ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.958:539.3

Т.И. ИШАНКУЛОВ, О.И. МАХМУДОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — точки трехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ и термоупругая среда есть ограниченная односвязная область D в $\mathbb{E}^3$ с кусочно-гладкой границей, состоящей из куска Σ плоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т. е. $\partial D = S \cup \Sigma$. Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$B(\partial/\partial x, \omega) = \|B_{mj}(\partial/\partial x, \omega)\|_{4\times 4},$$
$$B_{mj}(\partial/\partial x, \omega) = (1-\delta_{m4})(1-\delta_{4j})[\delta_{mj}\mu(\Delta(\partial/\partial x) + \rho\omega^2/\mu) + (\lambda+\mu)\partial^2/\partial x_m \partial x_j] -$$
$$-\delta_{4j}(1-\delta_{m4})\gamma\partial/\partial x_m + i\omega\eta\delta_{m4}(1-\delta_{4j})\partial/\partial x_j + \delta_{m4}\delta_{4j}(\Delta(\partial/\partial x) + i\omega/\varkappa), \quad m, j = 1, 2, 3, 4,$$

где $\Delta(\partial/\partial x) = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ — оператор Лапласа, λ, μ, ρ — постоянные Ламе и плотность упругой среды соответственно, ω — частота колебания, δ_{mj} — символ Кронекера, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α — коэффициент линейного температурного расширения среды, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, i — мнимая единица, k — коэффициент теплопроводности среды, $\eta = \gamma\theta_0/k$, θ_0 — температура среды в недеформированном состоянии. Уравнение термоупруго-колебательного состояния среды D в компонентах смещения принимает вид [1]

$$B(\partial/\partial x, \omega)v = 0, \tag{1}$$

где $v = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u, u_4)$ — компоненты смешения, $u_4 = \theta$ — отклонение температуры среды от температуры θ_0. Решение v системы (1) в области D назовем регулярным, если $v \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

В дальнейшем будем использовать матричный дифференциальный оператор термонапряжения

$$R(\partial/\partial y, n(y)) = \left\| \begin{matrix} & & & -\gamma n_1 \\ & \boxed{\mathrm{T}} & & -\gamma n_2 \\ & & & -\gamma n_3 \\ & & & -\gamma n_4 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial n \end{matrix} \right\|,$$

где $\boxed{\mathrm{T}}$ означает оператор напряжения

$$T(\partial/\partial y, n(y)) = \|T_{mj}\|_{3\times 3} = \|\lambda n_m \partial/\partial y_j + \mu n_j \partial/\partial y_m + \mu\delta_{mj}\partial/\partial n\|_{3\times 3},$$

$n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке y. Через $\widetilde{R}(\partial/\partial y, n(y))$ обозначим матрицу, которая получается из $R(\partial/\partial y, n(y))$ заменой в последнем столбце γ на $i\omega\eta$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение v системы (1) в области D, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S,

$$v(y)|_S = f(y), \quad R(\partial/\partial y, n(y))v(y)|_S = g(y), \tag{2}$$

$f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ — заданные непрерывные вектор-функции.

Данная задача является некорректной. Характер некорректности такой же, как у задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Для случая $\omega = 0$, $\gamma = 0$ [2] (система уравнений статики) рассматриваемая задача исследована в [3]. Наша цель состоит в построении приближенного решения задачи (1), (2), основанном на методе функции Карлемана.

Функцию Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа в случае, когда Σ — часть поверхности конуса, построил Ш.Я. Ярмухамедов [4], [2]. Матрица Карлемана задачи Коши для уравнений Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построена в [5]. Развивая идею С.Н. Мергеляна [6] построения функции Карлемана в случае задачи Коши для уравнения Лапласа, когда S — кусок с гладким краем границы односвязной области, основанного на теоремах об аппроксимации, Н.Н. Тарханов [7] построил матрицу Карлемана для эллиптических систем (см. также [8]–[15]).

Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ с точностью δ, $0 < \delta < 1$ (в метрике $\mathbb{C}$), которые могут не принадлежать классу существования решений. В работе строится семейство функций $U(x, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи (1), (2). Следуя [8], $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи (1), (2).

Используя результаты [9], [10], [4] по задаче Коши для уравнения Лапласа, построим матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе — регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений термоупругости.

Ранее в работах [5], [7] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве с положительной мерой. Поскольку здесь идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Следуя [9], приведем

Определение. Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется 4×4-матрица $\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + G(y, x, \omega, \gamma, \sigma),$$

где σ — положительный числовой параметр, матрица $G(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D, $\Gamma(y, x, \omega, \gamma)$ — матрица фундаментальных решений уравнений (1);

$$\int_\Sigma (|\Pi| + |(\widetilde{R}\Pi^*)^*|) ds_y \le \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$; здесь и далее Π^* означает матрицу, сопряженную матрице Π, а $|\Pi|$ — евклидова норма матрицы $\Pi = \|\Pi_{mj}\|$, т. е. $|\Pi| = \Big(\sum\limits_{m,j=1}^{4} \Pi_{mj}^2\Big)^{1/2}$ (в частности, $|U| = \Big(\sum\limits_{m=1}^{4} u_m^2\Big)^{1/2}$ для вектора $U = (u, u_4)$).

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) рассмотрим матрицу

$$\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \|\Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma)\|_{4\times4}, \tag{3}$$

$$\Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \frac{(1-\delta_{m4})(1-\delta_{j4})}{2\pi}\Big[\frac{\delta_{mj}}{\mu}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_3) - \sum_{k=1}^{3}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k)\Big] +$$

$$+\frac{i\omega\eta}{2\pi}\delta_{m4}(1-\delta_{j4})\sum_{k=1}^{3}\beta_k\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) -$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi}\delta_{j4}(1-\delta_{m4})\sum_{k=1}^{3}\beta_k\frac{\partial}{\partial x_m}\Phi_\sigma(y,x,i\lambda_k)+\frac{\delta_{j4}\delta_{m4}}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi_\sigma(y,x,i\lambda_k),$$

где постоянные α_k, β_k, γ_k, λ_k явно выражаются через постоянные термоупругости — коэффициенты системы (1) [1],

$$\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\exp[\sigma(w-x_3)+(w-x_3)^2]}{w-x_3}\frac{\cos\Lambda u\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{4}$$

$w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, $\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $\alpha>0$.

Из результатов работы [4] вытекает

Лемма 1. *Функция $\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т. е. обладает следующими двумя свойствами:*

$$\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)=\frac{\exp(\Lambda r)}{4\pi r}+v(y,x,\Lambda,\sigma),\quad r=|x-y|, \tag{5}$$

где $v(y,x,\Lambda,\sigma)$ — некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta(\partial/\partial y)v-\Lambda^2 v=0,\quad y\in D;$$

$$\int_\Sigma(|\Phi_\sigma|+|\partial\Phi_\sigma/\partial n|)ds_y\le C(\Lambda,D)\sigma\exp(-\sigma x_3), \tag{6}$$

где $C(\Lambda,D)$ — постоянная.

Докажем аналогичную лемму для системы (1).

Лемма 2. *Матрица $\Pi(y,x,\omega,\gamma,\sigma)$, определенная равенствами (3) и (4), является матрицей Карлемана для задачи (1), (2).*

Доказательство. В силу равенств (3) и (5) имеем

$$\Pi(y,x,\omega,\gamma,\sigma)-\Gamma(y,x,\omega,\gamma)=\Bigg\|\frac{(1-\delta_{m4})(1-\delta_{j4})}{2\pi}\Bigg[\frac{\delta_{mj}}{\mu}v(y,x,i\lambda_3,\sigma)-\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_j}v(y,x,i\lambda_k,\sigma)\Bigg]-$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi}\delta_{j4}(1-\delta_{m4})\sum_{k=1}^{3}\beta_k\frac{\partial}{\partial x_m}v(y,x,i\lambda_k,\sigma)-\frac{\delta_{j4}\delta_{m4}}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k v(y,x,i\lambda_k,\sigma)\Bigg\|=$$

$$=\|G_{mj}(y,x,\omega,\gamma,\sigma)\|=G(y,x,\omega,\gamma,\sigma).$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что матрица $G(y,x,\omega,\gamma,\sigma)$ по переменному y удовлетворяет системе (1) всюду в области D. Используя формулы (3), (4) и (6), на каждом компакте $D'\subset D$ получим

$$\int_\Sigma(|\Pi|+|(\widetilde{R}\Pi^*)^*|)ds_y\le C(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)\sigma^3\exp(-\sigma x_3), \tag{7}$$

где $C(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)$ — некоторая постоянная. Здесь и далее для краткости обозначений опускаем аргументы функции Π. $\square$

Положим

$$2U^\sigma(x)=\int_S(\Pi RU(y)-(\widetilde{R}\Pi^*)^*U(y))ds_y,\quad x\in D. \tag{8}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $U(x)$ — *регулярное решение системы* (1) *в области* D*, удовлетворяющее условию*

$$|U(x)| + |R(\partial/\partial y, n)U(x)| \le 1, \quad y \in \Sigma.$$

Тогда при $\sigma \ge 1$ *справедлива оценка*

$$|U(x) - U^{\sigma}(x)| \le C_1(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D. \tag{9}$$

Доказательство. Из леммы 2 для регулярного решения в области D системы (1) вытекает справедливость интегральной формулы Грина–Купрадзе [1]

$$2U(x) = \int_{\partial D} (\Pi R(\partial/\partial y, n)U(y) - (\widetilde{R}(\partial/\partial y, n)\Pi^*)^* U(y))ds_y, \quad x \in D.$$

Перепишем это равенство в виде

$$2U(x) = \int_S (\Pi R U(y) - (\widetilde{R}\Pi^*)^* U(y))ds_y + \int_\Sigma (\Pi R U(y) - (\widetilde{R}\Pi^*)^* U(y))ds_y. \tag{10}$$

Неравенство (9) следует из (7) и (10). □

Приведем результат, который позволяет вычислить $U(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $U(x)$ и $R(\partial/\partial y, n(y))U(x)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$, для которых

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| + \max_S |g(y) - g_\delta(y)| \le \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{11}$$

Предполагаем, что S удовлетворяет условиям Ляпунова. Определим функцию

$$2U^{\sigma\delta}(x) = \int_S (\Pi g_\delta(y) - (\widetilde{R}(\partial/\partial y, n)\Pi^*)^* f_\delta(y))ds_y, \quad x \in D, \tag{12}$$

где $\sigma = \frac{1}{x_3^0}\ln(1/\delta)$, $x_3^0 = \max\limits_D x_3$.

Теорема 2. *Пусть* $U(x)$ — *регулярное решение системы* (1) *в области* D*, удовлетворяющее условию*

$$|U(x)| + |R(\partial/\partial y, n)U(x)| \le 1, \quad y \in \Sigma.$$

Тогда справедлива оценка

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| \le C_2(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)\delta^{x_3/x_3^0}(\ln(1/\delta))^3, \quad x \in D' \subset D.$$

Доказательство. Из формул (8), (10), (12) для любого $x \in D$ вытекает

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| = \frac{1}{2}\int_S \Big(\Pi(R(\partial/\partial y, n)U(y) - g_\delta(y)) - (\widetilde{R}(\partial/\partial y, n)\Pi^*)^*(U(y) - f_\delta(y))\Big)ds_y +$$
$$+ \int_\Sigma \Big(\Pi R(\partial/\partial y, n)U(y) - (\widetilde{R}(\partial/\partial y, n)\Pi^*)^* U(y)\Big)ds_y, \quad x \in D.$$

Из условия теоремы и неравенств (7), (9), (11) имеем

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| \le C_1(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)\sigma^3 \exp(\sigma x_3^0 - \sigma x_3) + C(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3) \le$$
$$\le C_2(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)\sigma^3(1 + \delta \exp(\sigma x_3^0))\exp(-\sigma x_3), \quad x \in D'. \tag{13}$$

Так как $\sigma = \frac{1}{x_3^0}\ln(1/\delta)$, то из (13) следует утверждение теоремы. $\square$

Из доказанных теорем получаем

Следствие. Предельные равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty} U^\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\delta\to 0} U^{\sigma\delta}(x) = U(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D.

Формула (8) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2), а формула (12) изображает приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно.

Теперь приведем аналогичные результаты для областей типа конуса. Обозначим через S' гладкую поверхность в $\mathbb{E}^3$, которая видна из начала координат под телесным углом ненулевого раствора. Предположим, что конус

$$y_1^2 + y_2^2 = \tau y_3^2, \quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}, \quad q > 1,$$

отсекает гладкий кусок $S \subset S'$ и S вместе с частью Σ этого конуса образует границу односвязной области D_q. Будем считать, что существует регулярное решение уравнения (1) в области D_q, удовлетворяющее условию Коши на поверхности S. С целью построения приближенного решения задачи Коши в точке $x_0 = (0,0,x_3) \in D_q$ функцию $\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)$ в равенстве (7) запишем в виде

$$\Phi_\sigma(y,x,\Lambda) = \frac{q}{2\pi E_q(\sigma^{1/q}\tau x_3)} \int\limits_0^{\sqrt{\beta^2 - y_1^2 - y_2^2}} \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_\sigma(w)}{w - x_3}\right]\frac{\cos\Lambda u}{\sqrt{u^2 + y_1^2 + y_2^2}}du,$$

$\varphi_\sigma(w) = \exp[\sigma w^q \tau^q + (w - x_3)^2]$, $\beta = \tau y_3$, $w = i\sqrt{u^2 + y_1^2 + y_2^2} + y_3$, $E_q(z)$ — целая функция Миттаг-Леффлера [11].

Введем обозначения

$$2U^\sigma(x) = \int_S (\Pi(y,x_0,\omega,\gamma,\sigma)g(y) - (\widetilde{R}\Pi^*(y,x_0,\omega,\gamma,\sigma))^* f(y))ds_y,$$
$$2U^{\sigma\delta}(x) = \int_S (\Pi(y,x_0,\omega,\gamma,\sigma)g_\delta(y) - (\widetilde{R}\Pi^*(y,x_0,\omega,\gamma,\sigma))^* f_\delta(y))ds_y,$$
$$\sigma = R_0\ln(1/\delta), \quad R_0^q = \operatorname{Re}\,(i\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_3)^q.$$

Теорема 3. *Пусть $U(x)$ — регулярное решение системы (1) в области D_q, удовлетворяющее условию*

$$|U(x)| + |R(\partial/\partial y, n)U(x)| \le 1, \quad y \in \Sigma.$$

Тогда справедлива оценка

$$|U(x_0) - U^\sigma(x_0)| \le C_3(\lambda,\mu,\omega,\gamma,D)\sigma^5 \exp(-\sigma\tau^q x_3^q), \quad \sigma \ge 1,$$
$$|U(x_0) - U^{\sigma\delta}(x_0)| \le C_4(\lambda,\mu,\omega,\gamma)\delta^{(\tau x_3/R_0)^q}(\ln(1/\delta))^5.$$

Теорема 4. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\sigma\to\infty} U^\sigma(x_0) = U(x_0), \quad \lim_{\delta\to 0} U^{\sigma\delta}(x_0) = U(x_0).$$

Доказательства теорем 3, 4 аналогичны доказательствам теорем 1, 2.

В заключение авторы выражают признательность академику М.М. Лаврентьеву и профессору Ш.Я. Ярмухамедову за постановку задачи и обсуждения в процессе ее решения.

Литература

1. Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г. и др. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статистика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 624 с.
2. Ярмухамедов Ш.Я., Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве* // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 33. – № 1. — С.186–190.
3. Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях* // Изв. вузов. Математика. – 1994. - № 1. – С. 54–61.
4. Ярмухамедов Ш.Я. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 2. – С. 281–283.
5. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. *Абстрактная формула Карлемана* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 6. – С. 1292–1296.
6. Мергелян С.Н. *Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа* // УМН. – 1956. – Т. 11. – № 5. – С. 3–26.
7. Тарханов Н.Н. *О матрице Карлемана для эллиптических систем* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284. – № 2. – С. 294–297.
8. Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
9. Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92 с.
10. Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112. – № 2. – С. 195–197.
11. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* – М.: Наука, 1966. – 696 с.
12. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
13. Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20. – № 6. – С. 819–842.
14. Иванов В.К. *Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – С. 131–136.
15. Махмудов О.И. *Задача Коши для системы теории упругости в пространстве* // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1990. – 80 с.

Самаркандский государственный университет

Поступила
28.03.1996