ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.958:533.6

С.С. ТИТОВ

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИАЛГЕБРАХ. II

Данная работа является продолжением предыдущей публикации [1], в которой развит необходимый алгебраический формализм. Цель этой статьи — применение развитой теории к периодическим задачам Коши [2] для эволюционных систем, получение теорем существования, в том числе результатов типа теорем Нэша и Нишиды [3], [4] о существовании решения полной нелинейной системы Навье-Стокса [5].

В [1] изложен метод исследования — комбинаторно-алгебраический анализ в полиалгебрах — для соединения подходов Л.В. Овсянникова [6], Нишиды и Трева [7] в развитие работ А.Ф. Сидорова [2] и его школы. В этой части работы на основе уточнения метода получены новые теоремы существования периодических решений эволюционных систем, в том числе периодической по пространственным переменным задачи Коши для полной системы Навье–Стокса, описывающей движения сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = \mathcal{M}u + L_2[u,u] + L_3[u,u,u] + \dots \tag{1}$$

в пронильпотентной полиалгебре A [1] экспоненциальных рядов. Как приложение вышеизложенной теории рассмотрим ряды, специальным образом [8], [2] обобщающие ряды Фурье [9], [10] так, чтобы удобно было решать нелинейные задачи [2], [11]–[13].

Рассматривается уравнение вида (1) относительно $u(x,t) \in \mathbf{C}^m$, где $x \in R^n$, $t \in [0,+\infty)$, через $L_k[a_1,\dots,a_k]$ обозначены k-линейные отображения (нелинейности k-й степени), т. е. многочлены степени k от $a_1,\dots,a_k$ и их производных по $x_1,\dots,x_n$ порядка не выше $P > 1$ (с коэффициентами — аналитическими периодическими вектор-функциями пространственных аргументов, для простоты — константами из $\mathbf{C}^m$).

Построение периодического решения $u(x,t)$ по переменным $x_1,\dots,x_n$ в виде ряда [8], [2], который иногда называют нормальным рядом С.Н. Бернштейна [14]

$$u^j(x,t) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \sum_{\beta_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_n=0}^{\infty} g^j_{\alpha_1\dots\alpha_n\beta_1\dots\beta_n}(t)\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}\eta_1^{\beta_1}\cdots\eta_n^{\beta_n},$$

где $\xi_\nu = e^{ix_\nu}$, $\eta_\nu = e^{-ix_\nu}$ ($\nu = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$), приводит к рекуррентной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов этого ряда, если правая часть решаемой системы тождественно обращается в нуль при произвольных постоянных $u^j = c^j = u^j|_{\xi=\eta=0}$. Удобно использовать пронильпотентный идеал $A = J_1$ с заменой искомых функций $u \mapsto v$ сдвигом $v^j = u^j - c^j$. Переобозначив v снова через u, считаем, что $u^j|_{\xi=\eta=0} = 0$, а все константы c входят в коэффициенты уравнения (1).

Введем мультииндексы $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, тогда $N = |\alpha| + |\beta| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n$, и пространство J_N/J_{N+1} [1] есть прямая сумма всех m-мерных подпространств

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00370).

$V_{jN} = V_{\alpha\beta}$ с $|\alpha| + |\beta| = N$. Выписанная в теоремах предыдущей статьи [1] цепочка уравнений на коэффициенты ряда принимает вид

$$\frac{d}{dt} g_{\alpha,\beta}(t) = \mathcal{M}_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}(t) + F_{\alpha,\beta}(\ldots, g_{\alpha',\beta'}(t), \ldots), \tag{2}$$

где $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n} = (g^1_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \ldots, g^m_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n})^\perp$ — вектор искомых коэффициентов с мультииндексами $\alpha, \beta \in N_0^n$, причем $(\alpha', \beta') < (\alpha, \beta)$ относительно покомпонентной сравнимости; $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ — постоянная матрица, соответствующая линейному оператору $\mathcal{M}$ на пространстве $V_{jN} = V_{\alpha\beta}$; $F_{\alpha\beta}$ — остающаяся нелинейной неоднородность, зависящая в силу нильпотентности по доказанному выше только от $g_{\alpha',\beta'}(t)$ с $(\alpha', \beta') < (\alpha, \beta)$.

Применение оператора решения линейной системы позволяет провести сведение к задаче о неподвижной точке в полиалгебре, определяемой этими нелинейностями. Все необходимые для этого алгебраические свойства имеют место [1].

Введем на мультииндексах α, β ($|\alpha| + |\beta| > 0$) полунорму $s(\alpha, \beta)$ выражением

$$s(\alpha, \beta)^P = s^P = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^P,$$

где P — порядок решаемой системы.

Компоненты матрицы $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ — многочлены от $(\alpha_i - \beta_i)$ ($i = 1, \ldots, n$) степени не выше P (P — порядок правой части решаемого уравнения (1)) и, следовательно, $\|\mathcal{M}_{\alpha\beta}\| = O(s^P)$, где норма понимается в смысле максимума сумм модулей элементов столбцов (норма II, согласованная с "октаэдрической" векторной нормой — суммой модулей его компонент ([15], с. 409–411)), точнее, $\|\mathcal{M}_{\alpha\beta}\| \le \Theta_{\alpha\beta} D$ ($D > 0$), где $\Theta_{\alpha\beta} = 1 + s(\alpha, \beta)^P = 1 + s^P$. Абсолютная сходимость ряда для u^j с коэффициентами, умноженными на $\Theta_{\alpha\beta}$, гарантирует существование u^j и всех входящих в решаемое уравнение производных, т. к. ряд для $\frac{\partial}{\partial x_l} u^j$ получается из ряда для u^j умножением коэффициентов на $i(\alpha_l - \beta_l)$. Оценка нормы ряда с коэффициентами $\Theta_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$ и теоремы из [1] позволяют получить утверждения данной работы.

Итак, рассматриваются системы эволюционных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} u^j = F^j(u, \overset{1}{u}, \ldots, \overset{P}{u})$$

относительно $u(x, t) \in \mathbf{C}^m$, где $x \in R^n$, $t \in [0, +\infty)$ (так что $u = (u^1, \ldots, u^m)^\perp$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\perp$), правые части F^j которых — многочлены от неизвестных функций и их производных по $x_1, \ldots, x_n$ порядка не выше $P \ge 1$.

Пусть правая часть решаемой системы обращается в нуль при постоянных $u^j = c^j$. Сдвигая $v^j = u^j - c^j$, можно считать, что эти константы вошли в линейную часть $\mathcal{M}$ уравнения (1), так что $F^j(u, \overset{1}{u}, \ldots, \overset{P}{u}) = \mathcal{M}^j v + \widetilde{F}^j(v, \overset{1}{v}, \ldots, \overset{P}{v})$, где $\widetilde{F}^j$ не содержит линейных членов.

Предположим, следуя подходу [16], что для каждого j существуют такие числа P_j и Q_l ($j, l \in \{1, \ldots, m\}$), что для каждого l многочлены $\widetilde{F}^l$ представимы в виде суммы вида

$$\widetilde{F}^l = \sum_{m_1,\ldots,m_n} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} H^l_{m_1\ldots m_n},$$

где $0 \le m_1 + \cdots + m_n \le Q_l$, $0 \le P_j, Q_l \le P$, и в $H^l_{m_1\ldots m_n}$ входят неизвестные функции v^j и их производные порядков не выше $P_j \le P$.

Будем считать постоянные c^j нулевыми коэффициентами Фурье искомых функций u^j, разложенных по гармоникам $e^{ik_1x_1} \cdots e^{ik_nx_n}$ с коэффициентами $g^j_{k_1\ldots k_n}$ (так что $c^j = g^j_{0\ldots0}$); тогда указанной гармонике соответствует матрица $\mathcal{M}_{k_1\dots k_n}$ линеаризации системы (1) на этой гармонике; введем обозначения

$$s = s_{k_1\dots k_n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |k_i|^P\right)^{1/P}, \quad \Theta^j = \Theta^j_{k_1\dots k_n} = 1 + s^{P_j}.$$

Оператору умножения коэффициентов Фурье на $s = s_{k_1\dots k_n}$ при $P = 2$ можно придать смысл оператора $\sqrt{\Delta}$. Введем также нормы

$$\|v^j\|_j(t) = \sum_{|k_1|+\dots+|k_n|>0} \Theta^j_{k_1\dots k_n} g^j_{k_1\dots k_n}(t), \tag{3}$$

оценивающие величину производных v^j до P_j-го порядка.

Пусть $\mathcal{M} = 0$ при $s = 0$, а при $s \neq 0$ матрица $\mathcal{M}_{k_1\dots k_n}$ имеет **m** различных собственных векторов-столбцов, образующих матрицу T_0, причем элементы τ_{jl} и $\tau_{jl}^{(-1)}$ $(j, l \in \{1, \dots, m\})$ матриц T_0 и T_0^{-1} равномерно ограничены по $k_1 \dots k_n$; пусть соответствующие собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части при $s \neq 0$ и удовлетворяют условиям: $\lambda = 0$ при $s = 0$,

$$|\lambda_j^{-1}| \le c_j s^{-\alpha_j} \quad (\alpha_j \ge 0) \ \text{ при } \ s \neq 0, \ \ c_j = \text{const}\,.$$

Пусть начальные данные (при $t = 0$) аналитичны. Из теорем 1, 2 из [1] и оценок, полученных домножением (2) на $\Theta^j_{\alpha\beta}$, получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$|\tau_{jl}^{(-1)}| s^{P_l + Q_l} \le c_{jl} s^{\alpha_j}, \quad c_{jl} = \text{const}, \tag{4}$$

для всех таких $j, l \in \{1, \dots, m\}$, *что* $P_l + Q_l > 1$, *то при достаточно малых в начальный момент времени* $t = 0$ *нормах* (3) *решение* $u(x, t)$ *будет аналитичным при всех достаточно малых* $t \ge 0$.

Теорема 2. *Если неравенство* (4) *справедливо для всех* $j, l \in \{1, \dots, m\}$, *то при достаточно малых в начальный момент времени* $t = 0$ *нормах* (3) *решение* $u(x, t)$ *будет аналитичным при всех* $t \ge 0$, *причем* $v \to 0$ *при* $t \to +\infty$ (*т. е.* $u^j \to c^j$).

Отметим, что теорема 1 есть аналог теоремы Л.В. Овсянникова [6]. Рассматривая интерполяционный многочлен Лагранжа [15] для экспоненты матрицы [1], получаем

Следствие. Теорема 2 имеет место, если $P_j + Q_j = P$, $\alpha_j = P$, $|\lambda' - \lambda''|^{-1} \le c s^{-P}$ при $\lambda' \neq \lambda''$, $c = \text{const}$.

Пример. Пусть начальные данные φ для уравнения нелинейной теплопроводности

$$u_t = \Delta(u^2) + \omega(\nabla u)^2 \quad (\omega = \text{const}, \ \ \varphi = u|_{t=0})$$

имеют вид аналитического периодического по пространственным координатам (x, y, z) возмущения постоянного решения $u = 1$, ряд Фурье которых содержит только непостоянные гармоники. Тогда если норма этих возмущений достаточно мала (в смысле суммы модулей коэффициентов Фурье функции φ при $\omega = 0$ и в смысле суммы модулей коэффициентов Фурье функции $(1 + \Delta)\varphi$ при $\omega \neq 0$), то решение будет аналитической периодической функцией при всех $t > 0$, оно стремится к фоновому решению $u = 1$ при $t \to +\infty$ (применяем следствие теоремы 2 при $P_1 = 0$, $Q_1 = 2$, если $\omega = 0$, и $P_1 = 2$, $Q_1 = 0$, если $\omega \neq 0$) [17].

Система уравнений Навье-Стокса в случае термодинамически совершенного сжимаемого газа с уравнениями состояния $p = R\rho T$, $e = c_{v_0} T$, $(R, c_{v_0} = \text{const} > 0)$ содержит пять уравнений — уравнение неразрывности, уравнение энергии и три компоненты уравнения импульса [5], [18]. Вводя в этой системе вместо плотности ρ и температуры T другую термодинамическую пару параметров $\delta = 1/\rho$ — удельный обьем и давление $p = R\rho T$, R — универсальная газовая постоянная (газ считается термодинамически совершенным), приходим к эволюционной системе вида (1)

$$\delta_t = (u_x + v_y + w_z)\delta - u\delta_x - v\delta_y - w\delta_z;$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} uu_x + vu_y + wu_z \\ uv_x + vv_y + wv_z \\ uw_x + vw_y + ww_z \end{pmatrix} - \frac{1}{\gamma}\delta \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{(u_x + v_y + w_z)\delta}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} (\mu'_\delta - \frac{2}{3}\mu_\delta)\delta_x + (\mu'_p - \frac{2}{3}\mu_p)p_x \\ (\mu'_\delta - \frac{2}{3}\mu_\delta)\delta_y + (\mu'_p - \frac{2}{3}\mu_p)p_y \\ (\mu'_\delta - \frac{2}{3}\mu_\delta)\delta_z + (\mu'_p - \frac{2}{3}\mu_p)p_z \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\delta}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + u_x & u_z + w_x \\ u_y + v_x & 2v_y & v_z + w_y \\ u_z + w_x & v_z + w_y & 2w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_\delta\delta_x + \mu_p p_x \\ \mu_\delta\delta_y + \mu_p p_y \\ \mu_\delta\delta_z + \mu_p p_z \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\delta(\mu' + \frac{1}{3}\mu)}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} u_{xx} + v_{xy} + w_{xz} \\ u_{yx} + v_{yy} + w_{yz} \\ u_{zx} + v_{zy} + w_{zz} \end{pmatrix} + \frac{\delta\mu}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \\ w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} \end{pmatrix};$$

$$p_t + up_x + vp_y + wp_z + \gamma p(u_x + v_y + w_z) = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\Pr \mathrm{Re}\, R}\{\kappa[(\delta p)_{xx} + (\delta p)_{yy} + (\delta p)_{zz}] +$$

$$+\kappa_\delta[\delta_x(\delta p)_x + \delta_y(\delta p)_y + \delta_z(\delta p)_z] + \kappa_p[p_x(\delta p)_x + p_y(\delta p)_y + p_z(\delta p)_z]\} + \frac{\gamma(\gamma - 1)^2}{\mathrm{Re}\, R}\{\mu'(u_x + v_y + w_z)^2 +$$

$$+\tfrac{2}{3}\mu[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \mu[(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2]\},$$

где γ — показатель адиабаты газа, $\Pr$ — число Прандтля, Re — число Рейнольдса, t — время, x, y, z — пространственные координаты, u, v, w — компоненты вектора скорости, $\kappa = \kappa(\delta, p)$ — коэффициент теплопроводности, $\mu = \mu(\delta, p)$, $\mu' = \mu'(\delta, p)$ — первый и второй коэффициенты вязкости, безразмерное число Маха M считаем равным единице. Если κ, μ', μ — многочлены от δ, p (напр., многочлены от температуры T), то выписанная система есть система эволюционных уравнений с полиномиальными нелинейностями. В этой системе уравнений квадратичные члены такие же, как и в уравнениях газовой динамики [19]; учет вязкости и теплопроводности добавляет лишь члены с высшими нелинейностями. Таким образом, система Навье–Стокса в переменных δ, p, $\vec{v}$ относится к уравнениям рассмотренного в [1] вида — как дифференциальное уравнение в полиалгебре [1]

$$\Psi_t = L_2(\Psi, \Psi) + L_3(\Psi, \Psi, \Psi) + \cdots,$$

где $\Psi = (\delta,\, p,\, u,\, v,\, w)^\perp$ — вектор искомых функций. Вектор $\Psi_0 = (1,\, 1,\, U,\, 0,\, 0)^\perp$ является аннулятором правой части этого уравнения, т.е. стационарным его решением. В полиалгебре с базисом векторов вида

$$e^{i(k_1x + l_1y + m_1z)}e^{-i(k_2x + l_2y + m_2z)},$$

$m = (k_1, l_1, m_1)$, $n = (k_2, l_2, m_2)$ ($k_i, l_i, m_i \in \mathbf{N}_0$), это основное течение Ψ_0 есть минимальный элемент градуированной полиалгебры, в которой коэффициенты решения находятся из рекуррентной цепочки линейных систем пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Поставим для этой системы задачу Коши, считая начальные данные $\delta|_{t=0}$, $p|_{t=0}$, $u|_{t=0}$, $v|_{t=0}$, $w|_{t=0}$ аналитическими функциями периода 2π, разложенными в ряд Фурье со свободными членами соответственно $\delta_0 = 1$, $p_0 = 1$, $u_0 = U$, $v_0 = V$, $w_0 = W$.

Пусть $\mathcal{M}_{klm}$ — матрица линеаризации уравнений Навье–Стокса на этом фоновом решении, отвечающая гармоникам $e^{ikx}e^{ily}e^{imz}$. Вычисляя характеристические числа, выясняем, что эта система всегда устойчива, т. е. собственные числа матрицы $\mathcal{M}_{klm}$ имеют отрицательные действительные части (см. также [20]). Более того, при $s \to \infty$ получаем в общем случае следующие асимптотики для корней характеристического уравнения: одно (скажем, первое) собственное число $\lambda_1 = O(1) + i(Uk + Vl + Wm)$, остальные $\lambda = O(s^2)$. Следовательно, $\alpha_2 = \dots = \alpha_5 = 2$, и в общем случае $\alpha_1 = 0$. Из вида системы ясно, что можно взять $P_1 = 1$, $Q_1 = 0$ (для удельного объема δ), $P_2 = 1 = Q_1$ (для давления p) и $P_3 = P_4 = P_5 = 2$, $Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0$ для компонент вектора скорости. Находя собственные векторы, получим ограниченные при $s \to \infty$ матрицы T_0, T_0^{-1} преобразований $\mathcal{M}_{klm}$ к диагональному виду: $-\mathcal{M}_{klm} - (Uk + Vl + Wm)iE = A_{klm}$,

$$A_{klm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ik & -il & -im \\ \beta s^2 & \beta s^2 & \gamma ik & \gamma il & \gamma im \\ 0 & \frac{1}{\gamma M^2} ik & \xi k^2 + \xi s^2 & \xi kl & \xi km \\ 0 & \frac{1}{\gamma M^2} il & \xi kl & \xi l^2 + \xi s^2 & \xi lm \\ 0 & \frac{1}{\gamma M^2} im & \xi km & \xi lm & \xi m^2 + \xi s^2 \end{pmatrix},$$

где $k = k_1 - k_2$, $l = l_1 - l_2$, $m = m_1 - m_2$, $s^2 = k^2 + l^2 + m^2$, $i^2 = -1$, γ, $M = 1$ — константы, введенные выше, $\mu' = 0$,

$$\beta = \frac{\gamma(\gamma - 1)\kappa(\delta_0, p_0)}{\Pr \operatorname{Re} R}, \quad \xi = \frac{1}{3}\frac{\mu(\delta_0, p_0)}{\operatorname{Re} R}, \quad \delta_0 = 1, \ \ p_0 = 1,$$

E — единичная матрица размером 5×5; ясно, что

$$\exp \mathcal{M}_{klm} t = e^{-(Uk+Vl+Wm)it} \exp A_{klm} t. \tag{5}$$

Обозначая через λ характеристические (собственные) числа матрицы A_{klm}, получим для них характеристическое (вековое) уравнение

$$\chi(\lambda) := (\lambda + 3\xi s^2)^2 \left[\lambda^3 + (\beta + \xi)s^2\lambda^2 + \left(4\beta\xi s^2 + \frac{1}{M^2}\right)s^2\lambda + \frac{\beta}{\gamma M^2}s^4\right] = 0. \tag{6}$$

Обозначим $\lambda_* = -3\xi s^2$ — двукратный корень. При $s \to \infty$ получаем в общем случае (т. е. при $\gamma \neq 1, \gamma \neq \infty$ и $\beta \neq 4\gamma\xi$) три асимптотики для корней уравнения (6), отличных от λ_*: при $s \to \infty$ либо $\lambda/s^2 = -\beta + O(1/s^2)$, либо $\lambda/s^2 = -4\xi + O(1/s^2)$, либо $\lambda/s^2 = +O(1/s^2)$. В последнем случае имеем

$$\lambda = -\frac{1}{4\gamma\xi M^2} + O(1/s^2)$$

при $s^2 \to \infty$. Фиксируя три корня λ_1, λ_2, λ_3 уравнения (6), кроме $\lambda_* = -3\xi s^2$, скажем, $\lambda_1 = \lambda_0(s)$, $\lambda_2 = \lambda_+(s)$, $\lambda_3 = \lambda_-(s)$, в случае общего положения найдем пять собственных векторов матрицы A_{klm}. Так, при $k \neq 0$ матрицей собственных векторов-столбцов, отвечающих собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3, λ_*, λ_*, будет матрица

$$T = \begin{pmatrix} \frac{is^2}{\lambda_1} & \frac{is^2}{\lambda_2} & \frac{is^2}{\lambda_3} & 0 & 0 \\ F(\lambda_1 + 4\xi s^2) & F(\lambda_2 + 4\xi s^2) & F(\lambda_3 + 4\xi s^2) & 0 & 0 \\ k & k & k & l & m \\ l & l & l & -k & 0 \\ m & m & m & 0 & -k \end{pmatrix}$$

(где $F = i\gamma M^2$) с определителем

$$\det T = -\gamma M^2 k s^4 \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = O(s^7).$$

Первые два столбца матрицы $(\det T)T^{-1}$ равны

$$\begin{bmatrix} i\gamma M^2 ks^2(\lambda_2-\lambda_3) \\ -i\gamma M^2 ks^2(\lambda_1-\lambda_3) \\ i\gamma M^2 ks^2(\lambda_1-\lambda_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} iks^4\frac{(\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3} \\ iks^4\frac{(\lambda_1-\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_3} \\ iks^4\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а последние три ее столбца —

$$\begin{bmatrix} \gamma M^2 k^2 s^2\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_2\lambda_3} \\ -\gamma M^2 k^2 s^2\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_3} \\ \gamma M^2 k^2 s^2\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{l}{s^2}\det T \\ \frac{m}{s^2}\det T \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \gamma M^2 kls^2\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_2\lambda_3} \\ -\gamma M^2 kls^2\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_3} \\ \gamma M^2 kls^2\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_2} \\ -\frac{k^2+m^2}{ks^2}\det T \\ \frac{lm}{ks^2}\det T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma M^2 kms^2\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_2\lambda_3} \\ -\gamma M^2 kms^2\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_3} \\ \gamma M^2 kms^2\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+4\xi s^2)}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{lm}{ks^2}\det T \\ -\frac{k^2+l^2}{ks^2}\det T \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\overline{\psi}(t)$ результат применения оператора $\exp A_{klm}(t)$ к вектору $\psi = \text{const} = (\delta, p, u, v, w)^{\perp}$, так что $\overline{\psi}(t) = \overline{\psi} = (\overline{\delta}, \overline{p}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w})^{\perp}$, $\overline{\psi} = T\,\text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_* t}\}T^{-1}\psi$. Компоненты вектора $\overline{\psi}$ выписываются в явном виде. Если вектор $F_{\text{ind}} = (D_{\text{ind}}, P_{\text{ind}}, U_{\text{ind}}, V_{\text{ind}}, W_{\text{ind}})^{\perp}$ уже известен, то решением уравнения $\dot{\psi}$ является вектор

$$\psi_{\text{ind}}(t) = T\,\text{diag}\{e^{-Uikt}e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_* t}\}T^{-1}\psi_{\text{ind}}(0) + \\ + \int_0^t T\,\text{diag}\{e^{(\lambda_1 - Uik)(\tau - t)}, \ldots, e^{(\lambda_* - Uik)(\tau - t)}\}T^{-1}F_{\text{ind}}(\tau)d\tau.$$

Не будем приводить явный вид формул для коэффициентов ввиду их громоздкости. Домножая столбцы выписанной матрицы T на s^{-2}, s^{-1}, s^{-2}, s^{-1}, s^{-1} и строки матрицы T^{-1} — на обратные величины, получим ограниченные при $s \to \infty$ матрицы преобразований T_0, T_0^{-1}.

Так как первая строка матрицы T_0^{-1} имеет вид

$$(O(1), O(s^{-2}), O(s^{-1}), O(s^{-1}), O(s^{-1})) \quad (s \to \infty), \tag{7}$$

а уравнение неразрывности не содержит вторых производных, т. е. соответствующим вектором [1] является

$$(O(s), O(s^2), O(s^2), O(s^2), O(s^2))^{\perp} \quad (s \to \infty),$$

причем собственные числа не обращаются в нуль при $s \neq 0$, а в уравнения Навье-Стокса явно не входят пространственные переменные x, y, z, то имеет место [1] теорема 1, т. е. справедлива

Теорема 3. *Пусть начальные данные для полной системы Навье–Стокса имеют вид аналитического периодического по пространственным координатам (x, y, z) возмущения постоянного потока $\rho = 1$, $p = 1$, $\vec{v} = (U, V, W)^{\perp} = \text{const}$, ряды Фурье которого содержат только непостоянные гармоники. Тогда если норма этого возмущения достаточно мала в смысле суммы модулей коэффициентов Фурье функций*

$$\begin{gathered} \delta - 1 + (1+\sqrt{\Delta})\delta, \quad p - 1 + (1+\sqrt{\Delta})p, \\ \vec{v} - (U, V, W)^{\perp} + (1+\Delta)\vec{v}, \end{gathered} \tag{8}$$

то решение будет аналитической периодической вектор-функцией при малых $t > 0$.

Усиление этого утверждения путем применения теоремы 2 возможно ввиду (5), (7), если значение α_1 возрастает до единицы либо, если неограниченные члены обращаются в нуль в силу некоторой дифференциальной связи [21], например, а) в одномерном случае ($v = w = 0$) при $U \neq 0$ или б) в несжимаемом случае при $\rho \equiv 1$.

В этих предположениях справедлива

Теорема 4. *Пусть выполняется условие* а) *или условие* б)*. Тогда если норма* (8) *начальных данных достаточно мала, то решение полной системы Навье–Стокса будет аналитической периодической вектор-функцией при всех $t > 0$, равномерно стремящейся к фоновому постоянному потоку при $t \to +\infty$.*

Автор благодарит Л.В. Овсянникова, А.Ф. Сидорова и В.В. Васина за внимание к работе, В.А. Галкина и А. Сакураи за полезные обсуждения, а также С.П. Баутина, Л.Г. Корзунина и М.Ю. Филимонова за поддержку.

Литература

1. Титов С.С. *Решение нелинейных уравнений в аналитических полиалгебрах.* I // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 1. – С. 66-77.
2. Sidorov A.F., Korzunin L.G., Filimonov M.Yu. *Approximate method for solving nonlinear initial boundary problems based on special construction of series* // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1993. – V. 8. – № 2. – P. 101–126.
3. Nishida T., Kawashima S., Matsumura A. *On the fluid-dynamical approximation to the Boltzman equation at the level of the Navier–Stokes equation* // Comm. Math. Phys. – 1979. – V. 70. – № 2. – P. 97–124.
4. Nishida T., Matsumura A. *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases* // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – V. 20. – № 1. – P. 67–104.
5. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* – М.: Наука, 1970. – 904 с.
6. Овсянников Л.В. *Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200. – № 4. – С. 789–792.
7. Treves F. *An abstract nonlinear Cauchy–Kovalewska theorem* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 150. – № 1. – P. 77–92.
8. Титов С.С. *Решение периодических задач Коши с помощью специальных тригонометрических рядов* // Числен. методы механ. сплошн. среды. – Новосибирск, 1978. – Т. 9. – № 2. – С. 112–124.
9. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* – М.: Мир, 1965. – 615 с.
10. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
11. Баутин С.П. *Об одном классе решений системы Навье–Стокса, периодических по пространственным переменным* // Моделир. в механ. – Новосибирск, 1987. – Т. 1. – № 1. – С. 3–15.
12. Баутин С.П. *Аналитическое построение течений вязкого газа с помощью последовательности линеаризованных систем Навье–Стокса* // ПММ. – 1988. – Т. 52. – Вып. 4. – С. 579–589.
13. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* – М.: Наука, 1989. – 336 с.
14. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. *Применение полиномов Бернштейна для приближенного решения задачи естественной конвекции в горизонтальном слое* // Прибл. методы решения краев. задач механ. сплошн. среды. – Свердловск, 1985. – С. 52–63.
15. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 575 с.
16. Галкин В.А. *Функциональные решения законов сохранения* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310. – № 4. – С. 834–839.

17. Титов С.С. *Об эволюции периодической тепловой волны* // Международн. школа-семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов жидкости и газа САМГОП-94". – Арзамас-16, 1994. – С. 107–108.
18. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
19. Титов С.С. *Метод ассоциативных колец для решения уравнений математической физики* // Точные и прибл. методы решения задач механ. сплошн. среды. – Свердловск, 1982. – С. 93–96.
20. Шатов А.К. *О задаче Коши для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса с учетом сжимаемости* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 285. – № 6. – С. 1374–1376.
21. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его применение в газовой динамике.* – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

Уральская архитектурно-
художественная академия

Поступила
05.08.1998