ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, О.А. ЯНУШКЕВИЧ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Как обычно (напр., [1]–[5]), под устойчивостью многокритериальной (векторной) задачи дискретной оптимизации будем понимать свойство непоявления новых оптимумов Парето при "малых" возмущениях параметров исходной задачи, т. е. дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху в смысле Хаусдорфа [1], [6]–[8] точечно-множественного отображения, характеризующего зависимость множества Парето от исходных данных задачи.

Известно [1], [2], [4], [5], [8], что скалярные (однокритериальные) линейные задачи дискретной оптимизации всегда являются устойчивыми. Существование неустойчивых (некорректно поставленных по Адамару) векторных задач дискретной оптимизации (напр., [1]–[5]) естественно приводит к необходимости создания (если это возможно) регуляризирующего оператора, представляющего собой конкретный вид возмущений исходных данных дискретной задачи с тем, чтобы, как и в случае задачи линейного программирования [6], [9], заменить возможно неустойчивую задачу серией возмущенных устойчивых. Первый результат в этом направлении был получен в работе [10] (см. также монографию [1]), где на основе аппарата выпуклых конусов предложена регуляризация и по векторному критерию и по ограничениям векторной задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) поиска множества Парето на ограниченном множестве допустимых решений. При этом в [10] регуляризация по векторному критерию предполагает замену векторной задачи ЦЛП возмущенной задачей с множеством Слейтера, содержащимся в множестве Парето исходной задачи.

В данной статье этот результат обобщается в том смысле, что здесь указан видоизмененный регуляризирующий оператор, воздействующий на векторный критерий и переводящий возможно неустойчивую исходную векторную задачу ЦЛП в серию не только устойчивых, но одновременно и эквивалентных задач, т. е. задач с первоначальным множеством Парето. Предложен также прием ε-регуляризации векторной задачи ЦЛП, позволяющий заменить возможно неустойчивую задачу возмущенными ε-устойчивыми задачами.

Пусть матрица $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$. На конечном множестве (допустимых) решений $X \subset \mathbf{Z}^n$ зададим векторный линейный критерий Cx, компоненты которого (частные критерии), не ограничивая общности, считаем минимизируемыми

$$C_i x \to \min_{x\in X}, \quad i \in N_m.$$

Здесь $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ и в дальнейшем нижний индекс у матрицы (вектора) будет указывать на соответствующую строку матрицы (компоненту вектора).

Под векторной (m-критериальной) задачей ЦЛП $Z^m(C)$ будем понимать задачу нахождения множества Парето (множества эффективных решений)

$$P(C) = \{x \in X : \pi(x, C) = \emptyset\},$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф97-266).

где

$$\pi(x,C)=\{x'\in X : Cx\geq Cx',\ Cx\neq Cx'\}.$$

Введем также традиционное множество Слейтера (слабо эффективных решений)

$$S(C)=\{x\in X : \sigma(x,C)=\emptyset\},$$

где

$$\sigma(x,C)=\{x'\in X : \forall i\in N_m\ C_ix>C_ix'\}.$$

Для любой матрицы $C\in\mathbf{R}^{m\times n}$ очевидно включение

$$P(C)\subseteq S(C). \tag{1}$$

Ясно, что в частном случае, когда $m=1$, множество Парето совпадает с множеством Слейтера и превращается в множество всех оптимальных решений, а наша задача — в обычную (скалярную) задачу ЦЛП $Z^1(c)$ на ограниченном множестве, где $c\in\mathbf{R}^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что число частных критериев $m\geq 2$, поскольку, как уже отмечалось, всякая задача ЦЛП $Z^1(c)$ устойчива.

Введем обозначение $\overline{P}(C):=X\setminus P(C)$. Методом от противного легко доказывается

Лемма 1. *Пусть $C,B\in\mathbf{R}^{m\times n}$. Если для всякого решения $x\in\overline{P}(C)$ справедливо включение $\pi(x,C)\subseteq\sigma(x,B)$, то $S(B)\subseteq P(C)$.*

Для любого натурального числа k в пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим полярные друг к другу нормы l_∞ и l_1

$$\|y\|=\max\{|y_i| : i\in N_k\},\quad \|y\|^o=\sum_{i=1}^{k}|y_i|.$$

Под нормой матрицы $C=[c_{ij}]\in\mathbf{R}^{m\times n}$ будем понимать норму вектора $(c_{11},c_{12},\ldots,c_{mn})$.

В дальнейшем понадобятся следующие очевидные неравенства для матрицы C и ее строк

$$\forall i\in N_m\quad |C_ix|\leq\|C_i\|\,\|x\|^o\leq\|C\|\,\|x\|^o. \tag{2}$$

Следуя [1]–[5], задачу $Z^m(C)$ назовем устойчивой (по векторному критерию), если существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$\forall C'\in\Omega(\varepsilon)\quad P(C+C')\subseteq P(C), \tag{3}$$

где множество возмущающих матриц $\Omega(\varepsilon)$ задается равенством

$$\Omega(\varepsilon)=\{C'\in\mathbf{R}^{m\times n} : \|C'\|<\varepsilon\}.$$

Очевидно, что в случае, когда $\overline{P}(C)=\emptyset$, задача $Z^m(C)$ устойчива.

Лемма 2 ([1], [10]). *Для любой матрицы $C\in\mathbf{R}^{m\times n}$ справедлива формула*

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall C'\in\Omega(\varepsilon)\quad S(C+C')\subseteq S(C).$$

Иными словами, лемма 2 утверждает, что векторная задача ЦЛП нахождения множества Слейтера всегда устойчива.

Пусть $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$. Отображение $\varphi:\mathbf{R}^{m\times n}\to\mathbf{R}^{m\times n}$, которое определяется по правилу

$$\forall C\in\mathbf{R}^{m\times n}\quad \varphi(C)=C+A,$$

назовем A-оператором. Тем самым A-оператор всякую задачу $Z^m(C)$ переводит в задачу $Z^m(C+A)$. Будем говорить, что A-оператор стабилизирует задачу $Z^m(C)$, если существует такое число $\varepsilon>0$, что справедлива формула

$$\forall C'\in\Omega(\varepsilon)\quad P(C+A+C')\subseteq P(C). \tag{4}$$

Пусть матрица $M = [\mu_{ij}] \in \mathbf{R}_{>}^{m\times m}$, вектор $t \in \mathbf{R}_{>}^{m}$, где $\mathbf{R}_{>} = \{u \in \mathbf{R} : u > 0\}$. Для матрицы $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ введем матрицу $A(C, M, t) = (A_1, A_2, \ldots, A_m)^T$ со строками $A_i = t_i \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_{ik} C_k$, $i \in N_m$.

Теорема 1. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$. Для любой матрицы $M \in \mathbf{R}_{>}^{m\times m}$ и всякого вектора $t \in \mathbf{R}_{>}^{m}$ $A(C, M, t)$-оператор стабилизирует векторную задачу ЦЛП $Z^m(C)$, причем*

$$S(C + A(C, M, t)) \subseteq P(C).$$

Доказательство. Пусть $M \in \mathbf{R}_{>}^{m\times m}$, $t \in \mathbf{R}_{>}^{m}$. Если $\overline{P}(C) = \emptyset$, то любой A-оператор стабилизирует задачу $Z^m(C)$.

Пусть $x \in \overline{P}(C) \neq \emptyset$. Тогда $\pi(x, C) \neq \emptyset$ и для любого решения $x' \in \pi(x, C)$ на основании определения множества $\pi(x, C)$ справедливы неравенства

$$\forall i \in N_m \;\; (C_i + A_i)(x - x') \geq t_i \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} C_k (x - x') > 0.$$

Поэтому согласно определению множества $\sigma(x, C + A(C, M, t))$ имеем $x' \in \sigma(x, C + A(C, M, t))$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\forall x \in \overline{P}(C) \;\; \pi(x, C) \subseteq \sigma(x, C + A(C, M, t)).$$

Отсюда с учетом леммы 1 выводим

$$S(C + A(C, M, t)) \subseteq P(C). \tag{5}$$

Далее в силу леммы 2 получаем

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \;\; S(C + A(C, M, t) + C') \subseteq S(C + A(C, M, t)).$$

Учитывая (1) и (5), заключаем, что

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \;\; P(C + A(C, M, t) + C') \subseteq P(C),$$

т. е. $A(C, M, t)$-оператор стабилизирует задачу $Z^m(C)$. $\square$

Из теоремы 1, в частности, вытекает следующий ранее известный результат.

Следствие [10] (см. также [1]). Пусть $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, и строки матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ вычисляются по формулам

$$A_i = \tau \sum_{k=1}^{m} \lambda_k C_k, \quad i \in N_m,$$

где $\tau > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, $\lambda_i > 0$, $i \in N_m$. Тогда A-оператор стабилизирует векторную задачу ЦЛП $Z^m(C)$, и любое слабо эффективное решение возмущенной задачи $Z^m(C+A)$ будет эффективным решением исходной задачи $Z^m(C)$.

Пусть $C, D \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Задачи $Z^m(C)$ и $Z^m(D)$ назовем эквивалентными, если $P(C) = P(D)$. В этом случае будем писать $Z^m(C) \sim Z^m(D)$.

Будем говорить, что A-оператор регуляризирует задачу $Z^m(C)$, если $Z^m(C) \sim Z^m(C + A)$ и задача $Z^m(C + A)$ устойчива. Ясно, что всякий A-оператор, который регуляризирует задачу $Z^m(C)$, одновременно ее стабилизирует.

Теорема 2. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$. Для всякой матрицы $M \in \mathbf{R}_{>}^{m\times m}$ существует такой вектор $t^* \in \mathbf{R}_{>}^{m}$, что $A(C, M, t^*)$-оператор регуляризирует векторную задачу ЦЛП $Z^m(C)$.*

Доказательство. Если $\alpha := |\{Cx : x \in X\}| = 1$, то, очевидно, $A(C, M, t^*)$-оператор регуляризирует задачу $Z^m(C)$ при любом векторе $t^* \in \mathbf{R}^m_>$. Если $\alpha > 1$, то существует положительное число

$$\beta = \frac{\min\{C_i(x - x') > 0 : x, x' \in X,\ i \in N_m\}}{m\|M\|\,\|C\| \max\{\|x - x'\|^o : x, x' \in X\}}.$$

Пусть компоненты вектора t^* удовлетворяют неравенствам

$$0 < t_i^* < \beta, \quad i \in N_m. \tag{6}$$

Сначала докажем, что $Z^m(C + A(C, M, t^*)) \sim Z^m(C)$. В силу включения (5) имеем $P(C + A(C, M, t^*)) \subseteq P(C)$. Далее доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует решение $x \in P(C) \backslash P(C + A(C, M, t^*))$. Тогда множество $\pi(x, C + A(C, M, t^*))$ непусто. Если x' — один из элементов этого множества, то (ввиду $x \in P(C)$) $Cx \leq Cx'$, и найдется такой индекс $i \in N_m$, что $C_i x < C_i x'$. Поэтому на основании (2) и (6) выводим

$$(C_i + A_i)(x - x') = C_i(x - x') + t_i^* \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} C_k(x - x') \leq$$
$$\leq C_i(x - x') + t_i^* \sum_{k=1}^{m} |\mu_{ik} C_k(x - x')| \leq C_i(x - x') + t_i^* m\|M\|\,\|C\|\|x - x'\|^o <$$
$$< C_i(x - x') + \min\{C_k(x - x') > 0 : x, x' \in X,\ k \in N_m\} \leq C_i(x - x') + |C_i(x - x')| = 0,$$

т. е. $x' \notin \pi(x, C + A(C, M, t^*))$. Полученное противоречие доказывает, что $Z^m(C + A(C, M, t^*)) \sim Z^m(C)$. Таким образом, $P(C + A(C, M, t^*)) = P(C)$. Отсюда согласно теореме 1 для всякой матрицы $M \in \mathbf{R}^{m \times m}_>$ задача $Z^m(C + A(C, M, t^*))$ устойчива. $\square$

Отметим, что доказательство теоремы носит конструктивный характер, поскольку неравенствами (6) указана верхняя граница для положительных координат вектора t^*.

Пусть $\varepsilon > 0$, $A, C \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Будем говорить, что A-оператор ε-стабилизирует задачу $Z^m(C)$, если выполняется (4).

Теорема 3. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и всякой матрицы $M \in \mathbf{R}^{m \times m}_>$ существует такой вектор $t^* \in \mathbf{R}^m_>$, что $A(C, M, t^*)$-оператор ε-стабилизирует векторную задачу ЦЛП $Z^m(C)$, причем $S(C + A(C, M, t^*)) \subseteq P(C)$.*

Доказательство. Если $\overline{P}(C) = \emptyset$, то любой A-оператор ε-стабилизирует задачу $Z^m(C)$.

Пусть $\overline{P}(C) \neq \emptyset$, $M = [\mu_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times m}_>$, $\varepsilon > 0$ и t^* — любой вектор с компонентами

$$t_i^* \geq \frac{\zeta}{\xi_i}, \quad i \in N_m, \tag{7}$$

где

$$\zeta = \varepsilon \max\{\|x - x'\|^o : x, x' \in X\},$$
$$\xi_i = \min\left\{\sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} C_k(x - x') : x \in \overline{P}(C),\ x' \in \pi(x, C)\right\}, \quad i \in N_m.$$

Тогда для любой возмущающей матрицы $C' \in \Omega(\varepsilon)$, любых решений $x \in \overline{P}(C)$, $x' \in \pi(x, C)$ и всякого индекса $i \in N_m$ справедливы неравенства

$$(C_i + A_i + C_i')(x - x') \geq \left(t_i^* \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} C_j + C_i'\right)(x - x') > t_i^o \xi_i - \zeta \geq 0.$$

Поэтому $\forall C' \in \Omega(\varepsilon)\ \ S(C + A(C, M, t^o) + C') \subseteq P(C)$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться включением (1). $\square$

Заметим, что в отличие от доказанной теоремы 3 в работе [9] ε-стабилизация задачи $Z^m(C)$ достигается лишь при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Задачу $Z^m(C)$ назовем ε-устойчивой, если выполняется формула (3). Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что A-оператор ε-регуляризирует задачу $Z^m(C)$, если он регуляризирует ее и задача $Z^m(C+A)$ ε-устойчива.

Путем непосредственного обращения к доказательству теорем 2 и 3 с учетом неравенств (6) и (7) после несложных преобразований получается

Теорема 4. *Пусть* $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, $|\{Cx : x \in X\}| > 1$. *Тогда для любой матрицы* $M = [\mu_{ij}] \in \mathbf{R}_{>}^{m\times m}$, *всякого числа* ε, *удовлетворяющего неравенствам*

$$0 < \varepsilon < \frac{\left\{\min\{C_i(x-x')\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_{ik}C_k(x-x') > 0 : x, x' \in X,\ i \in N_m\right\}}{m\|M\|\,\|C\|\max\{(\|x-x'\|^o)^2 : x, x' \in X\}},$$

и любого вектора $t^* \in \mathbf{R}_{>}^{m}$, *компоненты которого подчинены неравенствам*

$$t_i^* \geq \frac{\varepsilon\max\{\|x-x'\|^o : x, x' \in X\}}{\min\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_{ik}C_k(x-x') > 0 : x, x' \in X,\ i \in N_m\right\}}, \quad i \in N_m,$$

$A(C, M, t^*)$*-оператор* ε*-регуляризирует векторную задачу ЦЛП* $Z^m(C)$.

Литература

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. *Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации* // Кибернетика и системн. анализ. – 1993. – № 3. – С. 78–93.
3. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. *Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств* // Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т. 39. – № 2. – С. 33–35.
4. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации* // Кибернетика и системн. анализ. – 1995. – № 4. – С. 137–143.
5. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 11. – С. 1801–1805.
6. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.* – М.: Наука, 1986. – 296 с.
7. Молодцов Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* – М.: Наука, 1987. – 280 с.
8. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. *Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 272 с.
9. Ашманов С.А. *Линейное программирование.* – М.: Наука, 1981. – 340 с.
10. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации* // Кибернетика и системн. анализ. – 1993. – № 3. – С. 172–176.

Белорусский государственный университет
Институт технической кибернетики
Национальной академии наук Беларуси

Поступила
05.03.1999