Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010100.68 - математика

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ

"Пространственные кривые в геометрии Лобачевского"

Работа завершена:

"____" __________2015г. ____(Л.А.Гизятова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, доцент

"____" __________2015г. ____(Е.Н.Сосов)

Заведующий кафедрой:

док. физ.-мат. наук, профессор

"____" __________2015г. ____(В.В.Шурыгин)

Казань - 2015

Оглавление

1. Введение

В магистерской диссертации исследуются пространственные кривые в модели Бельтрами-Клейна в пространстве Лобачевского. При построении графиков используется система компьютерной алгебры *Maxima*.

Цель работы Исследование кривизны и кручения пространственных кривых в модели Бельтрами-Клейна в пространстве Лобачевского.

Задачи:

1. Найти формулы кривизны и кручения в произвольной параметризации в пространстве Лобачевского.

2. Вычислить кривизны и кручения винтовой линии, кривой на торе, цилиндро-коническая винтовая линия в геометрии Лобачевского.

3. Построить носители кривых и графики их кривизн и кручения в пакете *Maxima*.

2. Угол между пересекающимися прямыми

Пусть даны две прямые, заданные своими векторными уравнениями.

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{U_1}t_1,\ \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{U_2}t_2, \tag{1}$$

где $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2, I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$.

Угол между прямыми (1) вычисляется, как угол между двумя плоскостями, перпендикулярными к этим прямым по Лобачевскому. Уравнения этих плоскостей

$$(\vec{P_1}, \vec{R}) = k^2,\ (\vec{P_2}, \vec{R}) = k^2. \tag{2}$$

cos между плоскостями равен

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{P_1}, \vec{P_2}) - k^2|}{\sqrt{\vec{P_1^2} - k^2}\sqrt{\vec{P_2^2} - k^2}}. \tag{3}$$

Заметим, что на основании равенств и формулы (2)

$$\vec{P_i} = \vec{r_0} + \vec{U_i}t_i, (i = 1, 2).$$

$$(\vec{r_0} + \vec{U_i}t_i, \vec{r_0}) = k^2,$$

$$\vec{r_0}^2 + t_i(\vec{U_i}, \vec{r_0}) = k^2,$$

$$t_i = \frac{k^2 - \vec{r_0}^2}{(\vec{U_i}, \vec{r_0})}.$$

Таким образом, получим

$$\vec{P_1} = \vec{r_0} + \vec{U_1}t_1, \vec{P_2} = \vec{r_0} + \vec{U_2}t_2,$$

где

$$t_1 = \frac{k^2 - \vec{r_0}^2}{(\vec{U_1}, \vec{r_0})}, t_2 = \frac{k^2 - \vec{r_0}^2}{(\vec{U_2}, \vec{r_0})}.$$

Отсюда найдем

$$(\vec{P_1},\vec{P_2})-k^2=\frac{(k^2-r_0^2)\{(\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})+\vec{U_1}\vec{U_2}(k^2-r_0^2)\}}{(\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})},$$

$$\vec{P_1^2}-k^2=\frac{(k^2-\vec{r_0^2})\{(\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2})\}}{(\vec{U_1},\vec{r_0})^2},$$

$$\vec{P_2^2}-k^2=\frac{(k^2-\vec{r_0^2})\{(\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2})\}}{(\vec{U_2},\vec{r_0})^2}.$$

Подставим в (3)

$$\cos\varphi=\frac{|(\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})+\vec{U_1}\vec{U_2}(k^2-\vec{r_0^2})|}{\sqrt{(\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2})}\sqrt{(\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2})}}. \tag{4}$$

Условие перпендикулярности двух пересекающихся прямых

$$(\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})+\vec{U_1}\vec{U_2}(k^2-\vec{r_0^2})=0.$$

С помощью тригонометрического тождества найдем формулу $\sin^2\varphi$ угла между пересекающимися прямыми:

$$1-\cos^2\varphi=1-\frac{((\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})+\vec{U_1}\vec{U_2}(k^2-\vec{r_0^2}))^2}{((\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2}))((\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2}))}=$$

$$=\frac{(\vec{U_1},\vec{r_0})^2\vec{U_2}^2(k^2-\vec{r_0^2})+(\vec{U_2},\vec{r_0})^2\vec{U_1}^2(k^2-\vec{r_0^2})+\vec{U_1}^2\vec{U_2}^2(k^2-\vec{r_0^2})^2}{((\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2}))((\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2}))}-$$

$$-\frac{2(\vec{U_1},\vec{r_0})(\vec{U_2},\vec{r_0})\vec{U_1}\vec{U_2}(k^2-\vec{r_0^2})+(\vec{U_1},\vec{U_2})^2(k^2-\vec{r_0^2})^2}{((\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2}))((\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2}))}=$$

$$=\frac{(k^2-\vec{r_0^2})(((\vec{U_2},\vec{r_0})\vec{U_1}-(\vec{U_1},\vec{r_0})\vec{U_2})^2+(k^2-\vec{r_0^2})[\vec{U_1},\vec{U_2}]^2)}{((\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2}))((\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2}))}.$$

Получим формулу:

$$\sin^2\varphi=\frac{(k^2-\vec{r_0^2})\{(k^2-\vec{r_0^2})[\vec{U_1},\vec{U_2}]^2+((\vec{U_2},\vec{r_0})\vec{U_1}-(\vec{U_1},\vec{r_0})\vec{U_2})^2\}}{\{(\vec{U_1},\vec{r_0})^2+\vec{U_1^2}(k^2-\vec{r_0^2})\}\{(\vec{U_2},\vec{r_0})^2+\vec{U_2^2}(k^2-\vec{r_0^2})\}}. \tag{5}$$

3. Кривизна кривой в пространстве Лобачевского

Определим понятие кривизны пространственной кривой в точке M. Проведем касательную MT (на рис.1.) а далее секущую MM_0, где M_0 близкая точка к M данной кривой, φ - угол между MM_0 и MT, Δl - длина дуги кривой MM_0.

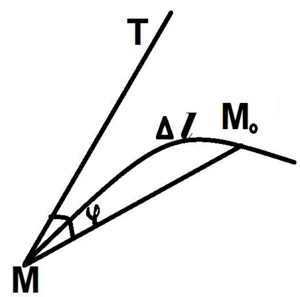


Рис. 1.

Определение. Предел отношения удвоенного угла 2φ к Δl при неограниченном приближении по кривой точки M_0 к M называется *кривизной* данной кривой в точке M.

Обозначим кривизну кривой в точке через k_L. Тогда

$$k_L = \lim_{\substack{M_0 \to M \\ \Delta l \to 0}} \frac{2\varphi}{\Delta l}. \tag{6}$$

Перейдем к выводу формулы кривизны пространственной кривой на основе определения (6).

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(l)$ - векторно-параметрическое уравнение пространственной кривой в натуральной параметризации.

Пусть радиус-вектор точки M равен $\vec{r}(l)$, а вектором точки M_0 равен $\vec{r}(l+\Delta l)$.

Векторно-параметрическое уравнение касательной прямой в точке M имеет вид:

$$\vec{q} = \vec{r}(l) + \dot{\vec{r}}(l)t, \tag{7}$$

а векторно-параметрическое уравнение секущей MM_0 будет таким:

$$\vec{Q} = \vec{r}(l) + (\vec{r}(l+\Delta l) - \vec{r}(l))t, \tag{8}$$

но с точностью до бесконечно малых 2-ого порядка:

$$\vec{r}(l+\Delta l) - \vec{r}(l) = \dot{\vec{r}}(l)\Delta l + \frac{\ddot{\vec{r}}(l)}{2}\Delta l^2.$$

Тогда уравнение секущей MM_0 (8) перепишем в виде

$$\vec{Q} = \vec{r}(l) + (\dot{\vec{r}}(l) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(l)\Delta l)t_*, \tag{9}$$

где $t_* = \Delta l * t$.

Теперь с помощью формулы (5) найдем $\sin\varphi$, полагая в этой формуле:

$$\vec{r} = \vec{r}(l),\ \vec{U_1} = \dot{\vec{r}}(l),\ \vec{U_2} = \dot{\vec{r}}(l) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(l)\Delta l.$$

Для сокращения данной формулы пропустим аргумент l. По формуле (5) получим

$$\sin^2\varphi = \frac{(k^2-\vec{r}^2)\{(k^2-\vec{r}^2)[\dot{\vec{r}},(\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta l)]^2 + (((\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta l)\vec{r})\dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}},\vec{r})(\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta l))^2\}}{\{(\dot{\vec{r}},\vec{r})^2 + \dot{\vec{r}}^2(k^2-\vec{r}^2)\}\{((\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta l)\vec{r})^2 + (\dot{\vec{r}}+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta l)^2(k^2-\vec{r}^2)\}}. \tag{10}$$

На основании формулы $(\vec{r}\dot{\vec{r}})^2 + (k^2-\vec{r}^2)\dot{\vec{r}}^2 = \frac{(k^2-\vec{r}^2)^2}{k^2}$ преобразуем знаменатель к виду:

$$\frac{(k^2-\vec{r}^2)^2}{k^2}\{\frac{(k^2-\vec{r}^2)^2}{k^2} + \{((\vec{r},\dot{\vec{r}})(\vec{r},\ddot{\vec{r}}) + (\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}})(k^2-\vec{r}^2))\}\Delta l + \frac{1}{4}\{(\vec{r},\ddot{\vec{r}})^2 + \ddot{\vec{r}}^2(k^2-\vec{r}^2)\}\Delta l^2\}.$$

После преобразования правой части числителя (10), получим

$$(k^2-\vec{r}^2)\{(k^2-\vec{r}^2)[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2 + (\dot{\vec{r}}(\vec{r},\ddot{\vec{r}}) - \ddot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}))^2\}\frac{\Delta l^2}{4}.$$

Но

$$(\dot{\vec{r}}(\vec{r},\ddot{\vec{r}})-\ddot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}))^2=[\vec{r},[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]]^2=\vec{r}^2[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2-(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}})^2.$$

Отсюда для числителя получится выражение

$$(k^2-(\vec{r})^2)\{k^2[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2-(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}})^2\}\frac{\Delta l^2}{4},$$

и после подстановки в (10) получим

$$\sin^2\varphi=\frac{k^2\{k^2[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2-(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}})^2\}\frac{\Delta l^2}{4}}{(k^2-\vec{r}^2)\{\frac{(k^2-\vec{r}^2)^2}{k^2}+((\vec{r},\dot{\vec{r}})(\vec{r},\ddot{\vec{r}})+(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}})(k^2-\vec{r}^2))\Delta l+(((\vec{r},\ddot{\vec{r}})^2+\ddot{\vec{r}}(k^2-\vec{r}^2))\frac{\Delta l^2}{4})\}}. \tag{11}$$

Переходя к вычислению кривизны кривой из формул (6) и (11) и используя $\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$, получим

$$k_L=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{2\varphi}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\sin\varphi}{\frac{\Delta l}{2}}=\frac{k^2\sqrt{k^2[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}]^2-(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}},\ddot{\overrightarrow{r}})^2}}{(k^2-\overrightarrow{r}^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

Теперь найдем формулу кривизны пространственной кривой в произвольной параметризации. Для этого перейдем к произвольной параметризации в векторно-параметрическом уравнении кривой и её производных.

$$\dot{\vec{r}}=\vec{r}'\frac{dt}{dl}=\frac{\vec{r}'}{l'},\ \ddot{\vec{r}}=\vec{r}''(\dot{t})^2+\vec{r}'\ddot{t},$$

$$\dddot{\vec{r}}=\vec{r}'''(\dot{t})^3+3\vec{r}''\dot{t}+\ddot{t}+\vec{r}'\dddot{t},$$

$$(l')^2=\frac{k^2((k^2-\vec{r}^2)(\vec{r}'^2)+(\vec{r},\vec{r}')^2)}{(k^2-\vec{r}^2)^2},\ \dot{t}=\frac{1}{l'},$$

$$|l'|=\frac{k\sqrt{(k^2-\vec{r}^2)(\vec{r}'^2)+(\vec{r},\vec{r}')^2}}{k^2-\vec{r}^2},$$

$$k_L = \frac{k^2|\dot{t}|^3\sqrt{k^2[\vec{r}', \vec{r}'']^2 - (\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')^2}}{(k^2 - \vec{r}^2)^{3/2}} = \frac{(k^2 - \vec{r}^2)^{3/2}\sqrt{k^2[\vec{r}', \vec{r}'']^2 - (\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')^2}}{k((k^2 - \vec{r}^2)(\vec{r}'^2)^2 + (\vec{r}, \vec{r}')^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

4. Кручение кривой в пространстве Лобачевского

Возьмем на кривой две точки M и M_0 с радиусами-векторами $\vec{r}(l)$ и $\vec{r}(l+\Delta l)$. Через эти точки проведем соприкасающиеся плоскости кривой, уравнения которых имеют вид:

$$(\dot{r}(l), \ddot{r}(l), \vec{R}) = (\vec{r}(l), \dot{\vec{r}}(l), \ddot{\vec{r}}(l)) \tag{14}$$

и

$$(\dot{\vec{r}}(l+\Delta l), \ddot{\vec{r}}(l+\Delta l), \vec{R}) = (\vec{r}(l+\Delta l), \dot{\vec{r}}(l+\Delta l), \ddot{\vec{r}}(l+\Delta l)). \tag{15}$$

Определение. Назовем кручением $\varkappa_L$ кривой в точке M предел отношения острого угла θ между соприкасающимися плоскостями (14) и (15) в точках M и M_0 к длине дуги кривой $\Delta l = MM_0$ при условии, что точка M_0 неограниченно приближается по кривой к точке M.

После всех вычислений придем к формуле:

$$\varkappa_L = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\theta}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\sin\theta}{\Delta l} = \frac{\sqrt{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})^2 \dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{k^2}\{(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] - (\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})[\dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]\}^2}}{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]^2 - \frac{1}{k^2}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})^2}.$$

Получили уравнение кручения в натуральной параметризации. А уравнение кручения в произвольной параметризации будет выглядеть в таком виде:

$$\varkappa_L = \frac{\sqrt{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')^2 (\vec{r}')^2 - \frac{1}{k^2}\{(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''')[\vec{r}', \vec{r}''] - (\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')[\vec{r}', \vec{r}''']\}^2}}{k([\vec{r}, \vec{r}'']^2 - \frac{1}{k^2}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')^2)\sqrt{(k^2 - \vec{r}^2)^2 (\vec{r}')^2 + (\vec{r}, \vec{r}')^2}}. \tag{16}$$

5. Винтовая линия в пространстве Лобачевского

Будем искать уравнение винтовой линии в пространстве Лобачевского в виде.

$$r = a(t)\vec{e}(t) + bt\vec{k},$$

где искомая функция $a = a(t)$ удовлетворяет условию:

$$\operatorname{ch}\rho((0,0,bt),\vec{r}(t)) = \operatorname{ch} a_L.$$

С помощью формулы в модели Бельтрами-Клейна

$$\operatorname{ch}\rho(\vec{c},\vec{d}) = \frac{1-(\vec{c},\vec{d})}{\sqrt{1-\vec{c}^2}\sqrt{1-\vec{d}^2}},$$

где $(\vec{c},\vec{d})$ скалярное произведение радиус-векторов точек c и d.

$$\operatorname{ch} a_L = \frac{1-b^2t^2}{\sqrt{1-b^2t^2}\sqrt{1-a^2(t)-b^2t^2}}. \tag{17}$$

Выразим из формулы (17) $a(t)$

$$\sqrt{1-a^2(t)-b^2t^2} = \frac{\sqrt{1-b^2t^2}}{\operatorname{ch} a_L},$$

$$(1-b^2t^2)(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 a_L}) = a^2(t),$$

$$|\overline{x}| = \operatorname{th}(\frac{\rho(0,x)}{k}) = \operatorname{th}(\frac{x_L}{k}),$$

$$\operatorname{th}^2(a_L)(1-b^2t^2) = a^2(t),$$

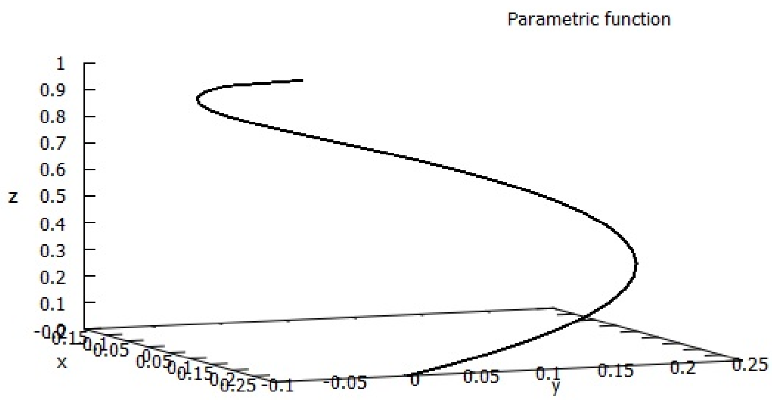
$$a(t) = \operatorname{th} a_L\sqrt{1-b^2t^2} = a\sqrt{1-b^2t^2},$$

где $\operatorname{th} a_L = a$.

Таким образом, уравнение винтовой кривой примет вид:

$$\vec{r} = a\sqrt{1 - b^2t^2}\vec{e}(t) + bt\vec{k}.$$

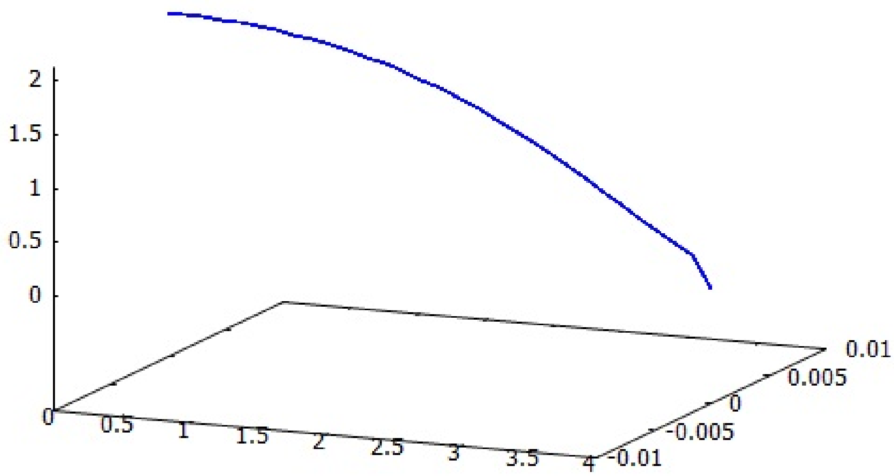
В пакете *Maxima* построим винтовую линию при $a = 0.25$ и $b = 0.25$, $0 < t < 4$.



Кривизна винтовой линии имеет вид:

$$k_L = \frac{-\sqrt{240 - 15t^2}(4096t^2 - 65536)\sqrt{-\frac{t^{12} - 96t^{10} + 4128t^8 - 99392t^6 + 1403136t^4 - 11034624t^2 + 37879808}{1048576t^6 - 50331648t^4 + 805306368t^2 - 4294967296}}}{(t^4 - 32t^2 + 512)\sqrt{15t^4 - 480t^2 + 7680}}.$$

при $0 < t < 4$.



Кручение винтовой линии:

$$-\{(268435456t^6-12884901888t^4+206158430208t^2-1099511627776)(15t^{20}-2220t^{18}+$$

$$+156060t^{16}-6816960t^{14}+203955840t^{12}-4354053120t^{10}+67028720640t^8-733657251840t^6+$$

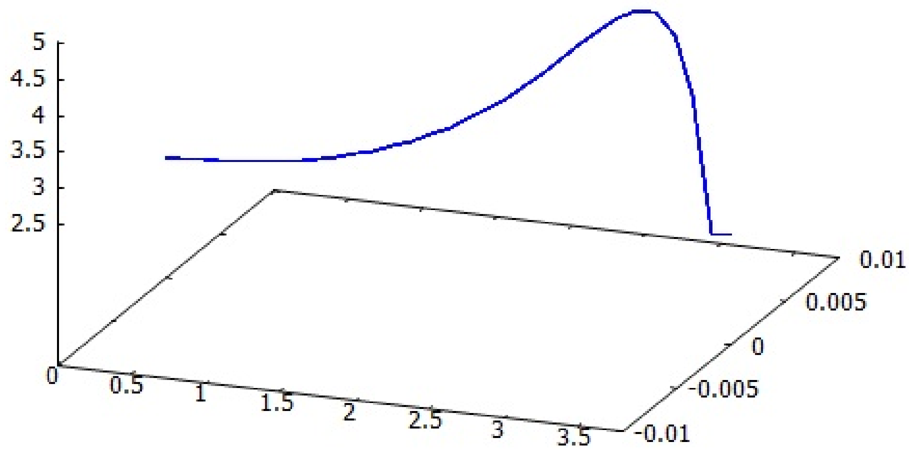
$$+5457107681280t^4-24863236423680t^2+52510505041920)^{1/2}\}/\{\sqrt{15t^4-480t^2+7680}*$$

$$*(t^{12}-96t^{10}+4128t^8-99392t^6+1403136t^4-11034624t^2+37879808)*$$

$$*(68719476736t^12-6597069766656t^{10}+263882790666240t^8-5629499534213120t^6+$$

$$+67553994410557440t^4-432345564227567616t^2+1152921504606846976)^{1/2}\}$$

$0 < t < 4.$

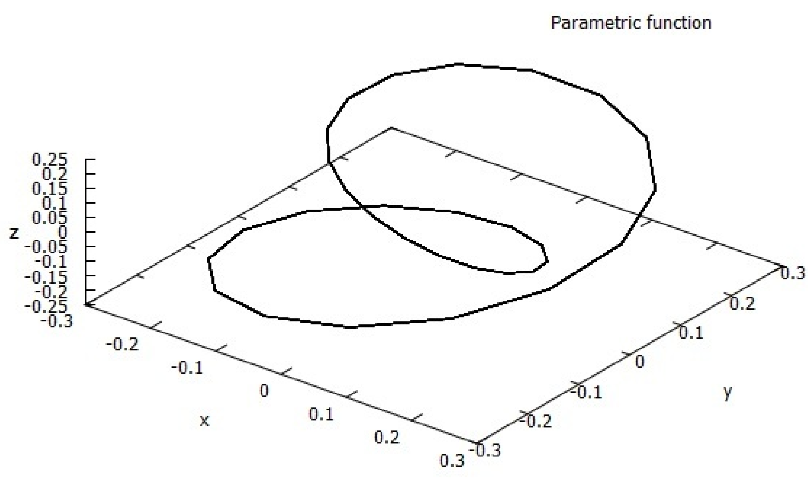


6. Кривая на торе в пространстве Лобачевского

Зададим кривую на торе векторно-параметрическим уравнением:

$$\vec{r} = (b + a\cos(ct + c_0))\vec{e}(t) + a_1 \sin(ct + c_0)\vec{k},$$

где a, a_1, b, c, c_0 - некоторые константы. При построении кривой в $Maxima$ $a = 0.1$, $a_1 = 0.25$, $b = 0.2$, $c = 0.5$, $c_0 = 0.5$, $0 < t < 4\pi$.

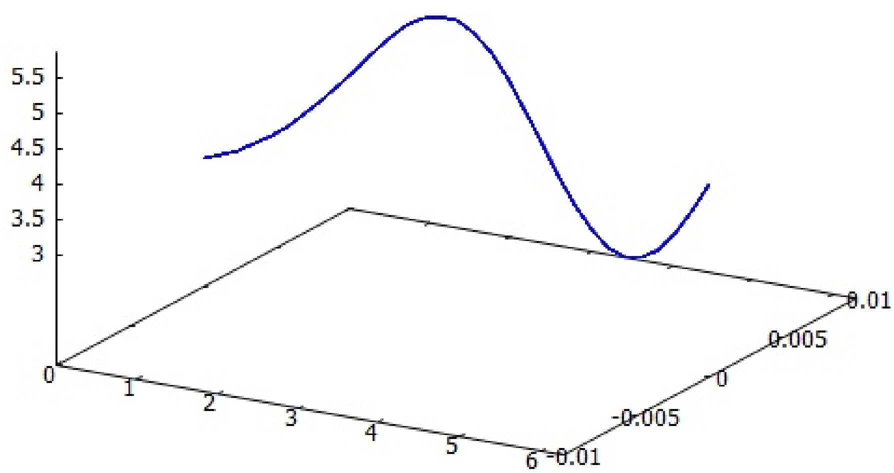


Уравнение кривизны кривой на торе:

$$k_L = \frac{5(21\cos^2\frac{t+1}{2} - 16\cos\frac{t+1}{2} + 359)^{3/2}}{(84\cos^4\frac{t+1}{2} + 272\cos^3\frac{t+1}{2} + 3516\cos^2\frac{t+1}{2} + 5388\cos\frac{t+1}{2} + 6119)^{3/2}} *$$

$$(16\cos^6\frac{t+1}{2} + 144\cos^5\frac{t+1}{2} + 864\cos^4\frac{t+1}{2} + 4088\cos^3\frac{t+1}{2} + 8172\cos^2\frac{t+1}{2} +$$
$$+9864\cos\frac{t+1}{2} + 5413)^{1/2}.$$

$0 < t < 2\pi.$



Уравнение кручения

$$-\{400(3024\cos^{10}\frac{t+1}{2} + 58176\cos^9\frac{t+1}{2} + 510048\cos^8\frac{t+1}{2} + 3210624\cos^7\frac{t+1}{2} +$$

$$+13668192\cos^6\frac{t+1}{2} + 28842408\cos^5\frac{t+1}{2} + 33644916\cos^4\frac{t+1}{2} + 17869968\cos^3\frac{t+1}{2} -$$

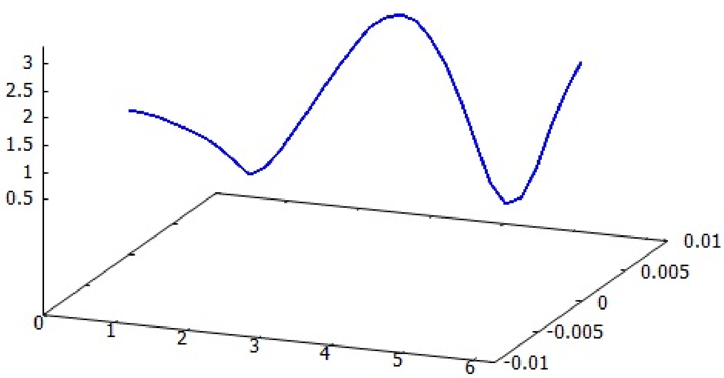
$$-1538901\cos^2\frac{t+1}{2}-3198258\cos\frac{t+1}{2}+495639)^{1/2}\}/$$

$$\{\sqrt{84\sin^4\frac{t+1}{2}+(-272\cos\frac{t+1}{2}-3684)\sin^2\frac{t+1}{2}+5660cos((t+1)/2)+9719*}$$

$$*(16\sin^6\frac{t+1}{2}+(-144\cos\frac{t+1}{2}-912)\sin^4\frac{t+1}{2}+(4376\cos\frac{t+1}{2}+9948)\sin^2\frac{t+1}{2}-$$

$$-14096cos((t+1)/2)-14465)\}$$

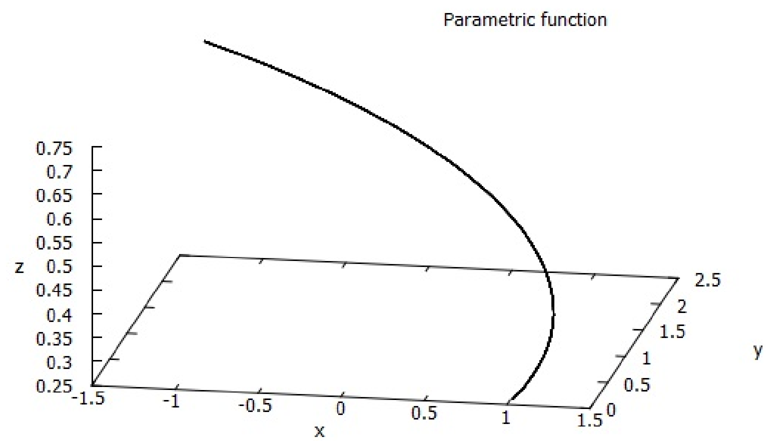
$0 < t < 2\pi.$



7. Цилиндро-коническая винтовая линия

Зададим цилиндро-коническую винтовую в векторно-параметрическом виде:

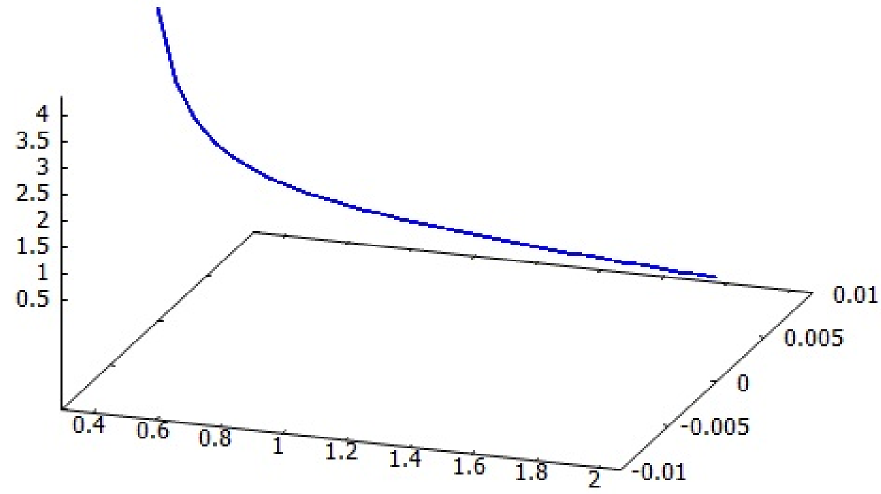
$$\vec{r} = e^{mt}(a\vec{e}(t) + b\vec{k}).$$



Уравнение кривизны посчитанное по формуле (13) будет таким:

$$k_L = \frac{\sqrt{16 - 17e^t}(17e^t - 16)\sqrt{405e^{2t} - 16e^{3t}}}{\sqrt{81e^t - 68e^{2t}}(136e^{2t} - 162e^t)}.$$

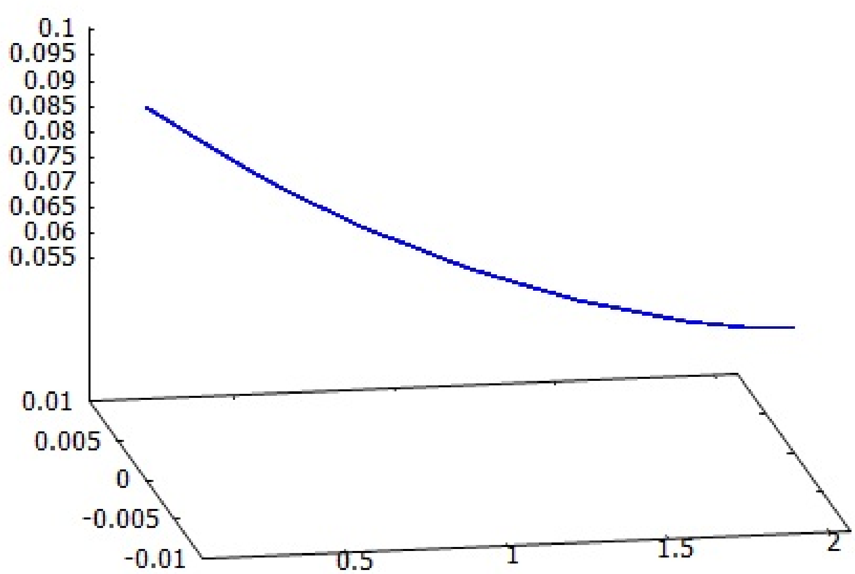
$0.03 < t < 2.07$. График кривизны, построенный в пакете $Maxima$, при $0.05 < t < 2.07$ примет вид:



Уравнение кручения имеет вид:

$$\varkappa_L = -\frac{8\sqrt{2025e^{4t} - 1700e^{5t}}}{\sqrt{81e^t - 68e^{2t}}(16e^t - 405e^{2t})}$$

$0.05 < t < 2.07.$



8. Уравнения главной нормали и бинормали

Определение. *Главной нормалью* кривой в точке M_0 называется прямая, по которой пересекаются соприкасающаяся и нормальная плоскости в точке M_0. Из определения ясно, что главная нормаль Л-перпендикулярна к спрямляющей плоскости в точке M_0. Из сказанного вытекает, что уравнение главной нормали можно записать либо в виде системы двух уравнений

$$(\vec{r_0}, \vec{r_0}', \vec{r_0}'') = T$$

и

$$(\lambda\vec{r_0} + \mu\vec{r_0}')\vec{r} = k^2\lambda,$$

где $\lambda = (\vec{r_0}, \vec{r_0}'), \mu = k^2 - \vec{r_0^2}$, либо составить их, исходя из того, что главная нормаль должна проходить через полюс P спрямляющей плоскости

$$(\vec{r} - \vec{r_0})(P_1 - \vec{r_0})(P - \vec{r_0}) = 0$$

и точку M_0. Так как последние уравнения имеют очень громоздкий вид, мы их не приводим.

Определение. *Бинормалью* кривой в точке M_0 называется прямая, по которой пересекаются нормальная и спрямляющая плоскости в точке M_0. Очевидно, что бинормаль Л-перпендикулярна к соприкасающейся плоскости в точке M_0. Отсюда следует, что уравнения бинормали можно записать в виде системы двух уравнений

$$(\lambda\vec{r_0} + \mu\vec{r_0}')\vec{r} = k^2\lambda,$$

и

$$(\vec{r} - \vec{r_0})(P_1 - \vec{r_0})\vec{r_0}' = 0$$

либо составить их, исходя из того, что бинормаль должна проходить через точку M_0 и полюс P_1 соприкасающейся плоскости. Это приводит нас к следующим уравнениям бинормали в векторном виде

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \{k^2[\vec{r'_0}, \vec{r'_0}] - T\vec{r_0}\}q.$$

9. Код программы в пакете Maxima

Вычисление кривизны пространственной кривой в геометрии Лобачевского.

```
load(draw)$

X:$
Y:$
Z:$

X1:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X))$
X2:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X1))$
X3:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X2))$

Y1:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y))$
Y2:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y1))$
Y3:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y2))$

Z1:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z))$
Z2:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z1))$
Z3:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z2))$

KRIVIZNA:trigsimp((k^2-X^2-Y^2-Z^2)^(3/2)*sqrt(k^2*((X1*Y2-Y1*X2)^2+(Y1*Z2-Z1*Y2)^2+
(Z1*X2-Z2*X1)^2)-(trigsimp(determinant(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X2,Y2,Z2]))))^2)/
(k*((k^2-X^2-Y^2-Z^2)*((X1)^2+(Y1)^2+(Z1)^2)+(X*X1+Y*Y1+Z*Z1)^2)^(3/2)));

draw3d(explicit(KRIVIZNA,t,min,max,v,0,0));
kill(all);
```

Вычисление кручения пространственной кривой в геометрии Лобачевского.

```
X:$
Y:$
Z:$

X1:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X))$
X2:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X1))$
X3:trigsimp(ev('diff(x,t),diff,x=X2))$

Y1:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y))$
Y2:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y1))$
Y3:trigsimp(ev('diff(y,t),diff,y=Y2))$

Z1:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z))$
Z2:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z1))$
Z3:trigsimp(ev('diff(z,t),diff,z=Z2))$

S1:trigsimp(determinant(matrix([X1,Y1,Z1],[X2,Y2,Z2],[X3,Y3,Z3]))^2*((X1)^2+(Y1)^2+(Z1)^2))$
S2:trigsimp((determinant(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X3,Y3,Z3]))^2)*((X1*Y2-X2*Y1)^2+
(Y1*Z2-Z1*Y2)^2+(Z1*X2-X1*Z2)^2))$
S3:trigsimp(determinant(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X3,Y3,Z3]))*
determinant(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X2,Y2,Z2]))*
determinant(matrix([X1*X1+Y1*Y1+Z1*Z1,X1*X3+Y1*Y3+Z1*Z3],[X1*X2+Y1*Y2+Z1*Z2,X2*X3+Y2*Y3+Z2*Z3])))$
S4:trigsimp((determinant(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X2,Y2,Z2]))^2)*
((X1*Y3-X3*Y1)^2+(Y1*Z3-Z1*Y3)^2+(Z1*X3-X1*Z3)^2))$

KRUCHENIE:trigsimp(sqrt(S1-(S2-2*S3+S4)/k^2)/
(k*((X1*Y2-Y1*X2)^2+(Y1*Z2-Z1*Y2)^2+(Z1*X2-Z2*X1)^2-trigsimp((determinant
(matrix([X,Y,Z],[X1,Y1,Z1],[X2,Y2,Z2])))^2)/k^2)*
sqrt((k^2-X^2-Y^2-Z^2)*((X1)^2+(Y1)^2+(Z1)^2)+(X*X1+Y*Y1+Z*Z1)^2)));

draw3d(explicit(KRUCHENIE,t,min,max,v,0,0));
kill(all);
```

10. Заключение

В магистерской диссертации были выведены формулы кривизны и кручения в натуральной и произвольной параметризации. Были построены носители пространственных кривых и графики их кривизн и кручения.

Литература

[1] *Трайнин Я. Л.* Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского: Учеб. пособие. - Новосибирск, 1974. - 285 с.

[2] *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. - М.: Знание, 1969. - 648 с.

[3] *Сосов Е. Н.* Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1: Учебно-методичнское пособие. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012. - 38 с.

[4] *Сосов Е. Н.* Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 2: Учебно-методичекое пособие. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012. - 32 с.

[5] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. - М.: Издательство "Наука", 1971. - 576 с.

[6] *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Часть первая: Геометрия Лобачевского и ее предистория, 1949.- 492 с.

[7] *Норден А. П.* Элементарное введение в геометрию Лобачевского. -М.: Гостехиздат, 1953. - 248 с.

[8] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия — М.: Наука, 1979.

[9] *Александров А. Д.* Геометрия: Учебник. - 2-е изд.-БХВ-Петербург: Учебная литература для вузов,2010.-624 с.

[10] *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. - М.: Издательство "Наука", 1974. - 176 с.