ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 517.9

В.Н. БОБОЧКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. I

Введение

Теория сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (СВДУ) с точками поворота начала свое бурное развитие с исследований Р. Лангера [1]–[4]. В настоящее время основные результаты по построению равномерных асимптотик для уравнения Лиувилля и систем СВДУ типа Лиувилля с точкой поворота уже получены [1]–[14]. Характерной чертой большинства этих работ было то, что вырожденные уравнения были алгебраическими, т. е. точка поворота была алгебраической.

Однако теория и практика требуют исследований СВДУ, для которых вырожденные уравнения являются дифференциальными и точка поворота находится в виде множителя при старшей производной вырожденного уравнения.

Классическими примерами таких уравнений являются уравнения

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x), \tag{0.1}$$

$$\varepsilon y''(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x) \tag{0.2}$$

и уравнение Орра-Зоммерфельда

$$\varepsilon y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y'(x,\varepsilon) + c(x)y(x,\varepsilon) = h(x). \tag{0.3}$$

Общей чертой всех этих трех классических уравнений является то, что все корни соответствующих характеристических уравнений совпадают в точке $x = 0$, т. е. в точке поворота. В то же время каждое из этих уравнений имеет существенные особенности, присущие только ему. Исследование и построение равномерных асимптотик решений этих уравнений является сложной задачей. Проблема построения равномерных асимптотик решений таких уравнений насчитывает несколько десятилетий (см. [4]; [13], с. 225–230). Еще в 60-е годы С.А. Ломов перед своими учениками поставил задачу по исследованию уравнения (0.2) (задача Гордеева). Однако фундаментальных результатов в этом направлении до настоящего времени так и не получено. Здесь уместно напомнить, что методом согласования в ([14], с. 52–63) построена асимптотика решения уравнения (0.2) на отрезке $[0;1]$.

Для уравнений (0.1) и (0.3) в [2]–[4] тоже были получены определенные результаты. Однако они носили частный характер, и дальнейших обобщений этих результатов не было получено.

Цель данной работы будет состоять в обобщении метода, разработанного в [7]–[12] для исследования скалярных и векторных уравнений с алгебраической точкой поворота на уравнения с дифференциальной точкой поворота. Первым шагом в этом направлении и будет исследование сингулярно возмущенного дифференциального уравнения (0.1).

Уравнение (0.1) исследуется для случая, когда выполняются

Условие 1^0. $a(x), b(x), h(x) \in \mathbf{C}^\infty[I]$, $I = [0;1]$;

Условие 2^0. $a(x) = x\widetilde{a}(x)$, причем $\widetilde{a}(x) > 0$, $b(x) < 0$ при $x \in I$.

1. Структура решения вырожденного уравнения

Условие 2^0 обеспечивает существование достаточно гладкого решения уравнения

$$\mathbf{L}_0\omega(x) \equiv x\widetilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x). \tag{1.1}$$

Поскольку решение этого уравнения будет играть важную роль в построении асимптотики решения СВДУ (0.1), то исследуем структуру этого решения, особенно в точке поворота.

Разлагая в ряд Маклорена, получим равенства

$$-\frac{b(x)}{x\widetilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \alpha(x), \quad \frac{h(x)}{\widetilde{a}(x)} = q + x\gamma(x), \tag{1.2}$$

где $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ — аналитические функции в окрестности точки $x = 0$, причем $\gamma(0) \neq 0$ и $\rho = \frac{-b(0)}{\widetilde{a}(0)} > 0$. С учетом равенств (1.2) решение вырожденного уравнения (1.1) запишем в виде

$$\omega(x) = x^\rho\beta(x)\Big\{C + \int_1^x [q + x\gamma(x)]x^{-\rho-1}\beta^{-1}(x)dx\Big\}, \tag{1.3}$$

где C — произвольная постоянная, а $\beta(x) = \exp\{\int\limits_1^x \alpha(x)dx\}$.

Легко проверить, что при $\rho > 0$ решение (1.3) является непрерывной функцией при всех $x \in [0;1]$, причем $\omega(0) = -\rho^{-1}q < \infty$.

Можно было бы выписать и начальные значения $\omega^{(s)}(0)$, $s = \overline{1,3}$, однако явной необходимости в этом нет. Заметим только, что эти значения уже зависят от принимаемых значений параметра ρ. Для обеспечения построения равномерно пригодной асимптотики решения СВДУ (0.1) на всем отрезке $I = [0,1]$ с любой степенью точности относительно малого параметра необходимо будет потребовать, чтобы $\rho \in N$. Если же $\rho > 0$ достаточно большое, не является натуральным числом, то легко просчитать с какой степенью точности можно построить асимптотику решения исследуемого СВДУ (0.1).

2. Расширение возмущенного уравнения

Особая точка $\varepsilon = 0$ порождает в решении СВДУ (0.1) некоторые существенно особые функции (СОФ). Основная трудность построения асимптотики решения СВДУ (0.1) состоит в определении этих СОФ. С этой целью постараемся сохранить и применить общий метод исследования СВДУ с алгебраической точкой поворота, разработанный в [7]–[12].

Наряду с независимой переменной $x \in I$ введем новую переменную t по формуле

$$t = \varepsilon^{-p}\varphi(x) \equiv \Phi(x,\varepsilon), \tag{2.1}$$

где показатель p и регуляризующая функция $\varphi(x)$ подлежат определению.

Учитывая (2.1), согласно методу регуляризации будем исследовать расширенную функцию $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$, для которой должно выполняться тождество

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\varepsilon^{-p}\varphi(x)} \equiv y(x,\varepsilon). \tag{2.2}$$

Дифференцируя тождество (2.2), определим полные производные до третьего порядка и подставим значения этих производных в СВДУ (0.1). Тогда для определения расширенной функции $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$ получим расширенное уравнение

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x), \tag{2.3}$$

в котором расширенный оператор $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \varepsilon^{3-3p}\varphi'^3(x)\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon^{3-2p}\left[3\varphi'^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + 3\varphi'(x)\varphi''(x)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^{3-p}\left[3\varphi'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + 3\varphi''(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi'''(x)\right]\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\left[\varepsilon^{-p}\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] + \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b(x). \quad (2.4)$$

Для дальнейших исследований, т. е. для описания пространства безрезонансных решений (ПБР) необходимо выделить в расширенном операторе (2.4) некоторый модельный оператор. Для алгебраических точек поворота модельными операторами были классические операторы Эйри, т. е. операторы $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm t$, свойства которых описаны в [5], [13].

Если для исследования решения СВДУ (0.1) применить классический оператор Эйри, то в процессе построения коэффициентов асимптотики решения получим дифференциальное уравнение с иррегулярной особой точкой $x = 0$. А это означает, что построенная таким образом асимптотика решения будет неограниченно возрастать, когда $x \to +0$, т. е. неограниченно возрастает в окрестности точки поворота.

Для построения асимптотики решения однородного уравнения (0.1) в [2]–[3] использовано модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda^2 z\frac{\partial v}{\partial z} + 3\lambda\mu v = 0, \quad (2.5)$$

где $|\lambda| \to +\infty$, μ — некоторое число. Такого же типа модельный оператор был применен в ([14], с. 55) при исследовании краевой задачи для уравнения (0.2).

Проведенные автором исследования показали, что для построения равномерной асимптотики решения СВДУ (0.1) есть смысл использовать модельный оператор

$$\widetilde{\mathbf{T}} \equiv \frac{\partial^3}{\partial t^3} + t\frac{\partial}{\partial t} \equiv \mathbf{T}\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.6)$$

который будем называть *дифференциальным оператором Эйри–Дородницына.*

Замечание 1. Вместо модельного оператора (2.6) можно было взять оператор $\mathbf{T} \equiv \frac{\partial^3}{\partial t^3} - t\frac{\partial}{\partial t}$, т. е. дифференциальный оператор Эйри–Лангера.

Оператор (2.6) выделим в расширенном операторе (2.4) следующим образом:

$$\varepsilon^{3-3p}\varphi'^3(x)\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon^{-p}\varphi'(x)a(x)\frac{\partial}{\partial t} \equiv \varepsilon^{3-3p}\varphi'^3(x)\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{a(x)}{\varphi'^2(x)\varepsilon^{3-2p}}\frac{\partial}{\partial t}\right] \equiv \varepsilon^{3-3p}\varphi'^3(x)\mathbf{T},$$

где

$$\frac{a(x)}{\varphi'^2(x)\varepsilon^{3-2p}} \equiv t\big|_{t=\varepsilon^{-p}\varphi(x)} \equiv \varepsilon^{-p}\varphi(x). \quad (2.7)$$

Используя (2.7), определим показатель $p = 1$ и получим следующее дифференциальное уравнение для определения регуляризующей функции:

$$[\varphi'(x)]^2\,\varphi(x) = a(x) \equiv x\widetilde{a}(x). \quad (2.8)$$

Решением уравнения (2.8) при начальном условии $\varphi(0) = 0$ будет функция

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{2/3}.$$

В исследуемом случае $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in I$, т. е. $t \geq 0$. Это условие в будущем обеспечит ограниченность СОФ $W_k^{(s)}(t)$, $k = 1, 2$, $s = 0, 1$, (см. (3.2)), содержащихся в решении уравнения (0.1).

Точку поворота $x = 0$, порождающую ограниченность вышеупомянутых СОФ, будем называть *стабильной* точкой поворота.

Если же $\widetilde{a}(0) < 0$, $x \in I$, то СОФ $U_2(t)$ и все его производные неограниченно возрастают при $t \to +\infty$. Проведенные исследования показали, что в этом случае асимптотика решения и особенно оценка остаточного члена асимптотики решения в определенной степени отличаются от исследуемого случая, т. е. когда $\widetilde{a}(0) > 0$. В этом случае точку поворота $x = 0$ будем называть *нестабильной* точкой поворота. Случай алгебраической нестабильной точки поворота тоже исследован автором (см. [10] и другие работы автора).

Замечание 2. Случаи, когда коэффициенты уравнения (0.1) удовлетворяют условиям, отличным от *условия* 2^0, будут предметом последующих исследований.

С учетом тождества (2.6) и определенном показателе $p = 1$ расширенный оператор (2.4) запишем в виде

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \varphi'^3(x)\widetilde{\mathbf{T}} + \mathbf{L}_0 + \varepsilon\,\mathbf{d}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2\,\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}, \tag{2.9}$$

где

$$\mathbf{L}_0 \equiv a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x),$$
$$\mathbf{d} \equiv 3\varphi'^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + 3\varphi'(x)\varphi''(x), \quad \mathbf{m} \equiv 3\varphi'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\varphi''(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi'''(x).$$

3. Пространства безрезонансных решений

С расширением и введением модельного оператора $\widetilde{\mathbf{T}}$ был в значительной степени определен характер асимптотики решения исследуемого СВДУ (0.1). Для полной ясности в этом вопросе необходимо еще описать и исследовать ПБР, в которых будем строить асимптотику решения уравнения (0.1).

Сначала исследуем модельное уравнение

$$\widetilde{\mathbf{T}}W(t) = 0. \tag{3.1}$$

Двумя линейно независимыми решениями этого уравнения будут функции

$$W_k(t) \equiv \int_\infty^t U_k(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \tag{3.2}$$

где $U_k(t)$ — функции Эйри–Дородницына, т. е. два линейно независимых решения модельного уравнения $U''(t) + tU(t) = 0$. Эти решения удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{gathered} W_1(0) = -3^{-1/3}\Gamma(2/3), \quad W'_1(0) = 1, \quad W''_1(0) = 0, \quad W_2(0) = -3^{1/3}\Gamma(4/3), \\ W'_2(0) = 0, \quad W''_2(0) = 1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Третьим линейно независимым решением уравнения (3.1) будет функция $U_3(t) = 1$.

Поскольку $W_k^{(s)}(t) = U_k^{(s-1)}(t)$, то асимптотические свойства производных функций (3.2) известны [5]. В этом и состоит одно из преимуществ использования модельного уравнения (3.1) по сравнению с модельным уравнением (2.5). Для получения асимптотических формул для самих функций (3.2) при $t \to +\infty$ поступим следующим образом. Подставим в (3.2) соответствующие формулы для функций Эйри и проинтегририруем по частям. В результате получим следующие асимптотические равенства при $t \to +\infty$:

$$W_1(t) = A\, t^{-3/4}\Big\{\sin\alpha[1+O(t^{-3/2})] - \frac{41}{48}t^{-3/2}\cos\alpha[1+O(t^{-3/2})]\Big\},$$
$$W_2(t) = B\, t^{-3/4}\Big\{\cos\beta[1+O(t^{-3/2})] + \frac{41}{48}t^{-3/2}\sin\beta[1+O(t^{-3/2})]\Big\},$$

где $A = \pi^{-1/2}\,3^{1/6}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$, $B = \pi^{-1/2}\,3^{-1/6}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, $\alpha = \frac{2}{3}\,t^{3/2} - \frac{\pi}{12}$, $\beta = \frac{2}{3}\,t^{3/2} + \frac{\pi}{12}$.

Представим решения (3.2) в окрестности точки $t = 0$ в виде степенных рядов по переменной t и потребуем, чтобы они удовлетворяли начальным условиям (3.3). Тогда получим представления

$$W_1(t) \equiv -3^{-1/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + t - \frac{t^4}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{4}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}t^7 + O(t^{10}),$$
$$W_2(x,t) \equiv -3^{-1/3}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\left[t^2 - \frac{2t^5}{5\cdot 4\cdot 3} + \frac{5}{8\cdot 7\cdot 6}\cdot\frac{2}{5\cdot 4\cdot 3}t^8 + O(t^{11})\right].$$

Изучив свойства СОФ (3.2), перейдем к описанию ПБР.

Используя (3.2), введем множества (подпространства) функций

$$Y_{rk} = \{V_{rk}(x)W_k(t) + Q_{rk}(x)U_k(t) + M_{rk}(x)U'_k(t)\}, \quad k = 1,2, \quad X_r = \{\omega_r(x)\}, \tag{3.4}$$

где $V_{rk}(x)$, $Q_{rk}(x)$, $M_{rk}(x)$, $\omega_r(x) \in \mathbf{C}^\infty[I]$. Из подпространств (3.4) составим новое пространство

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{2} Y_{rk} \bigoplus X_r, \tag{3.5}$$

которое согласно принятой терминологии (см. [6], с. 42), будем называть ПБР. Элемент ПБР (3.5) имеет вид

$$y_r(x,t) = \sum_{k=1}^{2}\big[V_{rk}(x)W_k(t) + Q_{rk}(x)U_k(t) + M_{rk}(x)U'_k(t)\big] + \omega_r(x) \equiv \sum_{k=1}^{2} y_{rk}(x,t) + \omega_r(x). \tag{3.6}$$

Согласно разработанному общему методу (см. [6]–[12]) необходимо изучить действие расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ (см. (2.9)) на элемент ПБР (3.5), т.е. на элемент (3.6).

Если ПБР (3.5) описано правильно, т. е. если в этом пространстве правильно выделены и сохранены как единые целые все СОФ, содержащиеся в решении СВДУ (0.1), то в ПБР расширенное уравнение уже должно быть регулярно зависящим от малого параметра $\varepsilon > 0$.

Используя модельный дифференциальный оператор (2.6), легко получить тождества

$$\begin{gathered} W'''_k(t) \equiv -tW'_k(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv -\varepsilon^{-1}\varphi(x)W'_k(t) \equiv -\varepsilon^{-1}\varphi(x)U_k(t), \\ W^{(4)}_k(t) \equiv -W'_k(t) - tW''_k(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv -U_k(t) - \varepsilon^{-1}\varphi(x)U'_k(t), \\ W^{(5)}_k(t) \equiv -2W''_k(t) + t^2W'_k(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv -2U'_k(t) + \varepsilon^{-2}\varphi^2(x)U_k(t); \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}W_k(t) \equiv 0, \quad \widetilde{\mathbf{T}}W'_k(t) \equiv -W'_k(t) \equiv -U_k(t), \quad \widetilde{\mathbf{T}}W''_k(t) \equiv -2W''{}_k(t) \equiv -2U'_k(t). \tag{3.8}$$

Заметим, что частичное сужение, проведенное в тождествах (3.7), в будущем обеспечит отсутствие резонансных множителей t в построенном асимптотическом решении СВДУ (0.1), т. е. будет получен регуляризованный асимптотический ряд решения (см. [6], с. 39).

С учетом тождеств (3.7) и (3.8) получим результат действия расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ (см. (2.9)) на элемент $y_r(x,t) \in Y_r$, представимый в виде тождества

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon y_r(x,t) \equiv \sum_{s=0}^{3} \varepsilon^s \mathbf{R}_s y_r(x,t) \equiv \sum_{s=0}^{3} \varepsilon^s \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{sk} y_{rk}(x,t) + \widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \omega_s(x), \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{R}_0 y_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \Big\{ \mathbf{L}_0 V_{rk}(x) W_k(t) + \mathbf{D}_1 Q_{rk}(x) U_k(t) + \mathbf{D}_2 M_{rk}(x) U_k'(t) \Big\} + \mathbf{L}_0 \omega_r(x), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{R}_1 y_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \Big\{ -(\mathbf{d} + \mathbf{m}\,\varphi(x))\, M_{rk}(x)\, U_k(t) + \mathbf{d}\, V_{rk}(x)\, U_k{}'(t) \Big\} \equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{1k} y_{rk}(x,t), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{R}_2 y_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \Big\{ \mathbf{m}\, V_{rk}(x) U_k(t) + \mathbf{m}\, Q_{rk}(x) U_k{}'(t) \Big\}, \quad \mathbf{R}_3 y_r(x,t) \equiv \frac{\partial^3 y_r(x,t)}{\partial x^3}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{L}_0 - [\varphi'(x)]^3 - \varphi(x)\,\mathbf{d} \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_1(x), \tag{3.13}$$

$$\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{L}_0 - 2[\varphi'(x)]^3 - \varphi(x)\,\mathbf{d} \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x), \tag{3.14}$$

$$b_1(x) \equiv b(x) - {\varphi'}^3(x) - 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x), \quad b_2(x) \equiv b(x) - 2{\varphi'}^3(x) - 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Из полученных тождеств (3.9)–(3.14) можно сделать следующие выводы.

1. Пространства безрезонансных решений (3.5) инвариантны относительно операторов $\mathbf{R}_s$, $s = \overline{0,3}$, а следовательно, и относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$, представимого в виде тождества (3.9).

2. Оператор $\mathbf{R}_0$ является главным оператором расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ в ПБР (3.5).

3. Каждое из подпространств Y_{r1}, Y_{r2} и X_r инвариантно относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$.

4. Расширенное уравнение (2.3) является регулярно возмущенным относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ в ПБР Y_r.

Следовательно, здесь проведена *регуляризация* СВДУ (0.1). Это один из основных пунктов метода регуляризации существенно особых функций (метод РСОФ).

4. Формализм построения ряда решений расширенного уравнения

На основании сделанных выводов асимптотику решения расширенного уравнения (2.3) строим в виде ряда

$$y(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r y_r(x,t) \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[\sum_{k=1}^{2} y_{rk}(x,t) + \omega_r(x) \Big], \quad y_r(x,t) \in Y_r. \tag{4.1}$$

Для определения коэффициентов ряда (4.1) получим следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\mathbf{R}_0 y_0(x,t) = h(x), \tag{4.2}$$

$$\mathbf{R}_0 y_1(x,t) = -\mathbf{R}_1 y_0(x,t), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{R}_0 y_2(x,t) = -\mathbf{R}_1 y_1(x,t) - \mathbf{R}_2 y_0(x,t),$$

$$\mathbf{R}_0 y_r(x,t) = -\mathbf{R}_1 y_{r-1}(x,t) - \mathbf{R}_2 y_{r-2}(x,t) - \mathbf{R}_3 y_{r-3}(x,t), \quad r \geq 3. \tag{4.4}$$

5. Построение общего решения расширенного уравнения

Покажем, что

1) серия рекуррентных уравнений (4.2)–(4.4) асимптотически корректна в ПБР, т. е. каждое из этих уравнений имеет решение в ПБР (3.5) при последовательном решении всех предыдущих уравнений;

2) решение каждого уравнения (4.2)–(4.4) является достаточно гладким на всем отрезке $I = [0; 1]$, т. е. и в точке поворота $x = 0$;

3) каждое решение $y_r(x, t)$ содержит по три произвольные постоянные.

Приступим к исследованию решения первого итерационного уравнения (4.2) в ПБР Y_0. В силу линейной независимости СОФ $W_k(t)$ и их производных в ПБР Y_0 уравнение (4.2) распадается на следующие дифференциальные уравнения ($r = 0$):

$$\mathbf{L}_0 V_{rk}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{L}_0 \omega_r(x) = h(x), \tag{5.1}$$

$$\mathbf{D}_1 Q_{rk}(x) = 0, \quad \mathbf{D}_2 M_{rk}(x) = 0, \quad k = 1, 2. \tag{5.2}$$

Из п. 1 (см. (1.1)–(1.3)) следует, что существуют достаточно гладкие решения дифференциальных уравнений (5.1) на всем отрезке [0.1], представимые при $r = 0$ в виде

$$V_{rk}(x) = C_{rk} x^\rho \beta(x) + \widetilde{V}_{rk}(x) \equiv C_{rk} x^\rho \exp\left\{ \int_1^x \alpha(x) dx \right\} + \widetilde{V}_{rk}(x), \tag{5.3}$$

$$\omega_r(x) = x^\rho \beta(x) \left[C_{r3} + \int_1^x \Big[q + x\gamma(x) \Big] x^{\rho-1} \beta^{-1}(x) dx \right] \equiv C_{r3} x^\rho b(x) + \widetilde{\omega}_r(x) + \widetilde{\omega}_r^*(x), \tag{5.4}$$

где C_{0s}, $s = \overline{1, 3}$, — произвольные постоянные, а $\widetilde{\omega}_r^*(x)$ — частные решения, получены за счет неоднородного дифференциального уравнения (5.1), причем они будут тождественными нулями в случае, когда $h(x) \equiv 0$. Слагаемые $\widetilde{V}_{rk}(x)$ и $\widetilde{\omega}_r(x)$ возникают за счет интегрирования неоднородных дифференциальных уравнений с правыми частями, содержащими произвольные постоянные от предыдущих решений. Поэтому эти функции в отличие от $\widetilde{\omega}_r^*(x)$ участвуют в построении линейно независимых решений СВДУ (0.1).

Полученные решения (5.3) и (5.4) уже содержат три произвольные постоянные C_{0s}, $s = \overline{1, 3}$. Поэтому для построения общего решения расширенного уравнения (2.3), а следовательно, и СВДУ (0.1), достаточно строить только частные решения дифференциальных уравнений (5.2). Операторы $\mathbf{D}_i$, $i = 1, 2$, имеют особенности при производных. Поэтому гладкими решениями однородных дифференциальных уравнений (5.2) при условиях $|Q_{0k}(0)| < \infty$ и $|M_{0k}(0)| < \infty$ будут тождественные нули.

Линейная независимость функции $W_k(t)$, $k = 1, 2$, в дальнейшем обеспечивает линейную независимость частных решений $y_k(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)$, $k = 1, 2$, исследуемого уравнения (0.1).

Таким образом, достаточно гладким решением на всем отрезке [0; 1] неоднородного уравнения (4.2) в ПБР Y_r будет функция

$$y_0(x, t) = \left[\sum_{k=1}^{2} C_{0k} W_k(t) + C_{03} \right] x^\rho \beta(x) + \widetilde{\omega}_r^*(x) \equiv \sum_{s=1}^{3} Y_{0s}(x, t) + \widetilde{\omega}_r^*(x). \tag{5.5}$$

Переходим к решению итерационного уравнения (4.3). Сначала вычислим правую часть этого уравнения. Используя тождество (3.11), имеем $-\mathbf{R}_1 y_0(x, t) = -\sum\limits_{k=1}^{2} \mathbf{d}\, V_{0k}(x) U_k'(t)$. По аналогии с предыдущим для определения коэффициентов решения $y_1(x, t)$ получим однородные уравнения (5.1) при $r = 1$ и дифференциальные уравнения

$$\mathbf{D}_1 Q_{1k}(x) = 0, \quad \mathbf{D}_2 M_{1k}(x) = -\mathbf{d}\, V_{0k}(x), \quad k = 1, 2. \tag{5.2^1}$$

Снова получим $Q_{1k}(x) \equiv 0$. Второе уравнение (5.2^1) уже неоднородное. Поэтому существует не равное тождественно нулю достаточно гладкое на $[0;1]$ решение этого уравнения. Следовательно, общим решением неоднородного итерационого уравнения (4.3) будет

$$y_1(x,t) = \Big[\sum_{k=1}^{2} C_{1k} W_k(t) + C_{13}\Big] x^\rho \beta(x) + \sum_{k=1}^{2} M_{1k}(x) U_k{}'(t) \equiv \sum_{k=1}^{3} Y_{1k}(x,t).$$

Продолжим далее решать итерационные уравнения (4.4). В процесе постепенного решения этих уравнений будут определены функции

$$y_r(x,t) = \sum_{k=1}^{2} Y_{rk}(x,t) + Y_{r3}(x) + \widetilde{\omega}_r^*(x),$$

где $\widetilde{\omega}_r^*(x)$ — частные решения дифференциальных уравнений, полученные от интегрирования неоднородного СВДУ (0.1), т. е. $\widetilde{\omega}_r^*(x) \equiv 0$ при $h(x) \equiv 0$.

Замечание 3. Условие 2^0, а именно, противоположность знаков функций $\widetilde{a}(x) > 0$ и $b(x) < 0$ при $x \in I$, позволило получить гладкое решение уравнения (1.1), причем зависящее от произвольной постоянной. В дифференциальных операторах $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ (см. (3.13)–(3.14)) в общем случае это условие уже не сохраняется. Если бы это свойство сохранялось и для операторов $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$, то для построения равномерной асимптотики решения СВДУ (0.1) достаточно взять только частные решения дифференциальных уравнений (5.2).

Проведенные исследования показали, что три решения однородного расширенного уравнения (2.3) можно построить в виде формальных рядов

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Big[V_{rk}(x) W_k(t) + Q_{rk}(x) U_k(t) + M_{rk}(x) U_k{}'(t)\Big] \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r Y_{rk}(x,t), \quad k = 1,2, \tag{5.6}$$

соответствующих корням $k_{1,2} = \pm\, i\, \sqrt{x\widetilde{a}(x)}$ и

$$Y_3(x,\varepsilon) \equiv Y_3(x,t,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r Y_{r3}(x) \equiv \sum_{r=0}^{2} \varepsilon^r C_{r3} x^\rho \beta(x) + \sum_{r=3}^{\infty} \varepsilon^r Y_{r3}(x). \tag{5.7}$$

Проведем сужение в решениях (5.6) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$ и учтем равенства (3.2). Тогда первые два решения СВДУ (0.1) будут иметь следующую структуру:

$$Y_k(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = V_k(x,\varepsilon) \int\limits_{\infty}^{\Phi(x,\varepsilon)} U_k(\tau)d\tau + Q_k(x,\varepsilon) U_k(\Phi(x,\varepsilon)) + M_k(x,\varepsilon) \frac{dU_k(\Phi(x,\varepsilon))}{d(\Phi(x,\varepsilon))},$$

где множители при СОФ являются аналитическими функциями малого параметра $\varepsilon > 0$ и достаточно гладкие для всех $x \in [0,1]$. Поскольку точка $x = 0$ является стабильной точкой поворота, то функции Эйри $U_k(t)$ являются ограниченными функциями для всех $t \geq 0$.

Следовательно, СОФ содержащиеся в решениях СВДУ (0.1), являются ограниченными функциями для всех $x \in \big[0, \frac{\varphi(1)}{\varepsilon}\big]$, кроме СОФ $W_k''(t) \equiv U_k'(t)$, $k = 1,2$.

6. Оценка остаточных членов

Запишем построенные решения (5.6) и (5.7) в виде

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = Y_{p\,k}^*(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} \xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon), \quad k = \overline{1,3}, \tag{6.1}$$

где

$$Y^*_{p\,k}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r Y_{r\,k}(x,t),\quad k=1,2,\quad Y^*_{p\,3}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r Y_{r\,3}(x) \tag{6.2}$$

— частичные p-суммы, а $\varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)$ — остаточные члены соответствующих рядов. Легко проверить, что частичные суммы (6.2) удовлетворяют уравнениям

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon Y^*_{p\,k}(x,t,\varepsilon)=-\varepsilon^{p+1}\widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon),\ k=1,2,\quad \widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon Y^*_{p\,3}(x,\varepsilon)=h(x)-\varepsilon^{p+1}\widetilde{\rho}_{(p+1)3}(x,\varepsilon). \tag{6.3}$$

Изучим структуру правых частей уравнений (6.3). С учетом результатов действия операторов $\mathbf{R}_k$ на элементы ПБР (3.5) имеем

$$\widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)\equiv A_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)W_k(t)+B_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)U_k(t)+D_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)U_k{}'(x,t,\varepsilon),\quad k=1,2, \tag{6.4}$$

$$\widetilde{\rho}_{(p+1)3}(x,t,\varepsilon)\equiv\widetilde{\rho}_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\equiv\sum_{s=0}^{2}\varepsilon^s\,\omega_{(p-2+s)}{}'''(x), \tag{6.5}$$

где коэффициенты при СОФ в (6.4) и $\omega_{(p+1)}{}^*(x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими функциями при $x\in[0,1]$ и многочленами не выше второй степени относительно малого параметра $\varepsilon>0$.

Поскольку выражения (6.4) и (6.5) ограничены в ПБР Y_r, то построенные решения (5.6) и (5.7) являются формальными асимптотическими рядами решений расширенного уравнения (2.3), а их сужения — формальными асимптотическими рядами решений СВДУ (0.1) ([6], с. 52; [14], с. 10).

Подставив (6.1) в (2.3), для определения функций $\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)$ получим расширенные уравнения

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)=\widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon),\quad k=\overline{1,3}. \tag{6.6}$$

Для того чтобы получить соответствующие оценки для остаточных членов решений (6.1), применим следующую методику. Правые части уравнений (6.6) принадлежат соответственно подпространствам Y_{rk}, $k=1,2$, и X_r, и эти пространства инвариантны относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$. Поэтому решения уравнений (6.6) тоже ищем соответственно в этих подпространствах, т. е. в виде

$$\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)\equiv V_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)W_k(t)+Q_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)U_k(t)+M_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)U_k{}'(x,t,\varepsilon),\quad k=1,2, \tag{6.7}$$

$$\xi_{(p+1)3}(x,t,\varepsilon)\equiv\xi_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\equiv\omega_{(p+1)}{}^*(x,\varepsilon). \tag{6.8}$$

Описанная процедура определения решений уравнений (6.6) в виде (6.7) и (6.8) является обобщением классического метода неопределенных коэффициентов при решении дифференциальных уравнений. Поэтому этот метод будем называть *методом неопределенных функций*. Подставим (6.7) и (6.8) в (6.6). Тогда для определения неизвестных коэффициентов этих решений получим серии обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (3.9)–(3.12))

$$\left[\mathbf{L}_0+\varepsilon^3\frac{d^3}{dx^3}\right]V_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)=A_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon),\quad \left[\mathbf{L}_0+\varepsilon^3\frac{d^3}{dx^3}\right]\omega_{(p+1)3}{}^*(x,\varepsilon)=\alpha_{(p+1)}{}^*(x,\varepsilon), \tag{6.9}$$

$$\mathbf{D}_1\,Q_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)-\varepsilon[\mathbf{d}+\varphi(x)\,\mathbf{m}]\,M_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)+\varepsilon^3\,\frac{dQ_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)}{dx^3}=F_{(p+1)kQ}{}^*(x,\varepsilon),$$

$$\mathbf{D}_2\,M_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)+\varepsilon^2\mathbf{m}\,Q_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)+\varepsilon^3\,\frac{dM_{(p+1)k}{}^*(x,\varepsilon)}{dx^3}=F_{(p+1)kM}{}^*(x,\varepsilon), \tag{6.10}$$

в которых правые части являются известными, достаточно гладкими функциями для всех $x\in[0,1]$ и аналитическими относительно малого параметра $\varepsilon>0$.

Пусть $X_{r\varepsilon}$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций по переменной $x \in [0,1]$ и аналитически зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$.

В уравнениях (6.9) дифференциальный оператор по форме совпадает с дифференциальным оператором уравнения (0.1), т. е. для получения оценки остаточного члена имеем стандартную ситуацию ([6], с. 63, формула (2.85)). Однако перед нами сейчас стоит задача, отличающаяся от начальной постановки решения уравнения (0.1), которая состоит в следующем. На этом этапе необходимо определить только регулярные части решения уравнения (0.1), т. е. найти решения этих уравнений в пространстве $X_{r\varepsilon}$. Исследуем уравнения (6.9), (6.10) в этом пространстве.

1. Область определения всех возмущенных и вырожденных операторов этих уравнений совпадает с пространством $X_{r\varepsilon}$.

2. Каждый вырожденный оператор имеет обратный оператор для всех $x \in [0,1]$ в нужном нам подпространстве. Здесь имеется в виду требование существования только частных решений некоторых дифференциальных уравнений из (6.9), (6.10).

Следовательно, к решениям уравнений (6.9) и (6.10) применим метод малого параметра Пуанкаре–Ляпунова. Поскольку правые части уравнений (6.9) и (6.10) являются функциями порядка $O(1)\,\varepsilon^{-1/4}$ относительно малого параметра, то и все решения этих уравнений тоже будут того же порядка для всех $x \in [0,1]$.

Возвращаясь к функциям (6.7), (6.8) и учитывая свойства СОФ $W_k(t)$ и их производных, получим асимптотические неравенства

$$\|\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)\| \le A_{(p+1)}\varepsilon^{\frac{-1}{4}}, \quad p \ge 1, \quad \|\xi_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\| \le A_{(p+1)}, \quad k = 1,2, \quad p \ge 0, \qquad (6.11)$$

где постоянная $\mathrm{A}_{(p+1)}$ не зависит от $x \in [0,1]$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

С целью исследования предела полученного решения при $\varepsilon \to +0$ необходимо более конкретно исследовать полученные оценки при $p = 0$. Поскольку $M_{0k}(x) \equiv 0$, т. е. отсутствуют СОФ $U_k{}'(t)$, то при $p = 0$ будут иметь место улучшенные оценки

$$\|\xi_{1k}(x,t,\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_1, \quad k = 1,2, \quad \|\xi_{13}(x,\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_1. \qquad (6.12)$$

Проведем сужение в построенных решениях и соответствующих оценках при $t = \Phi(x,\varepsilon)$. Тогда получим формулы

$$Y_k(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = Y^*_{pk}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)k}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon), \quad k = 1,2, \qquad (6.1^k)$$

$$Y_3(x,\varepsilon) = Y^*_{p3}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)3}(x,\varepsilon) \qquad (6.1^3)$$

и оценки

$$\|\xi_{(p+1)k}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_{p+1}\varepsilon^{\frac{-1}{4}}, \quad k = 1,2, \quad \|\xi_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_{p+1}, \quad p \ge 1, \qquad (6.11^0)$$

$$\|\xi_{1k}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_1, \quad k = 1,2, \quad \|\xi_{13}(x,\varepsilon)\| \le \mathrm{A}_1, \quad p = 0, \qquad (6.12^0)$$

где постоянные A_{p+1} и A_1 не зависят от $x \in [0;1]$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

С учетом полученных оценок следует, что построенные решения (5.6) и (5.7) являются асимптотическими рядами решений расширенного уравнения (2.3), а их сужения — асимптотические ряды решений СВДУ (0.1).

Замечание 4. Нами проведена оценка остаточных членов асимптотики решения для однородного СВДУ (0.1). Если уравнение (0.1) неоднородное, то в решении $y_3(x,\varepsilon)$ (см. (5.7)) появляется еще одно слагаемое, зависящее только от переменной x и не зависящее от произвольных постоянных. В этом случае оценка полученного решения $y_3(x,\varepsilon)$ по форме остается прежней, т. е. также имеют место оценки (6.11), (6.12) и (6.12^0).

Одним из критериев правильности полученного результата является исследование предела построенного решения при стремлении малого параметра к нулю. Используя свойства СОФ на бесконечности и оценки (6.12^0), легко установить, что на любом компакте отрезка I, не содержащем точки $x = 0$, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_{i=1}^{2} Y_i(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon) + y_3(x,\varepsilon)\right] = y_{30}(x) = \omega_0(x), \tag{6.13}$$

где $\omega_0(x)$ — решение вырожденного уравнения $\mathbf{L}_0\omega_0(x) = h(x)$, $x \in (0, 1]$.

Сформулируем в виде теоремы полученные результаты.

Теорема. *Пусть для СВДУ* (0.1): a) *имеют место условия* 1^0 *и* 2^0; b) $-\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{\rho}{x} + \alpha(x)$, *где* $\rho \in N$. *Тогда при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$

1) *описанным методом можно построить три решения расширенного уравнения* (2.3), *представимые в виде асимптотических рядов* (5.6), (5.7);

2) *сужение этих решений при* $t = \Phi(x,\varepsilon)$, *т. е. ряды* (6.1^k), (6.1^3) *суть асимптотические ряды решений СВДУ* (0.1);

3) *для остаточных членов асимптотических рядов решений* (6.1), $k = \overline{1,3}$, *имеют место оценки* (6.11), (6.12), (6.11^0), (6.12^0);

4) *на любом компакте отрезка* I, *не содержащем точки* $x = 0$, *имеет место предельное равенство* (6.13).

Замечание 5. Если же функции $\widetilde{a}(x)$ и $b(x)$ имеют один и тот же знак при $x \in I$, то полученные результаты в общем случае уже не имеют места.

Литература

1. Langer R. *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 67. – P. 461–490.
2. Langer R. *On the asymptotic forms of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 80. – P. 93–123.
3. Langer R. *The solutions of a class of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point* // Duke Math. J. – 1956. – V. 23. – P. 93–110.
4. Langer R. *Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 92. – P. 371–410.
5. Дородницын А.А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т. 7. № 6. – С. 3–96.
6. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. Бобочко В.Н. *Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 1505–1515.
8. Бобочко В.Н. *Уравнение типа Орра–Зоммерфельда с двумя точками поворота* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1559–1570.
9. Бобочко В.Н. *Внутренняя точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
10. Бобочко В.Н. *Системы дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота* // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49. – № 11. – С. 1543–1547.
11. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с нестабильной точкой поворота.* – Ред. журн. “Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 3. – С. 73”. – Казань, 1997. – Деп. в ВИНИТИ, № 366-В97.

12. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 10. – С. 1304–1312.
13. Вазов В. *Асимптотические разложения решений дифференциальных уранений* . – М.: Мир, 1968. – 464 с.
14. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* – М.: Наука, 1989. – 336 с.
15. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // УМН. – 1957. – Т. 12. – Вып. 5. – С. 3–122.

Кировоградский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 05.01.1999
окончательный вариант 29.05.2001