И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 519.21

А.В. ШИПИЛЕВА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ

1. Введение

В теории ветвящихся процессов с дискретным пространством состояний особое место занимают докритические процессы (по поводу терминологии и основных определений см., напр., [1]). К особенностям этих процессов можно отнести то, что в предельных теоремах возникают также дискретные случайные величины. Изучению свойств предельных распределений посвящено большое количество работ [2]. Недавно [3] было показано, что для докритических ветвящихся процессов с непрерывным временем предельные распределения допускают точное описание. В данной работе приводятся аналогичные работе [3] исследования докритических ветвящихся процессов с иммиграцией.

Пусть $\mu(t)$ $(\mu(0) = 0)$ — ветвящийся процесс с иммиграцией; $F(t;z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(t)z^k$ — производящая функция этого процесса $\Big(P_k(t) = pr(\mu(t) = k),\ P_k(t) \geq 0,\ k = 0,1,\dots,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1\Big)$; $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ — инфинитезимальная производящая функция эволюции частиц $\Big(p_1 < 0,\ p_k \geq 0$ при $k \neq 1,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 0\Big)$; $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k z^k$ — инфинитезимальная производящая функция иммиграции частиц $\Big(q_0 < 0,\ q_k \geq 0$ при $k \neq 0,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k = 0\Big)$. Функции $F(t;z)$, $f(z)$ и $g(z)$ связаны уравнениями Колмогорова ([1], с. 219).

Отправным пунктом наших исследований будет следующая предельная

Теорема A ([1], гл. VII, § 3, с. 222). *Если $f'(1) < 0$, $g'(1) < \infty$, то существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$ $\Big(P_k \geq 0$ при $k = 0,1,2,\dots,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k = 1\Big)$ и производящая функция $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k z^k$ удовлетворяет уравнению*

$$F'(z)f(z) + F(z)g(z) = 0. \tag{1}$$

Фиксируя вероятностный закон иммиграции частиц, т. е. инфинитезимальную производящую функцию $g(z)$, удалось получить (см. теорему 1) точное описание предельных вероятностей $P_0, P_1, P_2, \dots$, которые возникают в сформулированной выше теореме. Кроме того, найдены условия на числа $d_0, d_1, \dots, d_n$ необходимые и достаточные для того, чтобы существовал докритический ветвящийся процесс с иммиграцией, у которого предельное распределение $P_0, P_1, P_2, \dots$ удовлетворяет условиям $P_i = d_i$, $i = 0, \dots, n$ (см. теоремы 2, 3).

Процесс с требуемыми свойствами определяется из уравнений Колмогорова с заданной правой частью ([1], с. 219). В частности, если закон иммиграции описывается геометрическим распределением $q_k = bc^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $b > 0$, $0 < c < 1$, то для неотрицательных чисел P_0, P_1, P_2, удовлетворяющих условиям

$$P_0+P_1+P_2<1,\quad 0<P_0<1,\quad 0<P_1<1,$$

и

$$\frac{P_1^2}{2P_0}+\frac{1}{2}cP_1<P_2<\frac{P_1^2}{2P_0}+\frac{1}{2}(c+1)P_1,$$

найдется такой докритический ветвящийся процесс с иммиграцией $\mu(t)$, что

$$P_k=\lim_{t\to\infty}pr(\mu(t)=k),\quad k=0,1,2.$$

2. Формулировка результатов

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия теоремы* A. *Для того чтобы распределение вероятностей* $P_0,P_1,P_2,\ldots$ $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nP_n<\infty\Big)$ *являлось предельным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств*:

$$0<P_0<1,\quad 0<P_1<1,\quad \frac{1}{2}\,\frac{P_1^2}{P_0}+\frac{1}{2}\Big(\frac{q_1}{q_0}+1\Big)P_1<P_2<1,$$

$$\omega_2=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{2}q_kP_{2-k}+2P_2-3P_3\sigma\geq 0,$$

$$\omega_n=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}q_kP_{n-k}-(n+1)\sigma P_{n+1}+nP_n-\frac{1}{P_1}\sum_{k=2}^{n-1}(n-k+1)\omega_kP_{n-k+1}\geq 0,\quad n=3,4,\ldots,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\omega_n<P_1,$$

где $\sigma=-\frac{q_0P_0}{\alpha P_1}$, $\alpha=\frac{1}{P_1}\big(q_0P_1+q_1P_0-\frac{2q_0P_0P_2}{P_1}\big)$.

Для формулировки теорем 2, 3, как и в работе [3], удобно ввести понятие предельной интерполяционной задачи.

Определение. Пусть заданы последовательности чисел $\{i_k : i_k\in N,\ k=0,\ldots,n,\ i_l\neq i_m,\ l\neq m\}$, $\Big\{d_k : d_k\geq 0,\ \sum\limits_{k=0}^{n}d_k\leq 1\Big\}$ и инфинитезимальная производящая функция иммиграции $g(z)$. Будем говорить, что предельная интерполяционная задача $\{i_0,\ldots,\ i_n,g(z);\ d_0,d_1,\ldots,d_n\}$ непрерывно разрешима, если найдется такой докритический ветвящийся процесс $\mu(t)$ с инфинитезимальной производящей функцией $g(z)$, что

$$d_k=\lim_{t\to\infty}pr(\mu(t)=i_k),\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

Процесс $\mu(t)$, удовлетворяющий этим условиям, будем называть решением поставленной предельной интерполяционной задачи.

Теорема 2. *Предельная интерполяционная задача* $\{0,1,2,g(z);x_0,x_1,x_2\}$ *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств*

$$0<x_0<1,\quad 0<x_1<1,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{x_1^2}{x_0}+\frac{1}{2}\Big(\frac{q_1}{q_0}+1\Big)x_1<x_2<\frac{1}{2}\,\frac{x_1^2}{x_0}+\frac{1}{2}\Big(\frac{q_1}{q_0}+2\Big)x_1.$$

Начальные вероятности распределения дискретной случайной величины представляют собой множество в $\mathbf{R}^{m+1}$, описываемое неравенствами $\Big\{(P_0, P_1, \dots, P_m) \in \mathbf{R}^{m+1} : 0 \le P_i \le 1,\ \sum\limits_{i=0}^{m} P_i \le 1\Big\}$. Следующий результат выделяет в этом множестве точки $(P_0, P_1, \dots, P_m)$, для которых непрерывно разрешима предельная интерполяционная задача $\{0, 1, 2, \dots, m, g(z); P_0, P_1, \dots, P_m\}$.

Теорема 3. *Предельная интерполяционная задача* $\{0, 1, 2, \dots, m, g(z); P_0, P_1, \dots, P_m\}$, $m \ge 3$, *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств*

$$0 < P_0 < 1, \qquad 0 < P_1 < 1,$$
$$\frac{1}{2}\frac{P_1^2}{P_0} + \frac{1}{2}\Big(\frac{q_1}{q_0} + 1\Big)P_1 < P_2 < \frac{1}{2}\frac{P_1^2}{P_0} + \frac{1}{2}\Big(\frac{q_1}{q_0} + 2\Big)P_1,$$
$$\max\{0,\ (n+1)b_n - a_n\} \le \omega_n \le b_n, \quad n = 2, \dots, m-1,$$

где $0 < a_2 < P_1$, $b_2 = P_1(1-\sigma)$,

$$a_n = a_2 - \sum_{k=2}^{n-1} k\omega_k, \quad b_n = b_2 - \sum_{k=2}^{n-1} \omega_k, \quad n = 3, 4, \dots, m,$$

а числа σ, ω_k, $k = 2, 3, \dots, m-1$, *определяются через* $P_0, P_1, \dots, P_m$ *так же, как и в теореме* 1.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mu(t)$ — докритический ветвящийся процесс с заданной инфинитезимальной производящей функцией иммиграции частиц $g(z)$, для которого $P_0, P_1, \dots$ является предельным распределением. Функция $f(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией эволюции частиц докритического ветвящегося процесса тогда и только тогда, когда она допускает представление (см. [4]) в виде

$$f(z) = \alpha\Big[1 - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}(z^n - 1)\Big], \tag{2}$$

где $\alpha > 0$, λ_n, $n = 2, 3, \dots$, — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$.

Далее, пусть $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n z^n$ — производящая функция предельного распределения, тогда из (1) имеем

$$F'(z) f(z) = -g(z) F(z). \tag{3}$$

Записывая это равенство в терминах степенных рядов, получаем

$$\alpha\Big(\sum_{n=1}^{\infty} nP_n z^{n-1}\Big)\Big(\sigma - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} z^n\Big) = -\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n,$$

где $\sigma = 1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}$. Равенство коэффициентов при одинаковых степенях z приводит к системе уравнений

$$\begin{gathered} \alpha P_1 \sigma = q_0 P_0, \\ 2\sigma P_2 = -\frac{1}{\alpha}(q_0 P_1 + q_1 P_0) + P_1, \\ n\sigma P_n = -\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} q_k P_{n-k-1} + (n-1)P_{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{n-k}{k}\lambda_k P_{n-k}, \quad n = 3, 4, \dots \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначим $\omega_n = P_1 \frac{\lambda_n}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$ Выражая λ_n из системы (4) через $P_0, P_1, \ldots$, получаем

$$\omega_2 = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{2} q_k P_{2-k} + 2P_2 - 3P_3\sigma,$$

$$\omega_n = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} q_k P_{n-k} - (n+1)\sigma P_{n+1} + nP_n - \frac{1}{p_1} \sum_{k=2}^{n-1} (n-k+1)\omega_k P_{n-k+1}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Система неравенств $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda_n \geq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$ эквивалентна системе неравенств, приведенной в формулировке теоремы, α и σ определяем из первых двух уравнений системы (4). Таким образом, утверждение в одну сторону доказано.

Предположим, что распределение вероятностей $P_0, P_1, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы. Определим функцию $f(z)$ степенным разложением

$$f(z) = \alpha\left(\sigma - z + \frac{1}{P_1} \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n z^n\right).$$

Из определения чисел ω_n и условий $\omega_n \geq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, получаем, что

$$\omega_n \leq nP_n - \frac{q_0}{\alpha} P_n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Неравенства (5) влекут за собой сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \omega_n z^n$ в единичном круге, следовательно, $f(z)$ является аналитической функцией в единичном круге.

Для $\lambda_n = \frac{1}{P_1} n\omega_n$, $n = 2, 3, \ldots$, как следует из условий на ω_n, выполняется система уравнений (4). Это означает, что функции $f(z)$ и $F(z)$ удовлетворяют уравнению (3). Полагая в нем $z = x$, $x \in (0, 1)$ и осуществляя предельный переход при $x \to 1$, получаем

$$f(1) = 0. \tag{6}$$

То есть $f(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией ветвящегося процесса $\mu(t)$. Из равенства (6), переписанного в виде $\alpha\Big[\sigma - 1 + \frac{1}{P_1} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \omega_n\Big] = 0$, получаем, что $\sigma = 1 - \frac{1}{P_1} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \omega_n$ и

$$f(z) = \alpha\left[1 - z - \frac{1}{P_1} \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n (1 - z^n)\right].$$

Пусть $z = x$, $x \in (0, 1)$, тогда

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\alpha(x-1)\Big[-1 + \frac{1}{P_1} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \omega_n \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k\Big]}{x-1} = \alpha\left[-1 + \frac{1}{P_1} \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right]. \tag{7}$$

Правая часть равенства (7) не убывает по $x \in (0, 1)$ и существует предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1)$.

Из равенства (3) получаем $f(x) = -g(x)F(x)/F'(x)$ и

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-g(x)F(x)}{F'(x)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)F(x)}{F'(x)(1-x)} = -\lim_{x \to 1} \frac{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP_n x^{n-1}} < 0.$$

Следовательно, $f(z)$ — инфинитезимальная производящая функция докритического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с заданной иммиграцией $g(z)$. Из единственности представления $f(z)$ (см. [4]) в виде (2) и того, что предельное распределение определяется последовательностью чисел $\lambda_n \geq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, из представления $f(z)$ и заданной иммиграции $g(z)$ следует утверждение о совпадении предельного распределения процесса $\mu(t)$ с данным распределением вероятностей $P_0, P_1, P_2, \ldots$ $\square$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что предельная интерполяционная задача $\{0,1,2,g(z);x_0,x_1,x_2\}$ разрешима, т. е. существует докритический ветвящийся процесс с иммиграцией $\mu(t)$, предельное распределение которого удовлетворяет условиям $P_0 = x_0$, $P_1 = x_1$, $P_2 = x_2$. Разрешая первые два равенства в (4) относительно P_0, P_1, P_2, получим

$$x_1 = -\frac{q_0 x_0}{\alpha\sigma}, \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{\alpha}(q_0 P_1 + q_1 P_0) + P_1}{2\sigma}.$$

Из определения σ и условий на α, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ следуют неравенства

$$\alpha > 0, \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1. \tag{8}$$

Переписывая неравенства (8) в терминах x_0, x_1, x_2, получим неравенства из формулировки теоремы. Таким образом, в одну сторону утверждение доказано.

Обратно, пусть x_0, x_1, x_2 удовлетворяют неравенствам из формулировки теоремы. Определим

$$\alpha = \frac{1}{x_1}\left[q_0 x_1 + q_1 x_0 - \frac{2 q_0 x_0 x_2}{x_1}\right], \quad \sigma = -\frac{x_0 q_0}{x_1 \alpha},$$

тогда для α и σ выполняются неравенства (8) и найдется такое $k \in N$, $k \geq 2$, что $k(1-\sigma) < 1$. Положим $\lambda_k = k(1-\sigma)$, $\lambda_n = 0$ при $n \neq k$. Определенные таким образом λ_n удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \geq 0, \quad n = 2,3,\ldots, \quad \text{и} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{\lambda_k}{k} = \frac{k(1-\sigma)}{k} = 1-\sigma, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1.$$

Подставляя определенную последовательность λ_n, $n \geq 2$, в (2), получим $f(z) = \alpha[\sigma - z + (1-\sigma)z^k]$ — инфинитезимальную производящую функцию эволюции частиц докритического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с заданной иммиграцией $g(z)$, предельное распределение вероятностей $P_0, P_1, P_2, \ldots$ которого связано с числами λ_n, $n \geq 2$, системой уравнений (4). Из первых двух уравнений этой системы получаем

$$P_0 = x_0, \quad P_1 = x_1, \quad P_2 = x_2. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Пусть предельная интерполяционная задача $\{0,1,2,\ldots,m, g(z);P_0,P_1,P_2,\ldots,P_m\}$, $m \geq 3$, разрешима и $\mu(t)$ — докритический ветвящийся процесс с заданной иммиграцией $g(z)$, предельное распределение $P_0, P_1, P_2, \ldots$ которого имеет первые $m+1$ вероятностей из условия задачи. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем систему уравнений (4), которая связывает предельное распределение $P_0, P_1, \ldots$ и последовательность чисел λ_n, $\lambda_n \geq 0$, $n = 2,3,\ldots$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$, а также $\alpha > 0$ из представления $f(z)$ в виде (2). Решая первые два уравнения системы, получим выражения для α и σ, приведенные в формулировке теоремы 1.

Определим

$$\omega_n = P_1 \frac{\lambda_n}{n}, \quad a_n = \sum_{k=n}^{\infty} k\omega_k, \quad b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \omega_k, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

Тогда $0 < a_2 < P_1$, $b_2 = P_1(1-\sigma)$, а ω_n, $n \geq 2$, определяются через предельное распределение вероятностей $P_0, P_1, \ldots$ так же, как в формулировке теоремы 1.

Из теоремы 2 следует, что выполнены первые три неравенства в формулировке теоремы 3. Покажем, что выполнены неравенства

$$\max\{0,\ (n+1)b_n - a_n\} \leq \omega_n \leq b_n, \quad n = 2,3,\ldots,m-1. \tag{9}$$

Так как $\lambda_n \geq 0$ при $n \geq 2$, то $\omega_n \leq b_n$ при $n \geq 2$. Если $\omega_k = \lambda_k = 0$ при всех $k > n$, то $\omega_n = b_n$ и $a_n = nb_n$. В общем случае получаем

$$b_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \omega_k = b_n - \omega_n, \quad a_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} k\omega_k = a_n - n\omega_n,$$
$$a_n - n\omega_n \geq (n+1)b_{n+1} = (n+1)(b_n - \omega_n).$$

Отсюда следует неравенство $\omega_n \geq (n+1)b_n - a_n$. Так как числа $\omega_n \geq 0$ при $n \geq 2$, то справедлива система неравенств (9). В одну сторону утверждение доказано.

Обратно, пусть для чисел $P_0, P_1, \ldots, P_m$ выполнены условия теоремы и σ, α, ω_n, a_n, b_n, $n \geq 2$, определены в соответствии с формулировкой теоремы. Предположим, что

$$\omega_{m-1} = b_{m-1}, \tag{10}$$

тогда

$$\sum_{k=2}^{m-2} \omega_k + b_{m-1} = \sum_{k=2}^{m-2} \omega_k + b_2 - \sum_{k=2}^{m-2} \omega_k = b_2 = P_1(1-\sigma). \tag{11}$$

Также из (10) следует, что $a_{m-1} = (m-1)b_{m-1}$. Это равенство можно переписать в виде

$$a_{m-1} = a_2 - \sum_{k=2}^{m-2} k\omega_k = (m-1)b_{m-1}.$$

Следовательно,

$$a_2 = \sum_{k=2}^{m-1} k\omega_k < P_1. \tag{12}$$

Положим $\lambda_n = \frac{1}{P_1} n\omega_n$, $n = 2, 3, \ldots, m-1$, $\lambda_n = 0$ при $n \geq m$, и определим $f(z)$ по формуле (2).

Соотношения (11) и (12) переписываются в терминах λ_n в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1, \quad 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \sigma.$$

Следовательно, ветвящийся процесс $\mu(t)$ с заданной иммиграцией $g(z)$ и инфинитезимальной производящей функцией эволюции частиц $f(z)$ приводит к предельному распределению $P_0, P_1, \ldots$, в котором начальные вероятности $P_0, P_1, \ldots, P_m$ совпадают в силу системы уравнений (4) с начальными данными предельной интерполяционной задачи.

Предположим, что $\omega_{m-1} < b_{m-1}$. Тогда $a_n > 0$ и $b_n > 0$, и существует такое $k \in N$, $k \geq m$, что выполняются неравенства

$$kb_m \leq a_m \leq (k+1)b_m.$$

Определим систему чисел λ_n, $n \geq 2$, следующим образом:

$$\lambda_n = \frac{1}{P_1} n\omega_n, \quad n = 2, 3, \ldots, m-1,$$
$$\lambda_k = \frac{k}{P_1}[(k+1)b_m - a_m], \quad \lambda_{k+1} = \frac{k+1}{P_1}(a_m - kb_m), \quad k \geq m,$$

$\lambda_n = 0$ для остальных n.

Из определения λ_n и свойств ω_n следует, что $\lambda_n \geq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, и выполнены соотношения

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=2}^{m-1} \frac{n\omega_n}{P_1} + \frac{k+1}{P_1}(a_m - kb_m) + \frac{k}{P_1}((k+1)b_m - a_m) = \sum_{n=2}^{m-1} \frac{n\omega_n}{P_1} + \frac{a_m}{P_1} = \frac{1}{P_1} a_2 < 1$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\sum_{n=2}^{m-1}\omega_n+\frac{a_m-kb_m}{P_1}+\frac{(k+1)b_m-a_m}{P_1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\omega_n}{P_1}=\frac{1}{P_1}b_2=1-\sigma.$$

Следовательно, можно определить инфинитезимальную производящую функцию $f(z)$ некоторого докритического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с заданной иммиграцией $g(z)$ в виде (2). Из системы уравнений (4) и связи λ_n и ω_n при $n = 2, 3, \ldots, m-1$ следует, что предельное распределение $P_0, P_1, P_2, \ldots$ процесса $\mu(t)$ имеет в качестве начальных вероятностей $P_0, P_1, \ldots, P_m$ требуемые значения. $\square$

Литература

1. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* – М.: Наука, 1971. – 436 с.
2. Ватутин В.А., Зубков А.М. *Ветвящиеся процессы.* I // Итоги науки и техн. Сер. теория вероятн., матем. стат., теор. кибернет. – 1985. – Т. 23. – С. 3–67.
3. Горяйнов В.В., Полковников А.А. *О предельных распределениях вероятностей для докритических ветвящихся процессов* // Теория вероятн. и ее примен. – 1996. – Т. 41. – № 2. – С. 417–425.
4. Горяйнов В.В. *Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 5. – С. 55–74.

Волгоградский государственный университет

Поступила 25.06.1998