КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 124, кн. 6 *УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ* **1964**

С. КАНИЕВ

ОБ УКЛОНЕНИИ В СРЕДНЕМ БИГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1. Пусть $U(x, y)$ — бигармоническая функция, имеющая в заданной области G непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, удовлетворяющие внутри G уравнению

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0,$$

а на границе Γ области G условиям

$$U|_\Gamma = f(s), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = h(s) \equiv 0,$$

где $f(s)$ — заданная функция дуги s контура Γ.

В работе рассматривается вопрос об уклонении значений функции $U(x, y)$ внутри области G от ее значений $f(s)$ на границе.

Пусть G — единичный круг, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $f(r, \varphi) = U(x, y)$. Имеет место следующее предложение.

Теорема* 1. *Для любой бигармонической в единичном круге функции* $f(r, \varphi)$, *удовлетворяющей на границе условиям* $\left.\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$ *и* $f(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$, *где функция* $f(\varphi)$ *принадлежит классу* $L_q(0, 2\pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, *то есть*

$$\|f(\varphi)\|_{L_q} = \left\{\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^q \, d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

при всех $0 \leqslant r < 1$ *справедливо неравенство*

$$\|f(r, \varphi) - f(\varphi)\|_{L_q} \leqslant C\omega_2(1 - r)_{L_q}, \qquad (1)$$

где C — *некоторая абсолютная константа, а*

$$\omega_2(t) = \sup\left\{\int_0^{2\pi} |f(\varphi + h) - 2f(\varphi) + f(\varphi - h)|^q \, d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}}$$

есть модуль гладкости функции $f(\varphi)$ *в метрике* L_q.

* Для функции $f(\varphi) \in C(0, 2\pi)$ соответствующий результат опубликован в [5].

Доказательство. Так как бигармоническая в единичном круге функция $f(r, \varphi)$, у которой $\left.\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$, выражается через свои значения на окружности формулой (см. [2], стр. 402)

$$f(r, \varphi) = \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + t) \cdot \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt \tag{2}$$

и

$$\frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} = 1,$$

то

$$f(r, \varphi) - f(\varphi) =$$

$$= \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\varphi + t) - 2f(\varphi) + f(\varphi - t)] \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt.$$

Следовательно,

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi)\|_{L_q} =$$

$$= \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\varphi + t) - 2f(\varphi) + f(\varphi - t)] \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt \right|^q d\varphi \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя сюда обобщенное неравенство Минковского (см. [1], стр. 601), получим:

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi)\|_{L_q} \leqslant \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| [f(\varphi + t) - 2f(\varphi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(\varphi - t)] \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} \right|^q d\varphi \right\}^{\frac{1}{q}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} \cdot \omega_2(t)_{L_q} dt.$$

Преобразуем ядро под интегралом:

$$\frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2r\cos t + r^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}, \tag{3}$$

и последнее неравенство перепишем в виде

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi)\|_{L_q} \leqslant \frac{(1 - r^2)^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\omega_2(t)_{L_q}}{1 - 2r\cos t + r^2}\, dt +$$

$$+ \frac{(1 - r^2)^3}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\omega_2(t)_{L_q}}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt = I_1 + I_2. \tag{4}$$

Используя свойство модулей гладкости (см. [1], стр. 179)

$$\omega_2(\lambda\delta)_{L_q} \leqslant (\lambda + 1)^2 \omega_2(\delta)_{L_q},$$

где λ — любое положительное число, и известные соотношения

$$\left.\begin{aligned} 1-2r\cos t+r^2 &= (1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}, \\ \sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}, &\quad (0\leqslant t\leqslant \pi), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

получаем, что

$$I_1 \leqslant \frac{(1-r^2)^2}{4\pi}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)^2}{(1-r)^2+4r\,\frac{t^2}{\pi^2}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\left\{\int_0^{\pi}\frac{t^2}{(1-r)^2+4r\,\frac{t^2}{\pi^2}}\,dt+\int_0^{\pi}\frac{2(1-r)\,t}{(1-r)^2+4r\,\frac{t^2}{\pi^2}}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+4r\,\frac{t^2}{\pi^2}}\,dt\right\}. \tag{6}$$

При $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$ из (6) непосредственно вытекает, что

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\left\{\int_0^{\pi}4t^2dt+\int_0^{\pi}4tdt+\int_0^{\pi}dt\right\}=C_1\cdot\omega_2(1-r)_{L_q}.$$

Пусть теперь $\frac{1}{2}\leqslant r<1$. Тогда из (6) получаем:

$$I_1 < \frac{1}{\pi}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\left\{\int_0^{\pi}\frac{\pi^2}{2}\,dt+\frac{1-r}{4r}\,\pi^2\ln\left[(1-r)^2\pi^2+4rt^2\right]\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\left\{\frac{\pi^3}{2}+(1-r)\,\pi^2\ln\frac{1+r}{1-r}+\pi\right\}=C_2\cdot\omega_2(1-r)_{L_q}.$$

Итак, для всех $0\leqslant r<1$

$$I_1\leqslant C_3\omega_2(1-r)_{L_q},\quad C_3=\max\left[C_1,\,C_2\right]. \tag{7}$$

Оценим теперь I_2:

$$I_2\leqslant\frac{\pi^3(1-r^2)^3}{4}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)^2}{\left[(1-r)^2\pi^2+4rt^2\right]^2}\,dt. \tag{8}$$

При $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$ из (8) непосредственно следует, что

$$I_2\leqslant\frac{\pi^3}{4}\,\omega_2(1-r)_{L_q}\cdot\int_0^{\pi}\frac{16}{\pi^4}(2t+1)^2\,dt=C_4\cdot\omega_2(1-r)_{L_q}.$$

Пусть теперь $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$. Разбивая интеграл в правой части (8) на три (обозначим их через I_2', I_2'', I_2'''), вычисляем в отдельности

$$I_2' \leqslant 2\pi^3 (1-r)\, \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \int_0^\pi \frac{t^2}{[(1-r)^2 \pi^2 + 2t^2]^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \pi^3 (1-r)\, \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{(1-r)^2 \pi^2 + 2t^2}\, dt - \right.$$

$$\left. - \pi^2 (1-r)^2 \int_0^\pi \frac{1}{[(1-r)^2 \pi^2 + 2t^2]^2}\, dt \right\} = \pi^3 \omega_2 (1-r)_{L_q} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\pi^2 (1-r)} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-r} \cdot \frac{t}{\pi} \right)^2}\, dt - \frac{\pi^2 (1-r)^3}{4} \int_0^\pi \frac{1}{\left[\left(\pi \cdot \frac{1-r}{\sqrt{2}} \right)^2 + t^2 \right]^2}\, dt \right\}.$$

Применяя рекуррентную формулу (см. [4], стр. 35)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2n \cdot a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n},$$

получаем

$$I_2' \leqslant \pi^3 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{(1-r)\pi}\, t \Big|_0^\pi - \frac{1-r}{4} \cdot \frac{t}{\frac{\pi^2 (1-r)^2}{2} + t^2} \Big|_0^\pi - \right.$$

$$\left. - \frac{1-r}{4} \int_0^\pi \frac{1}{\frac{\pi^2 (1-r)^2}{2} + t^2}\, dt \right\} =$$

$$= \pi^3 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1-r}{2\pi [(1-r)^2 + 2]} - \frac{1-r}{2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi^2 (1-r)^2 + 2t^2}\, dt \right\} \leqslant$$

$$< \pi^3 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) = C_5 \cdot \omega_2 (1-r)_{L_q}.$$

$$I_2'' \leqslant 2\pi^3 (1-r)^2 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \int_0^\pi \frac{2t}{[(1-r)^2 \pi^2 + 2t^2]^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \pi (1-r)^2 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \frac{1}{\pi^2 (1-r)^2 + 2t^2} \Big|_\pi^0 = C_6 \omega_2 (1-r)_{L_q}.$$

$$I_2''' \leqslant 2\pi^3 (1-r)^3 \omega_2 (1-r)_{L_q} \cdot \int_0^\pi \frac{dt}{[\pi^2 (1-r)^2 + 2t^2]^2} =$$

$=$ (вычислена в процессе оценки I_2') $= C_7 \omega_2 (1-r)_{L_q}$. Итак, при всех $0 \leqslant r < 1$

$$I_2 \leqslant C_8 \omega_2 (1-r)_{L_q}, \quad C_8 = \max [C_4, C_5, C_6, C_7]. \tag{9}$$

Соотношения (4), (7) и (9) доказывают неравенство (1).

2. Пусть функция $f(\varphi) \in L_q(0, 2\pi)$, $1 \leqslant q < \infty$, задана на $[0, 2\pi]$ последовательностью своих наилучших приближений

$$E_n(f)_{L_q} = \inf_{a_k, b_k} \left\{ \int_0^\pi \left| f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

в метрике L_q тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n$. Тогда, пользуясь обратной теоремой конструктивной теории функций (см. [1], стр. 351), как следствие теоремы 1 получаем

Следствие: При выполнении всех условий теоремы 1 имеет место оценка

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi) \|_{L_q} \leqslant M_q (1 - r)^2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]+1} (\nu + 1)^{2\gamma - 1} E_\nu^\gamma (f)_{L_q} \right\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

где $\gamma = q$, если $1 \leqslant q \leqslant 2$ и $\gamma = 2$, если $2 \leqslant q < \infty$, а M_q — константа, зависящая только от q.

3. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \tag{10}$$

есть ряд Фурье функции $f(\varphi) \in L_q(0, 2\pi)$, $1 \leqslant q < \infty$. Бигармоническая в круге $r < 1$ функция

$$f(r, \varphi) = \frac{(1 - r^2)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - r \cos(t - \varphi)}{[1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2]^2} dt,$$

нормальная производная которой на границе равна нулю и принимающая на границе значения функции $f(\varphi)$, после некоторых преобразований представляется в виде ряда

$$f(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r^k + \frac{1 - r^2}{2} k r^k \right) (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \tag{11}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$.

Из оценки (1) вытекает, что если функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию $\omega_2(t)_{L_q} \leqslant Mt^2$, то для всех $0 \leqslant r < 1$ справедливо неравенство

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi) \|_{L_q} \leqslant k (1 - r)^2.$$

Возникает вопрос: может ли уклонение рассматриваемых нами бигармонических функций от их граничных значений при $r \to 1$ иметь порядок лучший, чем $(1 - r)^2$.

Покажем, что если бигармоническая функция $f(r, \varphi)$, для которой $\left.\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$ и $f(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$, такова, что при $r \to 1$

$$\| f(r, \varphi) - f(\varphi) \|_{L_q} = 0 \{ (1 - r)^2 \}, \tag{12}$$

то

$$f(r, \varphi) \equiv \text{const}.$$

В самом деле, из (10) и (11) следует, что при $q>1$

$$\left|\left(1-r^k-\frac{1-r^2}{2}kr^k\right)a_k\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\varphi)-f(r,\varphi)]\cos k\varphi d\varphi\right|\leqslant$$

$\leqslant$ (неравенство Гельдера) $\leqslant$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(\varphi)-f(r,\varphi)|^q d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\cos k\varphi|^{\frac{q}{q-1}}d\varphi\right\}^{\frac{q-1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant A\cdot\|f(r,\varphi)-f(\varphi)\|_{L_q},\quad A=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\cos k\varphi|^{\frac{q}{q-1}}d\varphi\right\}^{\frac{q-1}{q}}. \tag{13}$$

Аналогичное неравенство верно и при $q=1$.

Так как, в силу равенств:

$$1-r^k-\frac{1-r^2}{2}kr^k=(1-r)\left(1+r+\ldots+r^{k-1}-\frac{1+r}{2}kr^k\right)=$$
$$=(1-r)\left(kr^k-\frac{1+r}{2}kr^k\right)+(1-r)[(1-r^k)+(r-r^k)+\ldots+$$
$$+(r^{k-1}-r^k)]=\frac{1}{2}(1-r)^2kr^k+(1-r)^2[(1+r+\ldots+r^{k-1})+$$
$$+r(1+r+\ldots+r^{k-2})+\ldots+r^{k-2}(1+r)+r^{k-1}]=$$
$$=\frac{k}{2}(1-r)^2r^k+(1-r)^2(1+2r+3r^2+\ldots+kr^{k-1}),$$

при $r\to 1$

$$1-r^k-\frac{1-r^2}{2}kr^k\sim\left(\frac{k^2}{2}+k\right)(1-r)^2,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{14}$$

то, переходя к пределу при $r\to 1$ в неравенстве (13) и учитывая (12), получим

$$(a_k)\sim\frac{0\{(1-r)^2\}}{\left(\frac{k^2}{2}+k\right)(1-r)^2}.$$

Значит, $a_k=0$ для $k=1,\ 2,\ldots$. Аналогично, $b_k=0$ для $k=1,\ 2,\ldots$.

В связи с вышеуказанным обстоятельством возникает необходимость определения структуры класса тех граничных функций, для которых уклонение при $r\to 1$ имеет наилучший порядок $(1-r)^2$.

Теорема 2. *Для того, чтобы при $r\to 1$ и $q>1$ выполнялось соотношение*

$$\|f(r,\varphi)-f(\varphi)\|_{L_q}=0\{(1-r)^2\}, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\varphi)$ была эквивалентна функции, имеющей абсолютно непрерывную первую производную и почти всюду производную второго порядка, принадлежащую пространству $L_q(0,\ 2\pi)$.

Необходимость условия вытекает из того, что (см. [1], стр. 116) при этом

$$\omega_2(f;\ t)_{L_q}\leqslant Mt^2,\quad \text{где } M=\|f''(\varphi)\|_{L_q}.$$

Достаточность. Пусть имеет место соотношение (15). Известно (см. [3], стр. 166), что фейеровские средние $\sigma_m(f)$ ряда Фурье функции $f(x) \in L_q$ по норме пространства L_q не превосходят норму $f(x)$, т. е.

$$\|\sigma_m(f)\|_{L_q} \leqslant \|f(\varphi)\|_{L_q}.$$

Поэтому мы имеем:

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(1-r^k-\frac{1-r^2}{2}kr^k\right)(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\right\|_{L_q} \leqslant$$
$$\leqslant \|f(\varphi)-f(r,\varphi)\|_{L_q}.$$

В этом неравенстве, переходя к пределу при $r\to 1$ и учитывая (14) и (15), получим:

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k^2}{2}+k\right)(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\right\|_{L_q}=0\,(1), \qquad (16)$$

а это является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2}+k\right)(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \qquad (17)$$

был рядом Фурье некоторой функции $g(\varphi)$, принадлежащей классу $L_q(0, 2\pi)$ (см. [3]). Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)(a_k\sin k\varphi-b_k\cos k\varphi)$, полученный интегрированием ряда (17), а следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(a_k\sin k\varphi-b_k\cos k\varphi)$ сходится равномерно к некоторой функции $G(\varphi)\in L_q(0, 2\pi)$. Поэтому сопряженная к $G(\varphi)$ функция

$$\bar{G}(\varphi)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin\varphi)$$

также принадлежит $L_q(0, 2\pi)$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\right\|_{L_q}=0\,(1).$$

Следовательно, из (16) получим, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)k^2(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\right\|_{L_q}=0\,(1),$$

а это, в силу известных предложений, равносильно утверждению теоремы.

Аналогично доказывается и следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы при* $r\to 1$ *выполнялось соотношение*

$$\|f(r,\varphi)-f(\varphi)\|_{L_1}=0\{(1-r)^2\},$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\varphi)$ была эквивалентна абсолютно непрерывной функции, обладающей производной первого порядка с ограниченным изменением.

Теорема 4. *Пусть $f(r, \varphi)$ — бигармоническая в круге $r < 1$ функция, удовлетворяющая граничным условиям $\left.\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$ и $f(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi) \in L_q(0, 2\pi)$, $1 \leqslant q < \infty$. Пусть, кроме того, ее производная порядка $2l-1$ $(l = 1, 2, \ldots)$ принадлежит классу $L_q(0, 2\pi)$. Тогда при любом $0 \leqslant r < 1$ имеет место неравенство*

$$\left\| \frac{\partial^{2l-1} f(r, \varphi)}{\partial \varphi^{2l-1}} \right\|_{L_q} \leqslant C \cdot r \frac{\omega(1-r)_{L_q}}{(1-r)^{2l-1}}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

где C — абсолютная константа, а $\omega(t)_{L_q}$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Докажем теорему для $l = 1$; для других l доказывается аналогично. В силу формулы (1) и преобразования (3), мы имеем

$$f(r, \varphi) = \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2} dt +$$

$$+ \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{[1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2]^2} dt.$$

Отсюда непосредственно находим, что

$$\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{(1-r^2)^2 r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + t) \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} dt +$$

$$+ \frac{(1-r^2)^3 r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + t) \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^3} dt,$$

и, в силу нечетности ядер под интегралами, последнее равенство перепишем в виде:

$$\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{(1-r^2)^2 r}{2\pi} \int_{-\pi} [f(\varphi + t) - f(\varphi)] \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} dt +$$

$$+ \frac{(1-r^2)^3 r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\varphi + t) - f(\varphi)] \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^3} dt.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\|_{L_q} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{r(1-r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\varphi + t) - f(\varphi)] \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r(1-r^2)^3}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\varphi + t) - f(\varphi)] \frac{\sin t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^3} dt \right|^q d\varphi \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$\leqslant$ (неравенство Минковского) $\leqslant$

$$\leqslant \frac{r(1-r^2)^2}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(\varphi+t)-f(\varphi)]\frac{\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\,dt\right|^q d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\frac{r(1-r^2)^3}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(\varphi+t)-f(\varphi)]\frac{\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^3}\,dt\right|^q d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя сюда обобщенное неравенство Минковского, получим:

$$\left\|\frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right\|_{L_q}\leqslant\frac{r(1-r^2)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin|t|}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\,\omega(|t|)_{L_q}\,dt+$$

$$+\frac{r(1-r^2)^3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin|t|}{(1-2r\cos t+r^2)^3}\,\omega(|t|)_{L_q}\,dt.$$

Следовательно, пользуясь соотношениями $\omega(\lambda\delta)_{L_q}\leqslant(\lambda+1)\,\omega(\delta)$ $(\lambda>0,\ 0\leqslant\delta\leqslant\pi)$ и (5), а также неравенством $\sin t\leqslant t$ $(t\geqslant 0)$, на-ходим, что

$$\left\|\frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right\|_{L_q}\leqslant\frac{r(1-r^2)^2}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)t}{\left[(1-r)^2+4r\frac{t^2}{\pi^2}\right]^2}\,dt+$$

$$+\frac{2r(1-r^2)^3}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)t}{\left[(1-r)^2+4r\frac{t^2}{\pi^2}\right]^3}\,dt=$$

$$=\frac{r}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\cdot I_1+\frac{2r}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\cdot I_2. \qquad (19)$$

Если $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$, то из (19) непосредственно следует, что

$$\left\|\frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right\|_{L_q}\leqslant\frac{r}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\int_0^{\pi}16(2t+1)\,t\,dt+$$

$$+\frac{2r}{\pi}\,\omega(1-r)_{L_q}\int_0^{\pi}64(2t+1)\,t\,dt=C'r\cdot\omega(1-r)_{L_q}. \qquad (20)$$

Пусть теперь $\frac{1}{2}\leqslant r<1$. Тогда из (19) получаем:

$$I_1\leqslant\frac{4}{(1-r)^2}\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)t}{\left[1+\left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}\cdot\frac{t}{\pi}\right)^2\right]^2}\,dt\leqslant\left(\text{замена}\quad x=\frac{2\sqrt{r}}{1-r}\cdot\frac{t}{\pi}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^2\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{r}}x+1\right)x}{(1+x^2)^2}\,dx=C''. \qquad (21)$$

$$I_2 \leqslant \frac{8}{(1-r)^3} \int\limits_0^{\pi} \frac{\left(\frac{t}{1-r}+1\right)t}{\left[1+\left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}\cdot\frac{t}{\pi}\right)^2\right]^3}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{r}}\,x+1\right)x}{(1+x^2)^3}\,dx = C''' \cdot \frac{1}{1-r}. \qquad (22)$$

Объединяя оценки (20), (21) и (22) из (19), получим оценку (18).

Выражаю искренную благодарность профессору А. Ф. Тиману за постановку задач и руководство при их решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
2. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1952.
3. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, М., Физматгиз, 1959.
5. С. Каниев. — ДАН СССР, (1963).