ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.958

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Цель данной работы — исследование разрешимости вариационных задач геометрически и физически нелинейной теории тонких непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны с жестко заделанным краем. Особенностью статьи является то,что разрешимость задач доказывается в функциональном пространстве, отличном от пространств перемещений и усилий. Условия разрешимости задачи получены без каких-либо предположений о малости компонент внешней нагрузки.

Подобные задачи для пологих оболочек рассмотрены в [1]. Физически линейные задачи для непологих оболочек, срединной поверхностью которых являются поверхность вращения, выпуклая развертывающаяся поверхность, изучены в [2], [3].

1. Постановка задачи

Как известно (см., напр. [4], с. 94–95), краевая задача теории оболочек может быть сформулирована как задача нахождения минимума функционала $\Phi = U - A$ полной энергии системы оболочка–внешние силы, где

$$U = \iiint\limits_V \Pi D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \tag{1}$$

— потенциальная энергия, накопленная во всем объеме V оболочки,

$$A = \iint\limits_\Omega [\mathcal{R}^j w_j\big|_{j=\overline{1,3}} - \mathcal{L}^i w_{3\alpha^i}\big|_{i=1,2}] D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{2}$$

— работа внешних "мертвых" сил (по повторяющимся индексам здесь и далее ведется суммирование). Здесь Π — плотность потенциальной энергии деформации, определенная формулой ([4], с. 469)

$$\Pi = \int\limits_{(0,0,0)}^{(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{22})} \sigma^{11} d\varepsilon_{11} + 2\sigma^{12} d\varepsilon_{12} + \sigma^{22} d\varepsilon_{22}, \tag{3}$$

в которой интеграл берется вдоль пути нагружения и не зависит от пути интегрирования ([4], с.470); $\sigma^{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})$ — компоненты тензора напряжения; $\mathcal{R}^j$, $\mathcal{L}^i$ — компоненты внешней нагрузки; w_k, $k = \overline{1,3}$, — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности S_0 оболочки, удовлетворяющие граничным условиям

$$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\partial w_3}{\partial m} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00410, и Академии наук Татарстана.

где Γ — граничный контур плоской области Ω переменных α^1, α^2 гомеоморфной S_0; m — нормаль к Γ; $\varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon^0_{\lambda\mu} + \alpha^3\varepsilon^1_{\lambda\mu}$, $\varepsilon^0_{\lambda\mu}$ и $\varepsilon^1_{\lambda\mu}$ — компоненты тангенциальной и изгибной деформации S_0, которые через перемещения выражаются при помощи соотношений, отнесенных к линиям кривизны

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{jj} &\equiv \gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^k_{jj}w_k - B_{jj}w_3 + \omega^2_j/2, \quad j = 1,2,\\ 2\varepsilon^0_{12} &\equiv \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}w_k + \omega_1\omega_2,\\ \varepsilon^1_{jj} &\equiv \gamma^1_{jj} = -\omega_{j\alpha^j} + G^k_{jj}\omega_k, \quad j = 1,2,\\ 2\varepsilon^1_{12} &\equiv \gamma^1_{12} = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G^k_{12}\omega_k, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\omega_j = w_{3\alpha^j} + B^j_j w_j$; B_{jj}, B^j_j — составляющие тензора кривизны, G^k_{ij} — символы Кристоффеля. В дальнейшем будем считать, что гауссова кривизна $K = B^1_1 B^2_2$ поверхности S_0 отлична от нуля.

При помощи формулы Тейлора первого порядка компоненты напряжения представим в удобном для дальнейших исследований виде

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma^{\lambda\mu}_* \equiv \sigma^{\lambda\mu}_\tau - \sigma^{\lambda\mu}_*,$$

здесь $B^{\lambda\mu qs} = \partial\sigma^{\lambda\mu}/\partial\gamma_{qs}\big|_{\gamma_{ij}=0}$, $\gamma_{\lambda\mu} = \gamma^0_{\lambda\mu} + \alpha^3\gamma^1_{\lambda\mu}$, в соответствии с которым плотность Π потенциальной энергии U примет вид $\Pi = \Pi_\tau - \Pi_*$, где Π_τ, Π_* даются формулой (3) с $\sigma^{\lambda\mu}_\tau$, $\sigma^{\lambda\mu}_*$ соответственно. Непосредственным вычислением находим, что $\Pi_\tau = \frac{1}{2}B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$. С учетом (1) и тонкостенности оболочки для потенциальной энергии U получим

$$U = U(\gamma) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} Q\{\gamma;\gamma\}D d\alpha^1 d\alpha^2 - U_*(\gamma) \equiv U_\tau(\gamma) - U_*(\gamma), \tag{6}$$

где U_* имеет вид (1) с плотностью Π_*, $\gamma = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22})$, $Q\{\gamma;\gamma\} \equiv Q\{\gamma\} = 2\int\limits_{-h}^{h}\Pi_\tau d\alpha^3$ — квадратичная форма, порожденная билинейной формой вида

$$\begin{aligned} Q\{\gamma_1;\gamma_2\} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}\gamma_{1,\lambda\mu}\gamma_{2,qs}d\alpha^3 = D^{\lambda\mu qs}_p\gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs} + \\ + D^{\lambda\mu qs}_*(\gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} + \gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs}) + D^{\lambda\mu qs}_u\gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} \equiv \\ \equiv Q_p\{\gamma^0_1;\gamma^0_2\} + Q_*\{\gamma_1;\gamma_2\} + Q_u\{\gamma^1_1;\gamma^1_2\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$2h = \mathrm{const}$ — толщина оболочки.

Предположим, что выполнены условия

(i) $|\sigma^{\lambda\mu}| \le c(|\gamma_{11}| + |\gamma_{12}| + |\gamma_{22}|)$, $c > 0$, $\lambda,\mu = 1,2$,
(ii) $\Pi \ge c_0(\gamma^2_{11} + \gamma^2_{12} + \gamma^2_{22}) \equiv c_0\gamma^2$,
(iii) $c_1\gamma^2 \le \Pi_\tau \le c_2\gamma^2$,

где c_j — положительные постоянные, не зависящие от $\gamma_{\lambda\mu}$. Заметим, что из условия (iii) следует, что $Q\{\gamma\}$, $Q_p\{\gamma^0\}$, $Q_u\{\gamma^1\}$ суть положительно определенные квадратичные формы в Ω.

2. Вывод основных соотношений

Введем следующие линейные пространства:

а) $D_\omega(\overline{\Omega})$ — пространство вектор-функций $\omega = (\omega_1, \omega_2, w_3)$ класса $\omega_i, w_{3\alpha^i} \in C(\overline{\Omega})$, $\omega_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\omega_1 = \omega_2 = w_3 = w_{3\alpha^1} = w_{3\alpha^2} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{8}$$

эквивалентным (4);

б) $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ — пространство вектор-функций $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ с компонентами

$$\varepsilon_1 = \omega_{1\alpha^1} - \omega_{2\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = \omega_{1\alpha^2} + \omega_{2\alpha^1}, \quad \varepsilon_3 = -w_{3\alpha^1\alpha^1} - w_{3\alpha^2\alpha^2}, \tag{9}$$

где $\omega \in D_\omega(\overline{\Omega})$. Ясно, что $\varepsilon_j \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, $j = \overline{1,3}$.

При помощи комплексных функций $W_1 = -w_{3\alpha^1} + iw_{3\alpha^2}$, $W_2 = \omega_1 + i\omega_2$ соотношения (9) можно записать в комплексной форме

$$W_{j\overline{z}} = f_j/2, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

где $f_1 = \varepsilon_3$, $f_2 \equiv \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $W_{j\overline{z}} = (W_{j\alpha^1} + iW_{j\alpha^2})/2$, $z = \alpha^1 + i\alpha^2$. Используя формулу (6.10) из ([5], с.42), для функций $W_j(z)$ с учетом (10) и $W_j(z) = 0$, $z \in \Gamma$, будем иметь следующие соотношения через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$W_j(z) = (Tf_j)(z)/2 \quad j = 1, 2, \tag{11}$$

где

$$Tf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)/(\zeta - z)d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Известно ([5], сс. 39, 46), что Tf — вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$, $1 \le q \le 2p/(2-p)$, если $1 \le p \le 2$ и из $L_p(\overline{\Omega})$ в $C_{\frac{p-2}{p}}(\overline{\Omega})$, если $p > 2$. Кроме того, можно показать, что Tf — вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$, $1 < p \le 2$, в $L_\gamma(\Gamma)$, $1 < \gamma < p/(2-p)$. Известно также ([5], сс. 34, 36), что существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \overline{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)/(\zeta - z)^2 d\xi\, d\eta, \tag{12}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Отметим ([5], с. 67), что Sf — линейный ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 1$.

Используя формулы (11) и (6.10) из ([5], с. 42), учитывая при этом $\partial w_3/\partial\overline{z} = (-1/4)\overline{T\varepsilon_3}$, для компонент вектора $\omega \in D_\omega(\overline{\Omega})$ получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Re} T\varepsilon_0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Im} T\varepsilon_0, \quad w_3 = -\frac{1}{4}T\overline{T\varepsilon_3} \equiv \frac{1}{2}\widetilde{T}\varepsilon_3. \tag{13}$$

Компоненты деформации также выразим через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. С этой целью при помощи формул (12) найдем производные по z, $\overline{z}$ функций $W_j(z)$, определенных формулами (11), затем через них $\omega_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и подставим их вместе с (11), (13) в соотношения (5), в которых

$$w_k = b_k(\omega_k - w_{3\alpha^k}), \quad b_k = 1/B_k^k, \quad k = 1, 2. \tag{14}$$

Тогда для компонент деформации получим следующие формулы:

$$\gamma_{\lambda\mu}^k \equiv \gamma_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) = t_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) + \tau_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) + \varkappa_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) \tag{15}$$

(в векторной форме $\gamma = t + \tau + \varkappa$), $k = 0, 1$, $\lambda, \mu = 1, 2$, где

$$\begin{aligned}
t_{jj}^0 &= \frac{1}{2}b_j(\varepsilon_3 - (-1)^j \operatorname{Re} S\varepsilon_3 + \operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j\varepsilon_1), \quad j = 1, 2,\\
t_{12}^0 &= \frac{1}{2}[b_1(\varepsilon_2 - \operatorname{Im} S\varepsilon_0) + b_2(\varepsilon_2 + \operatorname{Im} S\varepsilon_0) - (b_1 + b_2)\operatorname{Im} S\varepsilon_3],\\
t_{jj}^1 &= -\frac{1}{2}(\operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j\varepsilon_1), \quad j = 1, 2, \quad t_{12}^1 = -\varepsilon_2;
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{ij}^0 = \mathrm{Re}(\beta_{ij}^0 T\varepsilon_3 + \overline{\beta_{ij}^0} T\varepsilon_3) - \frac{1}{2} B_{ij} \widetilde{T}\varepsilon_3, \\ &\tau_{ij}^1 = \mathrm{Re}(\beta_{ij}^1 T\varepsilon_0), \quad i,j = 1,2, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\varkappa_{jj}^0 = \frac{1}{2}\omega_j^2(\varepsilon_0), \quad j = 1,2, \quad \varkappa_{12}^0 = \omega_1(\varepsilon_0)\omega_2(\varepsilon_0), \\ &\varkappa_{ij}^1 \equiv 0, \quad i,j = 1,2, \end{aligned} \tag{18}$$

β_{ij}^k — известные комплексные функции, зависящие от G_{ij}^k, b_j, $b_{j\alpha^k}$.

Соотношения (13) и (15) составляют основу предложенного метода исследования задачи и играют ту же роль, что и формулы (5) при решении задач в перемещениях. Подставляя (13)–(15) в (6), (2), для функционала Φ получим представление через элементы пространства $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$: $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon) = U(\varepsilon) - A(\varepsilon)$, в котором

$$U(\varepsilon) \equiv U(\gamma(\varepsilon)) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} [Q\{t(\varepsilon)\} +$$

$$+Q\{\tau(\varepsilon) + \varkappa(\varepsilon); \gamma(\varepsilon) + t(\varepsilon)\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 - U_*(\varepsilon) \equiv U_\tau(\varepsilon) - U_*(\varepsilon), \tag{19}$$

$$A \equiv A(\varepsilon) = \mathrm{Re} \iint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{L}; \varepsilon) D d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{20}$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{L}; \varepsilon) = \frac{1}{2}[(b_1\mathcal{R}^1 - ib_2\mathcal{R}^2)T\varepsilon_0 + \mathcal{R}^3 \widetilde{T}\varepsilon_3 + (\mathcal{L}^1 + b_1\mathcal{R}^1 + i(\mathcal{L}^2 + b_2\mathcal{R}^2))T\varepsilon_3].$$

3. Построение основного пространства

Каждой паре элементов $\varepsilon^j \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, $j = 1,2$, поставим в соответствие число

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2)_H = \iint\limits_{\Omega} Q\{t(\varepsilon^1); t(\varepsilon^2)\} D d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{21}$$

где билинейная форма Q дается формулой (7). Покажем, что (21) удовлетворяет всем условиям скалярного произведения. Пусть $(\varepsilon, \varepsilon)_H = 0$. Из положительной определенности квадратичной формы $Q\{t\}$ следует, что $t_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) = 0$, $k = 0,1$; $\lambda, \mu = 1,2$. Тогда, принимая во внимание формулы (16), легко получаем $\varepsilon = 0$ в $\overline{\Omega}$. Выполнение остальных условий скалярного произведения очевидно. Замыкание $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ в норме $\|\varepsilon\|_H = (\varepsilon, \varepsilon)_H^{1/2}$ обозначим через $H(\overline{\Omega})$. Исследуем свойства элементов пространства $H(\overline{\Omega})$.

Теорема 1. *Пусть $D_{p,*,u}^{\lambda\mu qs}$, B_j^j, $j = 1,2$, ограничены в $\overline{\Omega}$. Тогда $m_1\|\varepsilon\|_{L_2}^2 \le \|\varepsilon\|_H^2 \le m_2\|\varepsilon\|_{L_2}^2$, где $m_j > 0$ — постоянные, не зависящие от ε.*

Доказательство. Заметим, что соотношения (16), выражающие $t_{\lambda\mu}^k$ через переменные ε_3, $\mathrm{Re}\, S\varepsilon_3$, t_{12}^0, $\mathrm{Re}\, S\varepsilon_0$, ε_1, ε_2, представляют собой невырожденные преобразования переменных. Поэтому квадратичная форма Q относительно этих новых переменных также является положительно определенной, откуда следует нижняя оценка. Верхняя оценка очевидна. $\square$

На основании теоремы 1 заключаем, что $H(\overline{\Omega})$ — гильбертово пространство. Справедлива

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon \in H(\overline{\Omega})$. Тогда правые части формул* (11) *определяют функции $W_j(z) \in L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, почти всюду удовлетворяющие соотношениям* (9) *и граничным условиям* (8).

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in H(\overline{\Omega})$ и последовательность $\varepsilon^n \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ такая, что $\|\varepsilon^n - \varepsilon\|_H \to 0$, $n \to \infty$. Функции $W_j^n = Tf_j^n/2$, $n = 1,2,\ldots$, по формулам (13) определяют $\omega^n \in D_\omega(\overline{\Omega})$. Используя свойства оператора Tf, получаем $\|W_j - W_j^n\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $\|w_3 - w_3^n\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $n \to \infty$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. *Пусть G_{ij}^k, $B_{j\alpha^k}^j$ ограничены в $\overline{\Omega}$. Тогда* 1) $t_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)$ *суть линейные ограниченные операторы из $H(\overline{\Omega})$ в $L_2(\overline{\Omega})$ и $\|t_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_H$;* 2) $\tau_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)$ *и $\varkappa_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)$ суть вполне непрерывные соответственно линейные и нелинейные операторы из $H(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, и $\|\tau_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon\|_H$, $\|\varkappa_{\lambda\mu}^k(\varepsilon)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon\|_H^2$, $k = 0, 1$, $\lambda, \mu = 1, 2$.*

Справедливость леммы 2 непосредственно вытекает из формул (16)–(18) с учетом вышеуказанных свойств операторов Tf, Sf и теоремы 1.

4. Исследование функционала $\Phi(\varepsilon)$ в $H(\overline{\Omega})$

При исследовании функционала $\Phi(\varepsilon)$ на минимум будем опираться на теорему 9.5 из ([6], с. 119), согласно которой если 1) $\Phi(\varepsilon)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал в $H(\overline{\Omega})$, 2) $\Phi(\varepsilon)$ — возрастающий функционал в $H(\overline{\Omega})$, т. е. $\Phi(\varepsilon) \to +\infty$ при $\|\varepsilon\|_H \to \infty$, то $\Phi(\varepsilon)$ имеет точку абсолютного минимума на $H(\overline{\Omega})$.

Докажем ряд утверждений.

Теорема 2. *Функционал $U : L_2^3(\overline{V}) \to R$, определенный формулой* (1), *дифференцируем в любой точке $\gamma = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22})$ пространства $L_2^3(\overline{V})$ деформаций и* $\operatorname{grad} U = D^*(\sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22})$.

Доказательство. Пусть $\gamma, \widetilde{\gamma} \in L_2^3(\overline{V})$. Рассмотрим

$$U(\gamma + \widetilde{\gamma}) - U(\gamma) = \iiint\limits_V D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \int_0^1 \frac{d}{dt}\Pi(\gamma + t\widetilde{\gamma})dt.$$

Откуда с учетом $\partial\Pi/\partial\gamma_{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu}$ после некоторых преобразований получаем

$$U(\gamma + \widetilde{\gamma}) - U(\gamma) = (D^*\sigma^{\lambda\mu}(\gamma), \widetilde{\gamma}_{\lambda\mu})_{L_2^3} + \psi(\gamma; \widetilde{\gamma}), \tag{22}$$

где

$$\psi(\gamma; \widetilde{\gamma}) = \iiint\limits_V D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \int_0^1 [\sigma^{\lambda\mu}(\gamma + t\widetilde{\gamma}) - \sigma^{\lambda\mu}(\gamma)]\widetilde{\gamma}_{\lambda\mu} dt.$$

В силу условия (i) операторы $\sigma^{\lambda\mu}(\gamma)$ действуют в $L_2^3(\overline{V})$. Тогда нетрудно видеть, что $|\psi|/\|\widetilde{\gamma}\|_{L_2} \to 0$ при $\|\widetilde{\gamma}\|_{L_2} \to 0$. В этих условиях (22) означает ([7], с. 79), что функционал $U(\gamma)$ дифференцируем в точке $\gamma \in L_2^3(\overline{V})$ и $\operatorname{grad} U = D^*(\sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22})$. $\square$

Теорема 3. *Пусть для любых $\gamma, \widehat{\gamma} \in L_2^3(\overline{V})$ выполнено условие*

$$\iiint\limits_V [\sigma^{\lambda\mu}(\gamma) - \sigma^{\lambda\mu}(\widehat{\gamma})](\gamma_{\lambda\mu} - \widehat{\gamma}_{\lambda\mu}) D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \ge 0. \tag{23}$$

Тогда функционал $U(\gamma)$ слабо полунепрерывен снизу в $L_2^3(\overline{V})$, т. е. $U(\gamma^0) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} U(\gamma^n)$ для любой слабо сходящейся в $L_2^3(\overline{V})$ последовательности $\gamma^n \to \gamma^0$ (здесь и далее одной стрелкой будем обозначать слабую сходимость).

Доказательство. В силу условия (23) $\operatorname{grad} U(\gamma)$ является монотонным оператором в $L_2^3(\overline{V})$. Следовательно ([6], с. 102), $U(\gamma)$ слабо полунепрерывен снизу в $L_2^3(\overline{V})$. $\square$

Следствие. U — слабо полунепрерывный снизу функционал в $H(\overline{\Omega})$.

Справедливость следствия следует из того, что если $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $H(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$, то в силу леммы 2 $\gamma(\varepsilon^n) \to \gamma(\varepsilon^0)$ в $L_2^3(\overline{V})$, $n \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in L_2(\overline{\Omega})$. Тогда функционал $A(\varepsilon)$, определенный формулой* (20), *является слабо непрерывным в $H(\overline{\Omega})$.*

Справедливость теоремы 4 следует из вполне непрерывности оператора Tf и теоремы 1. Таким образом, функционал $\Phi(\varepsilon)$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений относительно ε_1, ε_2, ε_3

$$\begin{aligned}&\widetilde{\gamma}^0_{jj} \equiv \frac{1}{2}b_j(\varepsilon_3 - (-1)^j \operatorname{Re} S\varepsilon_3) + \operatorname{Re}(\beta^0_{jj}T\varepsilon_3) - \frac{1}{2}B_{jj}\widetilde{T}\varepsilon_3 + \frac{1}{2}\omega^2_j(\varepsilon_0) = 0, \quad j = 1,2,\\ &\widetilde{\gamma}^0_{12} \equiv -\frac{1}{2}(b_1 + b_2) \operatorname{Im} S\varepsilon_3 + \operatorname{Re}(\beta^0_{12}T\varepsilon_3) + \omega_1(\varepsilon_0)\omega_2(\varepsilon_0) = 0,\end{aligned} \tag{24}$$

где $\omega_j(\varepsilon_0)$ определены формулами (13). Из первых двух уравнений системы (24) исключим $\operatorname{Re} S\varepsilon_3$. Получим

$$\varepsilon_3 - K_1\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(b\widetilde{T}\varepsilon_3 + \widetilde{\omega}(\varepsilon_0)), \tag{25}$$

где $K_1\varepsilon_3 = -\operatorname{Re}(B^j_j\beta^0_{jj}T\varepsilon_3)$, $\widetilde{\omega}(\varepsilon_0) = -B^j_j\omega^2_j(\varepsilon_0)$, $b = B^j_jB_{jj}$. Заметим, что оператор $K_1\varepsilon_3$ вполне непрерывен в $L_p(\overline{\Omega})$, $p \geq 1$. В (25) фиксируем ε_1, ε_2 и исследуем разрешимость уравнения (25) относительно ε_3 в $L_1(\overline{\Omega})$. Пусть $\varepsilon^*_3 \in L_1(\overline{\Omega})$ — нетривиальное решение однородного уравнения

$$\varepsilon_3 - K_1\varepsilon_3 = 0. \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что $\varepsilon^*_3 \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$. Введем функцию $v(z) = (T\varepsilon_3)(z)$. Из свойств оператора Tf следует, что $v \in C_{\frac{p-2}{p}}(\overline{\Omega})$ и $\partial v/\partial\overline{z} = \varepsilon_3$. Подставляя все это в (26), приходим к тому, что $v(z)$ есть обобщенная аналитическая функция ([5], гл. 3) в Ω. Кроме того, $v(z)$ непрерывно продолжается на всю плоскость переменных α^1, α^2, причем она голоморфна вне $\overline{\Omega}$ и обращается в нуль на бесконечности. Тогда в силу обобщенной теоремы Лиувилля ([5], с. 128) $v(z) \equiv 0$, откуда $\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - K_1)^{-1}$ (I — тождественный оператор), ограниченный в $L_1(\overline{\Omega})$, и уравнение (25) запишется в виде

$$\varepsilon_3 - K_2\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(I - K_1)^{-1}\widetilde{\omega}(\varepsilon_0), \tag{27}$$

где $K_2\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(I - K_1)^{-1}(b\widetilde{T}\varepsilon_3)$. Для нормы оператора $K_2\varepsilon_3$ имеем оценку

$$\|K_2\varepsilon_3\|_{L_1} \leq q_1\|\varepsilon_3\|_{L_1},$$

где

$$q_1 = \frac{1}{4\pi^2}\|(I - K_1)^{-1}\|_{L_1} \sup_{z\in\overline{\Omega}} \left[\iint\limits_{\Omega} \frac{dt_1dt_2}{|t - z|} \iint\limits_{\Omega} \frac{|b|d\xi\, d\eta}{|\zeta - t|}\right], \quad t = t_1 + it_2.$$

Пусть выполнено условие

$$q_1 < 1. \tag{28}$$

Тогда $K_2\varepsilon_3$ является сжимающим оператором. Применяя $(I - K_2)^{-1}$ к обеим частям уравнения (27), получаем

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(I - K_2)^{-1}(I - K_1)^{-1}\widetilde{\omega}(\varepsilon_0),$$

откуда

$$\|\varepsilon_3\|_{L_1} \leq \frac{1}{2}\|(I - K_2)^{-1}\|_{L_1}\|(I - K_1)^{-1}\|_{L_1}\|\,|B^j_j|\omega^2_j(\varepsilon_0)\|_{L_1}. \tag{29}$$

Пусть $\varepsilon^0 = (\varepsilon^0_1, \varepsilon^0_2, \varepsilon^0_3) \in H(\overline{\Omega})$ — решение системы (24). Подставим его в (24), после этого первое тождество умножим на $|B^1_1|$, второе — на $|B^2_2|$. Складывая их и интегрируя по области Ω, после несложных преобразований получаем

$$\iint\limits_{\Omega} |B^j_j|\omega^2_j(\varepsilon^0_0)d\alpha^1d\alpha^2 = -\iint\limits_{\Omega}(\tfrac{1}{2}\overline{T}Tg_1 + \operatorname{Re} Tg_2)\varepsilon^0_3d\alpha^1d\alpha^2, \tag{30}$$

где

$$g_1 = |B_j^j| B_{jj}, \quad g_2 = (|B_1^1|_{\alpha^1} + |B_j^j| G_{jj}^1)/B_1^1 + i(|B_2^2|_{\alpha^2} + |B_j^j| G_{jj}^2)/B_2^2.$$

Учитывая, что для решения ε^0 системы (24) справедлива оценка (29), из (30) будем иметь

$$\| \, |B_j^j| \omega_j^2(\varepsilon_0^0) \|_{L_1} \le \frac{1}{2} \|(I-K_1)^{-1}\|_{L_1} \|(I-K_2)^{-1}\|_{L_1} \| \tfrac{1}{2} \overline{T} T g_1 + \operatorname{Re} T g_2 \|_C \| \, |B_j^j| \omega_j^2(\varepsilon_0^0) \|_{L_1} \equiv$$
$$\equiv q \| \, |B_j^j| \omega_j^2(\varepsilon_0^0) \|_{L_1}.$$

Отсюда при выполнении условия

$$q < 1 \tag{31}$$

получаем $\omega_j(\varepsilon_0^0) = 0$, $j = 1, 2$, следовательно, $\varepsilon_0^0 = 0$ и из (29) $\varepsilon_3^0 = 0$. Таким образом, доказана

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (28), (31). *Тогда если* $\varepsilon^0 \in H(\overline{\Omega})$ *— решение системы* (24), *то* $\varepsilon^0 = 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия лемм* 2, 3 *и область* Ω *является соболевской класса* $(2, 2, 2)$. *Тогда* $\Phi(\varepsilon)$ *— возрастающий функционал в* $H(\overline{\Omega})$.

Доказательство. В силу условий (ii), (iii) имеем

$$\Phi(\varepsilon) \ge \frac{c_0}{c_2} U_\tau(\varepsilon) - |A(\varepsilon)| \equiv \Phi_\tau(\varepsilon), \tag{32}$$

где U_τ, A определены формулами (19), (20). Получим оценку снизу для $\Phi_\tau(\varepsilon)$ на эллипсоиде $E(R, 0)$ пространства $L_2(\overline{\Omega})$, заданном при помощи соотношений $\varepsilon_j = R\varepsilon_j^*$, $j = 1, 2$, $\varepsilon_3 = R^2 \varepsilon_3^*$, $\|\varepsilon^*\|_{L_2} = 1$, $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)$. Для этого воспользуемся схемой, предложенной в ([8], § 16) для оценки подобных функционалов. С учетом (7) функционал $\Phi_\tau(\varepsilon)$ представим в виде

$$\Phi_\tau(\varepsilon) = \Phi_4(\varepsilon) + \widetilde{\Phi}(\varepsilon), \quad \Phi_4(\varepsilon) = \frac{c_0}{2c_2} \iint\limits_{\Omega} Q_p\{\widetilde{\gamma}^0\} D \, d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{33}$$

где вектор $\widetilde{\gamma}^0 = (\widetilde{\gamma}_{11}^0, \widetilde{\gamma}_{12}^0, \widetilde{\gamma}_{22}^0)$ определен в (24). $\Phi_4(\varepsilon)$ на $E(R, 0)$ представляет собой однородную по R четвертой степени часть функционала Φ_τ, а $\widetilde{\Phi}$ имеет по R степень не выше третьей. Пусть $\widetilde{\Phi}_4(\varepsilon_3)$ — часть $\Phi_4(\varepsilon)$, зависящая только от ε_3. Принимая во внимание положительную определенность квадратичной формы Q_p и используя теорему 10.8 из ([8], с. 81), получаем

$$\widetilde{\Phi}_4(\varepsilon_3) \ge m_3 \|\varepsilon_3\|_{L_2}^2, \tag{34}$$

где постоянная $m_3 > 0$ не зависит от ε_3.

Рассмотрим множество $E_1(R, 0) = \{\varepsilon \in E(R, 0) \mid \|\varepsilon_0\|_{L_2} \le \delta_0 R\}$, где $0 < \delta_0 < 1$ — произвольно фиксированная постоянная. На $E_1(R, 0)$ с учетом (34) нетрудно получить оценку

$$\Phi_4(\varepsilon) \ge (m_3(1-\delta_0)^2 - c\delta_0^2) R^4, \quad c > 0.$$

Постоянную δ_0 выберем так, чтобы

$$\Phi_4(\varepsilon) \ge m_4 R^4, \tag{35}$$

где $m_4 > 0$ — вполне определенная постоянная, не зависящая от R. Используя (35), из (33) получаем $\Phi_\tau(\varepsilon) \ge m_4 R^4 - c(R^3 + R^2 + R)$, откуда при достаточно больших R

$$\Phi_\tau(\varepsilon) \ge \frac{1}{2} m_4 R^4. \tag{36}$$

Теперь $\Phi_\tau(\varepsilon)$ оценим снизу на остальной части эллипсоида $E_2(R,0) = E(R,0) \setminus E_1(R,0)$. При помощи рассуждений, аналогичных примененным при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\frac{c_0}{2c_2} \iint\limits_{\Omega} Q_u\{\gamma^1\} D d\alpha^1 d\alpha^2 \geq m_5 \|\varepsilon_0\|^2_{L_2}, \tag{37}$$

где $m_5 > 0$ не зависит от ε_0, $\gamma^1 = (\gamma^1_{11}, \gamma^1_{12}, \gamma^1_{22})$.

Пусть $E_2(R,0) = E_2'(R,0) \cup E_2''(R,0)$, где $E_2'(R,0)$ — множество элементов $\varepsilon \in E_2(R,0)$, удовлетворяющих неравенству

$$J(\varepsilon_3) \equiv \iint\limits_{\Omega} |\mathcal{R}^3 \widetilde{T} \varepsilon_3 + (\mathcal{L}^1 + b_1 \mathcal{R}^1 + i(\mathcal{L}^2 + b_2 \mathcal{R}^2)) T \varepsilon_3| D d\alpha^1 d\alpha^2 > m_5 \delta_0^2 R^2, \tag{38}$$

постоянные δ_0, $m_5 > 0$ фиксированы с помощью (35), (37). На $E_2''(R,0)$, следовательно, выполняется условие

$$J(\varepsilon_3) \leq m_5 \delta_0^2 R^2. \tag{39}$$

Пусть $\overline{E_2'(R,0)}$ — слабое замыкание $E_2'(R,0)$. Убедимся, что множество $\overline{E_2(R,0)}$ не содержит нуля. Действительно, пусть $\varepsilon^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \varepsilon_3^n) \in E_2'(R,0)$ и $\varepsilon^n \to 0$ в $L_2(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. В силу усиленной непрерывности линейных вполне непрерывных операторов Tf, $\widetilde{T}f$ в $L_2(\overline{\Omega})$ получаем $J(\varepsilon_3^n) \to 0$, $n \to \infty$, т. е. начиная с некоторого номера n_0 для всех ε^n $(n > n_0)$ неравенство (38) становится невозможным. Полученное противоречие доказывает утверждение.

На $E_2'(R,0)$ справедлива оценка

$$\Phi_4(\varepsilon) \geq m_6 R^4, \quad m_6 > 0. \tag{40}$$

Действительно, если (40) не выполняется, то существует последовательность $\varepsilon^n \in E_2'(R,0)$ такая, что $\Phi_4(\varepsilon^n) \to 0$, $n \to \infty$. Пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $H(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$, $\varepsilon^0 \in \overline{E_2'(R,0)}$. Нетрудно заметить, что функционал $\Phi_4(\varepsilon)$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\overline{\Omega})$. Следовательно, $\Phi_4(\varepsilon^0) = 0$, откуда $\widetilde{\gamma}^0(\varepsilon^0) = 0$, т. е. ε^0 есть решение системы (24). В силу леммы 3 $\varepsilon^0 = 0$. Это противоречит тому, что $\overline{E_2'(R,0)}$ не содержит нуля.

Используя (40), из (33) будем иметь

$$\Phi_\tau(\varepsilon) \geq m_6 R^4 - c(R^3 + R^2 + R),$$

откуда при достаточно больших R

$$\Phi_\tau(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} m_6 R^4, \quad m_6 > 0. \tag{41}$$

Предположим, что для любого $\varepsilon \in E_2''(R,0)$ выполняется условие

$$\iint\limits_{\Omega} [Q_p\{\gamma^0\} + Q_*\{\gamma\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 \geq 0,$$

которое, в частности, имеет место для оболочек с симметричной структурой по оси α^3 (т. к. $D_*^{\lambda\mu qs} \equiv 0$). Тогда из (32) с учетом (37), (39) получаем $\Phi_\tau(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} m_5 \delta_0^2 R^2 - cR$, откуда

$$\Phi_\tau(\varepsilon) \geq \frac{1}{4} m_5 \delta_0^2 R^2, \tag{42}$$

если R достаточно велико. Из оценок (36), (41), (42) следует утверждение теоремы 5. □

Таким образом, все условия теоремы 9.5 из ([6], с. 119) выполнены. Следовательно, функционал $\Phi(\varepsilon)$ имеет точку абсолютного минимума на $H(\overline{\Omega})$.

Автор выражает свою признательность профессору И.Г. Терегулову за полезные обсуждения.

Литература

1. Карчевский М.М. *О разрешимости вариационных задач нелинейной теории пологих оболочек* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 7. – С. 1196–1203.
2. Ворович И.И., Лебедев Л.П., Шлафман Ш.М. *О некоторых прямых методах и существовании решений в нелинейной теории упругости непологих оболочек вращения* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – Вып. 2. – С. 339–348.
3. Шлафман Ш.М. *О существовании решений в нелинейной теории непологих оболочек* // Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высш. школы. Сер. естеств. наук. – 1974. – № 4. – С. 49–53.
4. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности.* – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
7. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
8. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* – М.: Наука, 1989. – 376 с.

Камский политехнический институт

Поступила
25.10.1999