ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.546

М.Н. ГАВРИЛЮК

О ПОКРЫТИИ КРУГОВ В КЛАССЕ БИБЕРБАХА–ЭЙЛЕНБЕРГА

Данная статья посвящена изучению одного подкласса известного класса регулярных функций Бибербаха–Эйленберга. Используется терминология, основные понятия и факты из [1]–[3]. Метод исследования представляет собой, как в [3]–[5], комбинацию метода модулей в форме проблем модуля для двух гомотопических классов кривых и метода симметризации.

В статье приняты следующие обозначения: R — класс регулярных в круге $U=\{z:|z|<1\}$ функций $w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$, удовлетворяющих условию $f(z_1)\cdot f(z_2)\neq 1$ для любых $z_1,z_2\in U$, $R(\lambda)$ — подкласс R однолистных функций $w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$, для которых $|a_1|=\lambda$, $0<\lambda\leq 1$; $m(D)$ — конформный модуль двусвязной области D, т.е. отношение радиусов граничных окружностей концентрического кругового кольца, конформно-эквивалентного области D; $f(U)$ — множество значений некоторой функции $w=f(z)$, заданной в круге U; $\frac{1}{f(U)}$ — область, полученная из $f(U)$ преобразованием $\frac{1}{w}$; $R_\mu(\lambda)$ — множество функций $w=f(z)$ из класса $R(\lambda)$, удовлетворяющих дополнительному соотношению

$$m\{\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[f(U)\cup\tfrac{1}{f(U)}]\}\geq\mu^2,\quad 1\leq\mu<\tfrac{1}{\lambda}.$$

В статье получена теорема покрытия в классе $R_\mu(\lambda)$. Экстремальная функция связана с некоторым квадратичным дифференциалом, критические траектории которого разбивают всю плоскость на пару областей, экстремальных в свою очередь в одной проблеме модуля для двух классов кривых. Эта проблема модуля рассмотрена в [3], более общая проблема модуля решена в [6].

Пусть -1, 1, in, $n\geq 0$, — отмеченные точки на плоскости $\mathbb{C}_\omega$. Пусть H_1 — класс замкнутых жордановых кривых на $\overline{\mathbb{C}}'=\overline{\mathbb{C}}_\omega\setminus\{-1,1,in,\infty\}$, отделяющих ∞ от точек -1, 1, in. Из счетного числа гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на $\overline{C}'$, отделяющих точки -1, 1 от точек in, ∞, будем рассматривать следующие два класса кривых: $H_2^{(1)}$ и $H_2^{(2)}$. Класс $H_2^{(1)}$ состоит из кривых, гомотопных на $\overline{\mathbb{C}}'$ разрезу по отрезку $[-1,1]$. Пусть $\rho>0$ достаточно мало, класс $H_2^{(2)}$ состоит из кривых, гомотопных на $\overline{C}'$ разрезу по ломаной с вершинами в точках -1, $i(n+\rho)$, 1. Пусть $D^{(k)}$, $k=1,2$, — семейство всех пар неналегающих областей $\{D_1,D_2\}$, где $\infty\in D_1$, D_1 — односвязная область, ассоциированная с классом H_1, D_2 — двусвязная область, ассоциированная с классом $H_2^{(k)}$, $k=1,2$. При этом допускается случай, когда D_2 вырождается. Пусть $M(D_1,\infty)$ — приведенный модуль области D_1 относительно точки ∞, тогда $M(D_1,\infty)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R(D_1,\infty)}$, где $R(D_1,\infty)$ — конформный радиус области D_1 относительно точки ∞, $R(D_1,\infty)=\operatorname{cap}(\partial D_1)$ — логарифмическая емкость границы области D_1; $M(D_2)$ — модуль двусвязной области D_2 относительно кривых, разделяющих ее граничные компоненты, $M(D_2)=\frac{1}{2\pi}\log m(D_2)$. Рассмотрим задачу $m_k(n,\alpha_1,\alpha_2)$, $k=1,2$, о максимуме суммы $\alpha_1^2M(D_1,\infty)+\alpha_2^2M(D_2)$ для всех $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\geq 0$ таких, что $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ в семействе областей $D^{(k)}$. Такая задача является частным случаем экстремально-метрической проблемы модуля для нескольких гомотопических классов кривых ([2], гл. 0, теорема 0.1). Конкретизируя качественный результат [6] в общей проблеме модуля, получаем следующее. Искомый максимум $M^{(k)}(n,\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^2M(D_1^*,\infty)+\alpha_2^2M(D_2^*)$, где $\{D_1^*,D_2^*\}$ — экстремальная пара областей из семейства $D^{(k)}$, $\overline{D}_1^* \cup \overline{D}_2^* = \overline{C}$. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$, D_1^*, D_2^* соответственно круговая и кольцевая области квадратичного дифференциала $Q(\omega)d\omega^2 = -\frac{\omega - ic}{(\omega^2-1)(\omega-in)}d\omega^2$ или же $D_1^* = \overline{C} \setminus E(-1,1,in)$, $D_2^* = \emptyset$, где $E(-1,1,in)$ — континуум наименьшей емкости, соединяющий точки -1, 1, in ([2], с. 67). Пусть γ — замкнутая траектория дифференциала $Q(\omega)d\omega^2$ в одной из областей D_1^*, D_2^*; дл$_Q\gamma$ — длина этой кривой в метрике $|Q(\omega)|^{1/2}|d\omega|$. Для нуля дифференциала ic имеем условие дл$_Q\gamma = \alpha_1$, если $\gamma \in D_1^*$, дл$_Q\gamma = \alpha_2$, если $\gamma \in D_2^*$. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то ассоциированным квадратичным дифференциалом в задаче $m_1(n, \alpha_1, \alpha_2)$ служит $q(\omega)d\omega^2 = -\frac{d\omega^2}{\omega^2-1}$. Искомый максимум реализуется конфигурацией $\{D_1^*, D_2^*\}$, где D_1^* — внешность эллипса с фокусами -1, 1, проходящего через точку in, D_2^* — внутренность этого же эллипса с разрезом по отрезку $[-1,1]$. При $\alpha_1 = \alpha_2$ экстремальной конфигурацией в задаче $m_2(n, \alpha_1, \alpha_2)$ является $D_1^* = \overline{C} \setminus E(-1,1,in)$, $D_2^* = \emptyset$.

В [3] в терминах эллиптических функций найдены конформные отображения экстремальных областей D_1^* и D_2^* на канонические области.

Лемма 1. *Пусть $\{D_1^*, D_2^*\}$ — экстремальная конфигурация задачи $m_1(n, \alpha_1, \alpha_2)$ при $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Тогда существует единственная пара чисел (n, c), являющаяся решением системы*

$$\operatorname{cap}(\partial D_1^*) = \frac{1}{2\lambda}, \quad m(D_2^*) = \mu, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 1 < \mu < 1/\lambda. \tag{1}$$

Доказательство. Величины $\operatorname{cap}(\partial D_1^*)$ и $m(D_2^*)$ являются непрерывными функциями параметров n и c [2], [3]. При $c \to +\infty$, очевидно, $m(D_2^*) \to +\infty$; при $c \to c_0$ область D_2^* вырождается и $m(D_2^*) \to 1$; здесь $c_0 = c(-1,1,in)$ — нуль квадратичного дифференциала, соответствующего континууму наименьшей емкости, содержащий точки -1, 1, in ([2], с. 75). Следовательно, найдется некоторое значение $c = c(n)$, для которого $m(D_2^*) = \mu$, $1 < \mu < 1/\lambda$. При $n \to +\infty$ $\operatorname{cap}(\partial D_1^*) \to +\infty$, а при $n \to c$ имеем $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\operatorname{cap}(\partial D_1^*) = \mu/2$. Значит, найдется такое n, что $\operatorname{cap}(\partial D_1^*) = 1/(2\lambda)$.

Докажем единственность полученного решения. Предположим, что (n_1, c_1) и (n_2, c_2) — два таких решения. Каждому решению соответствует своя пара областей, экстремальных в проблеме модуля $m_1(n_l, \alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)})$, $l = 1, 2$. Пусть, например, $n_2 > n_1$, тогда $M^{(1)}(n_1, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) = \alpha_1^{(1)2} M(D_1^{*(2)}, \infty) + \alpha_2^{(1)2} M(D_2^{*(2)})$, $\{D_1^{*(2)}, D_2^{*(2)}\}$ — экстремальная конфигурация проблемы модуля $m_1(n_2, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$, но это нарушает единственность решения $m_1(n, \alpha_1, \alpha_2)$ ([2], с. 39). Таким образом, существует единственная пара $n = n(\lambda, \mu)$ и $c = l(\lambda, \mu)$ — решение системы (1). $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Пусть $\{D_1^*, D_2^*\}$ — экстремальная конфигурация проблемы модуля $m_2(n, \alpha_1, \alpha_2)$ при $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Тогда существует единственная пара (N, C), $N = N(\lambda, \mu)$, $C = C(\lambda, \mu)$, являющаяся решением системы*

$$\operatorname{cap}(\partial D_1^*) = \frac{1}{2\lambda}, \quad m(D_2^*) = \mu, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 1 < \mu < \frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

Построим теперь экстремальную в теореме Кёбе функцию и опишем экстремальную конфигурацию, реализующую радиус мажорантного круга.

Рассмотрим экстремальную конфигурацию $\{D_1^*, D_2^*\}$ проблемы модуля $m_1(n, \alpha_1, \alpha_2)$, в которой $n = n(\lambda, \mu)$, $c = l(\lambda, \mu)$ — решение системы (1). В плоскости $\overline{C}_\omega$ рассмотрим отображения $w = g_\pm(\omega) = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}$. Функции $g_\pm(\omega)$ индуцируют в $\overline{C}_w$ соответствующую проблеме модуля $m_1(n, \alpha_1, \alpha_2)$ проблему модуля $M_1(-ir, \alpha_1, \alpha_2)$, $g_-(in) = -ir$, $r > 0$. Аналогичная проблема модуля для одного гомотопического класса кривых при доказательстве теорем покрытия в классе $R(\lambda)$ рассматривалась в ([2], с. 171; [7]).

Экстремальные области G_1, G_2, G_3 в проблеме модуля $M_1(-ir,\alpha_1,\alpha_2)$ допустимы относительно квадратичного дифференциала

$$\widetilde{Q}_{(w)}dw^2 = -\frac{(w+i\tau)(w-i/\tau)}{w^2(w+ir)(w-i/r)}dw^2, \quad 0<r<\tau<+\infty.$$

Области G_1, G_2, G_3, $0\in G_1$, $\infty\in G_3$, — соответственно круговая, кольцевая и круговая области квадратичного дифференциала $\widetilde{Q}_{(w)}dw^2$. Внутреннее замыкание объединения областей G_1, G_2, G_3 совпадает со всей плоскостью $\overline{C}_w$. Область G_3 получается из G_1 конформным преобразованием $1/w$, двусвязная область G_2 переходит в себя при отображении $1/w$. Области G_1, G_2, G_3 симметричны относительно мнимой оси.

Пусть $w=f(z,\lambda,\mu)$ — конформное и однолистное отображение единичного круга U на область G_1. Такая функция в теории квадратичных дифференциалов известна ([1], с. 49) и в терминах эллиптических функций найдена в ([3], с. 113). Пусть $-i\tau = g_-(in)$, где (n,l) — решение системы (1), следовательно, $f(0)=0$, $|f'(0)|=\lambda$ и $m(G_2)=\mu^2$. Рассмотрим проблему модуля $m_2(n,\alpha_1,\alpha_2)$, где $n=N(\lambda,\mu)$, $C(\lambda,\mu)$ — решение системы (2). Функции $g_\pm(\omega)=\omega\pm\sqrt{\omega^2-1}$ индуцируют в плоскости $\overline{C}_w$ проблему модуля $M_2(R,\alpha_1,\alpha_2)$, $g_+(in)=iR$, $R>0$, $R=R(\lambda,\mu)$.

Теорема. *Пусть функция $w=f(z)$, $z\in U$, принадлежит классу $R_\mu(\lambda)$, $0<\lambda<1$, $1\le\mu<1/\lambda$. Тогда граница множества значений $\partial f(U)$ функции $f(z)$ в круге U принадлежит кольцу*

$$r\le|w|<R,$$

где $-ir=g_-(in)$, (n,c) — решение системы (1); *$iR=g_+(iN)$, (N,C) — решение системы* (2). *Множество $f(U)$ может иметь точки на окружности $w=|r|$ только для функции $w=\pm f(ze^{i\alpha},\lambda,\mu)$, α действительное.*

Доказательство. Покажем, что круг $|w|\le r(\lambda,\mu)$ принадлежит образу круга $f(U)$, $f(z)$ — любая функция из класса $R_\mu(\lambda)$ за исключением может быть точек $w=\pm ir(\lambda,\mu)$. Предположим, что в классе $R_\mu(\lambda)$ найдется некоторая функция $w=F(z)$, не принимающая в U значения $w=a$, $0<|a|<r(\lambda,\mu)$. Считаем также, что $m(D_F)=\mu^2$, $D_{\mathcal{F}}=\overline{C}_w\setminus[\mathcal{F}(U)\cup\frac{1}{\mathcal{F}(U)}]$, в противном случае расширением области $\mathcal{F}(U)$ и проведением в расширенной области разреза $[\widetilde{a},a]$ добились бы требуемого.

В плоскости $\overline{C}_w$ проведем круговую симметризацию относительно положительной мнимой полуоси. Рассмотрим отображение $\omega=g^{-1}(w)=\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})$. Пусть $\mathcal{F}^*(U)$, $1/\mathcal{F}^*(U)$, $D^*_{\mathcal{F}}$ — результаты рассмотренной выше симметризации областей $\mathcal{F}(U)$, $1/\mathcal{F}(U)$, $D_{\mathcal{F}}$. При отображении $\omega=g^{-1}(w)$ областям $\mathcal{F}(U)$, $1/\mathcal{F}(U)$, $D_{\mathcal{F}}$ соответствуют области $G_1=g^{-1}(\mathcal{F}(U))=g^{-1}(1/\mathcal{F}(U))$ и $G_2=g^{-1}(D_{\mathcal{F}})$. Через G_1^* и G_2^* обозначим области, соответствующие при этом отображении областям $\mathcal{F}^*(U)$, $1/\mathcal{F}^*(U)$, $D^*_{\mathcal{F}}$. В результате симметризации имеем $\mathrm{cap}(G_1^*)\le 1/(2\lambda)$ и $m(G^*)\ge\mu^2$ ([1], гл. 8), точка $w=-i|a|$ переходит в точку in', $n'>n(\lambda,\mu)$.

Рассмотрим теперь проблему модуля $m_1(n,\alpha_1,\alpha_2)$, в которой (n,c) — решение системы (1), а значит, однозначно определены параметры n, α_1, α_2. Экстремальную конфигурацию этой проблемы модуля обозначим $\{\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2\}$. Так как функция $\mathcal{F}(z)$ принадлежит классу $R_\mu(\lambda)$, $n'>n=n(\lambda,\mu)$ и $\{\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2\}$ — экстремальная конфигурация, то имеем

$$\frac{\alpha_1^2}{2\pi}\log 2\lambda+\frac{\alpha_2^2}{2\pi}\log\mu=\alpha_1^2M(G_1,\infty)+\alpha_2^2M(G_2)\le\alpha_1^2M(G_1^*,\infty)+\alpha_2^2M(G_2^*)<$$

$$<\alpha_1^2M(\widetilde{G}_1,\infty)+\alpha_2^2M(\widetilde{G}_2)=\frac{\alpha_1^2}{2\pi}\log 2\lambda+\frac{\alpha_2^2}{2\pi}\log\mu.$$

Противоречие.

Условия равенства в теореме следуют из теорем единственности при симметризации ([1], гл. 8) и единственности экстремального разбиения плоскости ([2], гл. 0).

Радиус мажорантного круга $R=R(\lambda,\mu)$, $iR=g_+^{-1}(iN)$, где (N,C) — решение системы (2), находится аналогично с той лишь разницей, что ни для какой функции из класса $R_\mu(\lambda)$ не достигается равенство. Величина $R(\lambda, \mu)$ не может быть улучшена. Это доказывается так же, как в ([3], с. 123). $\square$

В заключение отметим: при $\mu = 1$ класс $R_1(\lambda)$ совпадает с классом $R(\lambda)$ и $r(\lambda, 1) = r(\lambda)$ — константа Кёбе в классе Бибербаха–Эйленберга [8], а $R(\lambda, 1) = 1/r(\lambda)$ и найден в [3] и [7].

Литература

1. Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М.: Ин. лит., 1962. – 265 с.
2. Кузьмина Г.В. *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1980. – Т. 139. – С. 1-240.
3. Гаврилюк М.Н., Солынин А.Ю. *Применение проблем модуля к некоторым экстремальным задачам.* – Кубан. ун-т. – Краснодар, 1983. – 139 с. – Деп. в ВИНИТИ 6.06.83. № 3072-83.
4. Гаврилюк М.Н., Солынин А.Ю. *Оценки модуля функции в некоторых классах однолистных функций* // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – № 63. – С. 47–56.
5. Гаврилюк М.Н., Солынин А.Ю. *Оценки модуля функции в классе функций Бибербаха–Эйленберга, заданных в кольце* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 4. – С. 59–61.
6. Кузьмина Г.В. *Об одной проблеме модуля для семейств кривых* // Препринт № Р6. ЛОМИ АН СССР. – 1983. – 43 с.
7. Кузьмина Г.В. *Теоремы покрытия в классах функций Бибербаха–Эйленберга* // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1981. – № 112. – С. 143–158.
8. Jenkins J.A. *On Bieberbach–Eilenberg function* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 76. – № 3. – P. 389–396.

Кубанский государственный
университет

Поступила
02.10.1997