\right]. \tag{12}$$

Здесь $R_{T^*}(z) = (I_{\mathcal{G}} - zT^*)^{-1}$. Ясно, что U голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{Z}}$ и $U : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{Z}} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Введем в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ оператор

$$J = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}.$$

Непосредственные вычисления с использованием (1) позволяют убедиться в том, что J-форма о.-ф. U имеет вид

$$J - U(z)JU^*(\lambda) = i(z - \overline{\lambda}) \begin{bmatrix} v^* \\ u^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K^{-1}R^*_{T^*}(\lambda)[v,\, u], \quad z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{Z}}. \tag{13}$$

Умножим последнее равенство справа на J и подставим в него $\overline{z}$ вместо λ. Учитывая равенство $J^2 = I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$, приходим к принципу симметрии

$$U^{-1}(z) = JU^*(\overline{z})J, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{Z} \cup \overline{\mathcal{Z}}\}.$$

Подставим в (13) $\overline{z}$ вместо z и λ и затем умножим (13) слева и справа на J. Из принципа симметрии и очевидного равенства $R^*_{T^*}(\overline{z}) = R_T(z)$ следует

$$J - U^{-1^*}(z)JU^{-1}(z) = i(\overline{z} - z)J \begin{bmatrix} v^* \\ u^* \end{bmatrix} R^*_T(z)K^{-1}R_T(z)[v,\, u]J. \tag{14}$$

Определение 8. Пусть о.-ф. $p(z)$, $q(z)$ мероморфны в $\mathbb{C}_+$ и принимают значения в $\{\mathcal{H}\}$. Пара $\mathrm{col}[p(z),\, q(z)]$ называется неванлинновской, если для нее существует дискретное в $\mathbb{C}_+$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

1. $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0_{\mathcal{H}}$ $\forall z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$;
2. $[p^*(z) q^*(z)] \frac{J}{i(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}$ $\forall z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

Легко видеть, что всякая неванлинновская о.-ф. $w \in \mathcal{R}$ порождает неванлинновскую пару $\mathrm{col}[I_{\mathcal{H}},\ w]$. Однако не всякая неванлинновская пара представима в таком виде. Например, пара $\mathrm{col}\,[0_{\mathcal{H}},\ I_{\mathcal{H}}]$ является неванлинновской, но она не порождается неванлинновской о.-ф.

На множестве неванлинновских пар введем отношение эквивалентности: пары $\mathrm{col}[p_1(z),\ q_1(z)]$ и $\mathrm{col}[p_2(z),\ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует о.-ф. $Q(z)$, принимающая значения в $\{\mathcal{H}\}$ и такая, что в $\mathbb{C}_+$ мероморфны обе о.-ф.: $Q(z)$, $(Q(z))^{-1}$ и $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$, $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности неванлинновских пар обозначим через $\mathcal{R}_\infty$.

В [2] доказано, что ОМН (3) во вполне неопределенном случае эквивалентно факторизованному ОМН В.П. Потапова

$$[I_{\mathcal{H}}\ w^*(z)]\frac{U^{-1^*}(z)JU^{-1}(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ w(z)\end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}. \tag{15}$$

Множество $\mathcal{F}$ всех решений обобщенной интерполяционной задачи (2) можно описать и в терминах дробно-линейных преобразований [2]. Именно, формула

$$w(z) = \{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\}\{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)\}^{-1}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}_\infty$. Коэффициенты α, β, γ, δ определены в (12).

Пусть некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z} \cup \overline{\mathcal{Z}}\}$. Рассмотрим множество матриц $\{w(z_0) : w \in \mathcal{F}\}$. Используя факторизованное ОМН (15) и хорошо известные рассуждения ([9], с. 44–52), приходим к следующему результату. Для любого оператора $w(z_0)$ существует такой оператор $V \in \{\mathcal{H}\}$, что

$$w(z_0) = c(z_0) + r(z_0)V\rho(z_0), \quad V^*V \leq I_{\mathcal{H}}. \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} c(z_0) &= [i(\overline{z}_0 - z_0)v^*R_T^*(z_0)K^{-1}R_T(z_0)v]^{-1}[i(\overline{z}_0 - z_0)u^*R_T^*(z_0)K^{-1}R_T(z_0)v - iI]^*, \\ r(z_0) &= [i(\overline{z}_0 - z_0)v^*R_T^*(z_0)K^{-1}R_T(z_0)v]^{-\frac{1}{2}}, \\ \rho(z_0) &= [i(\overline{z}_0 - z_0)v^*R_T^*(\overline{z}_0)K^{-1}R_T(\overline{z}_0)v]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

С геометрической точки зрения соотношение (16) означает, что оператор $w(z_0)$ принадлежит операторному кругу с центром в точке $c(z_0)$, левым радиусом $r(z_0)$ и правым радиусом $\rho(z_0)$. Такой круг обозначим символом $\mathcal{K}(z_0)$ и будем называть *кругом Вейля* в точке z_0.

В дальнейшем будем пользоваться известным свойством строго положительных операторов в гильбертовом пространстве. Именно, пусть даны два гильбертовых пространства $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\widehat{\mathcal{G}}$. Тогда

$$\begin{bmatrix} \widetilde{K} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \{\widetilde{\mathcal{G}} \oplus \widehat{\mathcal{G}}\}_> \Longrightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{K} & B \\ B^* & C \end{bmatrix}^{-1} \geq \begin{bmatrix} \widetilde{K}^{-1} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{G}}} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}\widehat{\mathcal{G}}} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, причем задача $\mathcal{P}_2$ является продолжением задачи $\mathcal{P}_1$. Пусть U_k обозначает резольвентную матрицу интерполяционной задачи $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2$.*

Тогда имеет место неравенство

$$\frac{J - U_2(z)JU_2^*(z)}{i(z-\overline{z})} \geq \frac{J - U_1(z)JU_1^*(z)}{i(z-\overline{z})}, \quad z \in \mathbb{C}_\pm. \tag{19}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что масштабное пространство $\mathcal{G}_2$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}_2$ представимо в виде $\mathcal{G}_2 = \widetilde{\mathcal{G}}_2 \oplus \widehat{\mathcal{G}}_2$, причем выполнено условие (8) и сужение интерполяционной задачи $\mathcal{P}_2$ на подпространство $\widetilde{\mathcal{G}}_2$, обозначаемое символом $\widetilde{\mathcal{P}}_2$, унитарно эквивалентно интерполяционной задаче $\mathcal{P}_1$. Пусть $\widetilde{U}_2$ обозначает резольвентную матрицу интерполяционной задачи $\widetilde{\mathcal{P}}_2$.

Далее имеем (для упрощения нижеследующих выражений отождествляем запись операторов в пространстве $\mathcal{G}_2$ с их матричными представлениями как операторов в пространстве $\widetilde{\mathcal{G}}_2 \oplus \widehat{\mathcal{G}}_2$)

$$\frac{J - U_2(z)JU_2^*(z)}{i(z-\overline{z})} = \begin{bmatrix} v_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} R_{T_2^*}^*(z)[v_2,\, u_2] \geq$$
$$\geq \begin{bmatrix} v_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z) \begin{bmatrix} \widetilde{K}_2^{-1} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} R_{T_2^*}^*(z)[v_2,\, u_2] =$$
$$= \begin{bmatrix} v_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\widetilde{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z) \begin{bmatrix} I_{\widetilde{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{K}_2^{-1} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} I_{\widetilde{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} R_{T_2^*}^*(z) \begin{bmatrix} I_{\widetilde{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2\widetilde{\mathcal{G}}_2} \\ 0_{\widetilde{\mathcal{G}}_2\widehat{\mathcal{G}}_2} & 0_{\widehat{\mathcal{G}}_2} \end{bmatrix} [v_2,\, u_2] =$$
$$= \begin{bmatrix} \widetilde{v}_2^* \\ \widetilde{u}_2^* \end{bmatrix} R_{\widetilde{T}_2^*}(z) \widetilde{K}_2^{-1} R_{\widetilde{T}_2^*}^*(z)[\widetilde{v}_2,\, \widetilde{u}_2] = \frac{J - \widetilde{U}_2(z)J\widetilde{U}_2^*(z)}{i(z-\overline{z})} = \frac{J - U_1(z)JU_1^*(z)}{i(z-\overline{z})}.$$

В этой цепочке первое равенство следует из (13), неравенство — из (18), второе и третье равенства — из (9), четвертое равенство — из определения интерполяционной задачи $\widetilde{\mathcal{P}}^{(2)}$, пятое — из того очевидного факта, что резольвентные матрицы унитарно эквивалентных задач совпадают, $\widetilde{U}_2(z) = U_1(z)$. □

5. Предельная интерполяционная задача

Определение 9. Говорят, что задана упорядоченная последовательность интерполяционных задач неванлинновского типа, если каждому натуральному $l \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие обобщенная интерполяционная задача неванлинновского типа $\mathcal{P}_l$ так, что для любых натуральных чисел $l_1 \leq l_2$ интерполяционная задача $\mathcal{P}_{l_2}$ является продолжением интерполяционной задачи $\mathcal{P}_{l_1}$.

Упорядоченную последовательность интерполяционных задач обозначим символом $\{\mathcal{P}_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}_l$ называются *усеченными интерполяционными задачами.* Для исследования их свойств при изменяющихся l введем нижний индекс l, который будет указывать, что соответствующие круги Вейля, резольвентные матрицы и т. д. связаны с l-й интерполяционной задачей.

Определение 10. Пусть дано упорядоченное семейство интерполяционных задач $\{\mathcal{P}_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть $\mathcal{F}_l$ обозначает множество всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}_l$. О.-ф. $w \in \mathcal{R}$ называется решением предельной интерполяционной задачи, если $w \in \mathcal{F}_l$ $\forall l \in \mathbb{N}$.

Множество решений предельной интерполяционной задачи обозначим символом $\mathcal{F}_\infty$, а саму предельную интерполяционную задачу — символом $\mathcal{P}_\infty$.

Напомним, что $\mathcal{Z}_l$ обозначает множество особых точек о.-ф. R_{T_l}. Пусть $\mathcal{Z}_\infty = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_l$, а $\overline{\mathcal{Z}}_\infty = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{Z}}_l$. Будем считать, отбрасывая вырожденные случаи, что множества $\mathcal{Z}_\infty$ и $\overline{\mathcal{Z}}_\infty$ не имеют предельных точек в $\mathbb{C}_\pm$.

Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$ и рассмотрим круги Вейля $\mathcal{K}_l(z_0)$ ([9], с. 44–52). С ростом l круги Вейля вкладываются друг в друга и их пересечение является снова операторным кругом Вейля $\mathcal{K}_\infty(z_0)$, который называется *предельным кругом Вейля в точке* z_0. Центр и радиусы предельного круга Вейля задаются формулами

$$c_\infty(z_0) := \lim_{l\to\infty} c_l(z_0), \quad r_\infty(z_0) := \lim_{l\to\infty} r_l(z_0), \quad \rho_\infty(z_0) := \lim_{l\to\infty} \rho_l(z_0).$$

Отметим, что последовательности в двух последних предельных переходах являются монотонно убывающими и $r_\infty(z_0) \geq 0_{\mathcal{H}}$, $\rho_\infty(z_0) \geq 0_{\mathcal{H}}$.

Зафиксируем две произвольные точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$. По теореме С.А. Орлова [7]

$$m = \operatorname{rank} r_\infty(z_1) = \operatorname{rank} r_\infty(z_2), \quad n = \operatorname{rank} \rho_\infty(z_1) = \operatorname{rank} \rho_\infty(z_2).$$

Числа m и n служат мерой вырожденности предельной интерполяционной задачи.

Определение 11. Если $m = n = \dim \mathcal{H}$, то предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ называется вполне неопределенной.

Можно доказать, что если хотя бы в одной точке $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$ ранг хотя бы одного из радиусов предельного круга Вейля равен размерности пространства $\mathcal{H}$, то предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ является вполне неопределенной.

6. Обобщенный критерий Данжуа

Пусть предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ порождается упорядоченной последовательностью обобщенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ и является вполне неопределенной. Рассмотрим последовательность резольвентных матриц усеченных интерполяционных задач $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}}$.

Символом $\mathbf{W}$ обозначим класс всех мероморфных о.-ф. $U : \mathbb{C} \to \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$ таких, что

$$J - U(z)JU^*(z) \begin{cases} \leq 0, & z \in \mathbb{C}_+; \\ = 0, & z \in \mathbb{R}; \\ \geq 0, & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Из (11) и (13) следует, что резольвентные матрицы усеченных интерполяционных задач U_l принадлежат $\mathbf{W}$. Из неравенств (19) непосредственно следует [5], что $U_l(z) = U_{l-1}(z)b_l(z)$, $b_l \in \mathbf{W}$. Продолжая таким образом, получим

$$U_l(z) = b_1(z) \cdots b_{l-1}(z) b_l(z), \quad b_j \in \mathbf{W}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{20}$$

Оператор $U \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$ называется J-растягивающим (соответственно J-унитарным), если

$$J - UJU^* \geq 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}, \quad J - UJU^* = 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Всякий невырожденный J-растягивающий оператор U допускает представление ([9], с. 26–44; [10])

$$U = \exp(H)\mathcal{U}, \quad HJ \geq 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}, \quad J - \mathcal{U}J\mathcal{U}^* = 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}. \tag{21}$$

Легко видеть, что если резольвентную матрицу U_l умножить справа на произвольный J-унитарный оператор, то получившаяся в результате о.-ф. снова будет резольвентной матрицей. Таким образом, резольвентная матрица определена с точностью до умножения справа на произвольный J-унитарный оператор. Будем специальным образом нормировать резольвентные матрицы усеченных интерполяционных задач.

Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$. Оператор $b_l(z_0)$ из (20) является невырожденным J-растягивающим оператором и, следовательно, допускает представление вида (21)

$$b_l(z_0) = \exp(H_l(z_0))\mathcal{U}_l(z_0), \quad H_l(z_0)J \geq 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Здесь $\mathcal{U}_l(z_0)$ — J-унитарный оператор. Рассмотрим следующую о.-ф. $\widetilde{U}_l(z) = U_l(z)J\mathcal{U}_l^*(z_0)J$. Оператор $J\mathcal{U}_l^*(z_0)J$ является J-унитарным и обратным к оператору $\mathcal{U}_l(z_0)$. Поэтому о.-ф. $\widetilde{U}_l$ снова будет резольвентной матрицей для интерполяционной задачи $\mathcal{P}_l$ и правый сомножитель в ее представлении вида (20) будет иметь нормировку

$$\widetilde{b}_l(z_0) = \exp(H_l(z_0)), \quad H_l(z_0)J \geq 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}},$$

которая называется нормировкой на J-модуль в точке z_0. Продолжая таким образом, получим резольвентную матрицу для интерполяционной задачи $\mathcal{P}_l$, в которой все сомножители в представлении вида (20) будут нормированы на J-модуль в точке z_0. В дальнейшем будем рассматривать только такие резольвентные матрицы для интерполяционных задач $\mathcal{P}_l$, сохраняя для них прежние обозначения U_l. Значит, рассматриваемые нами резольвентные матрицы U_l усеченных интерполяционных задач $\mathcal{P}_l$ в точке z_0 являются произведениями J-модулей $(H_j(z_0)J \geq 0_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$

$$U_l(z_0) = \exp(H_1(z_0))\exp(H_2(z_0))\cdots\exp(H_l(z_0)). \tag{22}$$

Теорема 4 (обобщенный критерий Данжуа). *Для того чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j(z_0)J. \tag{23}$$

Доказательство. Необходимость. Непосредственные вычисления с использованием (14) и (17) приводят к формулам

$$U_l^{-1^*}(z_0)JU_l^{-1}(z_0) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & -c_l^*(z_0) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_l^2(z_0) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & -\rho_l^{-2}(z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ -c_l(z_0) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Аналогичные вычисления с использованием (13) и (17) приводят к формулам

$$U_l(z_0)JU_l^*(z_0) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ c_l(z_0) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_l^{-2}(z_0) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & -\rho_l^2(z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & c_l^*(z_0) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Из этих представлений следует, что во вполне неопределенном случае при $l \to \infty$ J-формы $J - U_l^{-1^*}(z_0)JU_l^{-1}(z_0)$ и $J - U_l(z_0)JU_l^*(z_0)$ стремятся к конечным пределам. Но тогда существуют такие константы C_1 и C_2, что

$$\|J - U_l^{-1^*}(z_0)JU_l^{-1}(z_0)\| \leq C_1, \quad \|J - U_l(z_0)JU_l^*(z_0)\| \leq C_2 \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (22) следует [10], что сходится ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} H_j(z_0)$. Но тогда, очевидно, сходится и ряд (23).

Достаточность. Из сходимости ряда (23) следует сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|H_j(z_0)\|$. Отсюда следует [10] сходимость к неособенному оператору произведения в правой части (22). Таким образом, существует неособенный предел

$$U_\infty(z_0) = \lim_{l\to\infty} U_l(z_0).$$

Теперь, переходя к пределу при $l \to \infty$ в обеих частях (24), получим

$$U_\infty(z_0)JU_\infty^*(z_0) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ \mathrm{c}_\infty(z_0) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\infty^{-2}(z_0) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \rho_\infty^2(z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & \mathrm{c}_\infty^*(z_0) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Левая часть этого равенства невырождена. Но тогда невырожден и правый радиус предельного круга Вейля $\rho_\infty(z_0)$. Отсюда следует полная неопределенность предельной интерполяционной задачи $\mathcal{P}_\infty$. □

7. Решение неопределенной предельной задачи

Теорема 5. *Пусть предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ является вполне неопределенной и резольвентные матрицы U_l усеченных интерполяционных задач $\mathcal{P}_l$ нормированы к модулю в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$.*

Тогда на компактах $K \subset \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$ существуют равномерные пределы

$$U_\infty(z) := \lim_{l\to\infty} U_l(z), \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}, \tag{25}$$

и о.-ф. U_∞ мероморфна и мероморфно обратима в $\mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$.

Доказательство. Из неравенств (19) следует

$$U_{l_2}(z)JU^*_{l_2}(z) - J \geq U_{l_1}(z)JU^*_{l_1}(z) - J, \;\; l_1 \leq l_2, \;\; z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}.$$

Из этой монотонности и из сходимости последовательности операторов $U_l(z_0)$ вытекает утверждение леммы [11]. □

Теорема 6. *Пусть предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}_\infty$ является вполне неопределенной, символ $\mathcal{F}_\infty$ обозначает множество решений $\mathcal{P}_\infty$ и U_∞ определена в* (25).

О.-ф. $w \in \mathcal{F}_\infty$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН В.П. Потапова

$$[I_\mathcal{H} \; w^*(z)]\frac{U_\infty^{-1^*}(z)JU_\infty^{-1}(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix} I_\mathcal{H} \\ w(z)\end{bmatrix} \geq 0_\mathcal{H}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{F}_\infty$. Тогда $w \in \mathcal{F}_l$ $\forall l \in \mathbb{N}$. Следовательно, выполняются неравенства

$$[I_\mathcal{H} \; w^*(z)]\frac{U_l^{-1^*}(z)JU_l^{-1}(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix} I_\mathcal{H} \\ w(z)\end{bmatrix} \geq 0_\mathcal{H}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}. \tag{27}$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, получим (26).

Наоборот, пусть $w \in \mathcal{R}$ и удовлетворяет ОМН (26). Из (19) следует

$$\frac{J - U_{l_2}(z)JU^*_{l_2}(z)}{i(z-\overline{z})} \geq \frac{J - U_{l_1}(z)JU^*_{l_1}(z)}{i(z-\overline{z})}, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}, \;\; l_2 > l_1.$$

Подставим в это неравенство $\overline{z}$ вместо z и умножим его слева и справа на J. Получим (т. к. $i(\overline{z} - z) > 0$, $z \in \mathbb{C}_+$)

$$J - JU_{l_2}(\overline{z})JJJU^*_{l_2}(\overline{z})J \geq J - JU_{l_1}(\overline{z})JJJU^*_{l_1}(\overline{z})J, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}.$$

Воспользовавшись принципом симметрии, получим

$$U_{l_2}^{-1^*}(z)JU_{l_2}^{-1}(z) \leq U_{l_1}^{-1^*}(z)JU_{l_1}^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}, \;\; l_2 > l_1.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l_2 \to \infty$, получим

$$U_\infty^{-1^*}(z)JU_\infty^{-1}(z) \leq U_{l_1}^{-1^*}(z)JU_{l_1}^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\} \;\; \forall l_1 \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что всякое решение $w \in \mathcal{R}$ неравенства (26) является решением неравенства (27) при всех $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $w \in \mathcal{F}_l$ $\forall l \in \mathbb{N}$. А это и означает, что $w \in \mathcal{F}_\infty$. □

О.-ф. U_∞ принимает значения в $\{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$. В соответствии с этим введем матричные обозначения для ее элементов

$$U_\infty(z) = \begin{bmatrix} \alpha_\infty(z) & \beta_\infty(z) \\ \gamma_\infty(z) & \delta_\infty(z)\end{bmatrix}.$$

Из ОМН (26) вытекает следующая теорема, которая дает описание решений предельной интерполяционной задачи.

Теорема 7. *Формула*

$$w(z) = \{\gamma_\infty(z)p(z) + \delta_\infty(z)q(z)\}\{\alpha_\infty(z)p(z) + \beta_\infty(z)q(z)\}^{-1} \tag{28}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_\infty$ *и* $\mathcal{R}_\infty$.

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с доказательством соответствующего утверждения в [2].

Пример 1 (задача Неванлинны–Пика). Задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел из верхней полуплоскости $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ и бесконечная последовательность операторов $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Требуется описать множество таких о.-ф. $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$, что

$$w(z_l) = w_l \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad w \in \mathcal{R}. \tag{29}$$

Нас будет интересовать неопределенный случай, когда задача (29) имеет бесконечно много решений. Поэтому считаем, что выполнено необходимое условие неопределенности — предельные точки последовательности $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ принадлежат $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Вместе с задачей (29) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны–Пика. В таких задачах фиксируется число $l \in \mathbb{N}$ и требуется описать множество таких о.-ф. $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$, что

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \le j \le l, \quad w \in \mathcal{R}. \tag{30}$$

Покажем, что усеченную задачу (30) можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу неванлинновского типа. В качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_l = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{l \text{ слагаемых}}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы K_l, T_l, v_l, u_l, участвующие в задаче (2), зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{gathered} T_l = \mathrm{diag}\{z_1^{-1} I_{\mathcal{H}}, \dots, z_l^{-1} I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}_l\}, \\ K_l = T_l^{-1} \left\{ \frac{s_i - \overline{s}_j^*}{z_i - \overline{z}_j} \right\}_{i,j=1,\dots,l} T_l^{-1^*} \in \{\mathcal{G}_l\}; \\ v_l = \mathrm{col}\{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_l\}, \\ u_l = \mathrm{col}\{w_1, \dots, w_l\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_l\}. \end{gathered}$$

Очевидно, что выполнено ОТ (1). В [5] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (30) являются неравенства $K_l \ge 0_{\mathcal{G}_l}$. Более того [5], о.-ф. $w \in \mathcal{R}$ является решением усеченной задачи (30) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи (30) совпадает с множеством решений интерполяционной задачи неванлинновского типа

$$\mathcal{P}_l = \{K_l, T_l, u_l, v_l\}.$$

Условием полной неопределенности задачи (30) является условие $K_l > 0_{\mathcal{G}_l}$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (11) автоматически выполнены, т. е. задача (30) является вполне неопределенной в смысле определения 7.

Пусть при всех $l \in \mathbb{N}$ интерполяционные задачи (30) являются вполне неопределенными. Покажем, что интерполяционные задачи (30) являются упорядоченным семейством. Действительно, пусть k и l — произвольные натуральные числа и пусть для определенности $k > l$. Тогда пространства $\mathcal{G}_k$ можно представить в виде ортогональной суммы $\mathcal{G}_k = \widetilde{\mathcal{G}}_k \oplus \widehat{\mathcal{G}}_k$, где

$$\widetilde{\mathcal{G}}_k = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{l} \oplus \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{(k-l)}, \quad \widehat{\mathcal{G}}_k = \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{l} \oplus \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus)\mathcal{H}}_{(k-l)}.$$

Легко видеть, что в естественных матричных представлениях оператор $\widetilde{P}_k$ имеет вид

$$\widetilde{P}_k = \operatorname{diag}\{\underbrace{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}}_{l} \; \underbrace{0_{\mathcal{H}}, \dots, 0_{\mathcal{H}}}_{k-l}\} \in \{\mathcal{G}_1^{(k)}\}.$$

Отсюда сдедует, что выполнены условия (8). Рассмотрим интерполяционную задачу $\widetilde{\mathcal{P}}_k$, которая является сужением интерполяционной задачи $\mathcal{P}_k$ на подпространства $\widetilde{\mathcal{G}}_k$. Легко видеть, что интерполяционная задача $\mathcal{P}_l$ унитарно эквивалентна интерполяционной задаче $\widetilde{\mathcal{P}}_k$. Таким образом, семейство интерполяционных задач (30) упорядочено. Поэтому теорема 4 задает критерий неопределенности предельной интерполяционной задачи (29), а формула (28) дает описание всех решений интерполяционной задачи (29) во вполне неопределенном случае.

Пример 2 (проблема моментов Гамбургера). По заданной последовательности операторов $s_0, \dots, s_k, \dots \in \{\mathcal{H}\}_H$ требуется описать множество таких монотонно возрастающих о.-ф. $\sigma : \mathbb{R} \to \{\mathcal{H}\}_H$, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t) \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{31}$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что о.-ф. σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при всех t и $\sigma(t) \to 0_{\mathcal{H}}$ при $t \to -\infty$. Множество нормированных решений σ проблемы моментов (31) обозначим символом $\mathcal{M}_\infty$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_\infty$ свяжем о.-ф.

$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \tag{32}$$

О.-ф. w определена и голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (31). Множество о.-ф. w, ассоциированных с проблемой (31), обозначим символом $\mathcal{F}_\infty$. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}_\infty$ и $\mathcal{M}_\infty$ формулой (32), является взаимно однозначным. Поэтому вместо описания множества $\mathcal{M}_\infty$ можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}_\infty$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (31) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов. В таких проблемах фиксируется число $n \in \mathbb{N}$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие о.-ф. $\sigma : \mathbb{R} \to \{\mathcal{H}\}_H$ и операторы $M \in \{\mathcal{H}\}_\geq$ такие, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \le j \le 2n-1, \quad s_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} d\sigma(t) + M. \tag{33}$$

Проблема моментов (33) называется n-ой усеченной проблемой моментов, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}_n$. Как и в случае проблемы моментов (31), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}_n$ свяжем ассоциированную о.-ф. w вида (32). Множество всех о.-ф. w, ассоциированных с проблемой (33), обозначим символом $\mathcal{F}_n$.

Покажем, что задачу описания ассоциированных о.-ф. можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу неванлинновского типа. В качестве масштабных пространств выберем пространства $\mathcal{G}_n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}$, $\mathcal{H}$. Операторы K_n, T_n, v_n, u_n, участвующие в задаче (2), зададим естественными матричными представлениями

$$K_n = \begin{bmatrix} s_0 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_1 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & \dots & s_{2n-1} & s_{2n} \end{bmatrix}, \quad T_n = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad v_n = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad u_n = - \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что определенные выше операторы удовлетворяют ОТ (1). В [8] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (33) является неравенство $K_n \geq 0_{\mathcal{H}}$. Более того [8], о.-ф. $w \in \mathcal{F}_n$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ОМН (3). Таким образом, множество $\mathcal{F}_n$ совпадает с множеством решений обобщенной интерполяционной задачи

$$\mathcal{P}_n = \{K_n, T_n, u_n, v_n\}. \tag{34}$$

Условием полной неопределенности является условие $K_n > 0_{\mathcal{H}}$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (11) автоматически выполнены, т. е. задача (34) является вполне неопределенной в смысле определения 7. Будем считать, что задачи (34) являются вполне неопределенными при всех n.

Как и в случае задачи Неванлинны–Пика, убеждаемся в том, что интерполяционные задачи (34) являются упорядоченным семейством. Поэтому теорема 4 задает критерий неопределенности предельной интерполяционной задачи (31), а формула (28) дает описание всех решений предельной интерполяционной задачи (31) во вполне неопределенном случае.

Литература

1. Нудельман А.А. *Об одном обобщении классических интерполяционных задач* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256. – № 4. – С. 790–793.
2. Иванченко Т.С., Сахнович Л.А. *Операторный подход к схеме В.П. Потапова исследования интерполяционных задач* // Укр. матем. журн. – 1987. – Т. 39. – № 5. – С. 573–578.
3. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A. *An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems* // Oper. Theory: Advances and Appl. – 1994. – V. 72. – P. 48–86.
4. Sakhnovich L.A. *Interpolation theory and its applications.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ. – 1997. – 197 p.
5. Ковалишина И.В., Потапов В.П. *Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика* // ДАН АрмССР. – 1974. – Т. 59. – № 1. – С. 17–22.
6. Потапов В.П. *Дробно-линейные преобразования матриц* // Исследов. по теории операторов и их прилож. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 75–97.
7. Потапов В.П. *К теории матричных кругов Вейля* // Функц. анализ и прикл. матем. – Киев: Наук. думка, 1982. – С. 113–121.
8. Ковалишина И.В. *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 47. – № 3. – С. 455–497.
9. Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B. *Matricial version of the classical Schur problem.* – Stuttgart–Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Bd. 129. – 1992. – 355 p.
10. Потапов В.П. *Теорема о модуле.* II // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1983. – № 39. – С. 95–106.
11. Орлов С.А. *Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40. – № 3. – С. 593–644.

Харьковский национальный университет

Поступила 08.10.2003