ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.958

И.К. РАХИМОВ

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОДОРСЕНА

Работа посвящена точным и приближенным методам решения сингулярного интегрального уравнения (с.и.у.) Теодорсена вида

$$(K\varphi)(s) \equiv \varphi(s) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi(\sigma))\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = y(s), \tag{1}$$

где λ — числовой параметр; $\rho(s), y(s)$ — известные 2π-периодические функции, а $\varphi(s)$ — искомая функция, и сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу (см., напр., [1]–[5]); это уравнение имеет приложения (см., напр., [4]–[8]). Здесь в отличие от работы [4] (см. в ней обзор других результатов) устанавливаются эффективные достаточные условия существования и единственности решения уравнения (1) и на их основе с помощью теории монотонных операторов [9], [10] строятся и обосновываются приближенные методы.

Функцию $\varphi(s)$ будем искать в вещественном пространстве 2π-периодических квадратично-суммируемых функций $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\psi(s)ds, \quad \|\varphi\| \equiv \|\varphi\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(s)|^2 ds\right\}^{1/2} \quad (\varphi,\psi \in L_2).$$

Тогда с.и.у. (1) можно рассматривать как операторное уравнение

$$K\varphi \equiv \varphi + \lambda IB\varphi = y \quad (\varphi, y \in L_2),$$
$$I\varphi \equiv I(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma, \quad B\varphi \equiv \ln\rho(\varphi(s)).$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(s)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, $|\rho'(s)/\rho(s)| \le q$ и выполняется $m_1 = 1 + \varepsilon > 0$, где $\varepsilon = \{\lambda\Gamma$ при $(I(\ln\rho(\varphi) - \ln\rho(\psi)), \varphi - \psi) \ge \Gamma\|\varphi - \psi\|^2$, $\Gamma \in \mathbb{R}$ и $\lambda > 0$; 0 при $(I(\ln\rho(\varphi) - \ln\rho(\psi)), \varphi - \psi) = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$; $-|\lambda|q$ в противном случае$\}$ $\forall\varphi,\psi \in L_2$. Тогда уравнение* (1) *при любой правой части $y(s) \in L_2$ имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\rho(s)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$M \ge \rho'(s)/\rho(s) \ge m > 0 \quad \forall s.$$

Тогда уравнение (1) *при любой правой части $y(s) \in L_2$ имеет единственное решение.*

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение $\varphi \in L_2$ уравнения* (1) *можно найти как предел в L_2 итерационной последовательности*

$$\varphi^j = \varphi^{j-1} - \tau(K\varphi^{j-1} - y), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

при любом начальном приближении $\varphi^0 \in L_2$. При этом погрешность j-го приближения может быть оценена неравенствами

$$\|\varphi - \varphi^j\| \le \alpha^j \|\varphi - \varphi^0\| \le (1-\alpha)^{-1}\alpha^j\|\varphi^1 - \varphi^0\|, \quad j = 1,2,\dots ;$$
$$\|\varphi - \varphi^j\| \le \tau\alpha^j(1-\alpha)^{-1}\|K\varphi^0 - y\|, \quad j = 1,2,\dots,$$

если $\varphi^0 = y$, то

$$\|\varphi - \varphi^j\| \le (1-\alpha)^{-1}\alpha^j\tau|\lambda|\,\|By\|, \quad j = 1,2,\dots,$$

где $\alpha = \alpha(\tau) = (1 - 2\tau m_1 + \tau^2 M_1^2)^{1/2} < 1$ при $\tau \in (0; 2m_1M_1^{-2})$ и $M_1 = 1 + |\lambda|q$.

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 единственное решение $\varphi \in L_2$ уравнения (1) можно найти как предел в L_2 итерационной последовательности*

$$\varphi^j = B^{-1}u^j, \quad u^j = u^{j-1} - \tau(Au^{j-1} - y), \quad Au \equiv B^{-1}u + \lambda Iu, \quad j = 1,2,\dots,$$

при любом начальном приближении $u^0 \in L_2$. При этом погрешность j-го приближения может быть оценена неравенствами

$$\|\varphi - \varphi^j\| \le m^{-1}\|u - u^j\| \le m^{-1}\alpha^j\|u - u^0\| \le m^{-1}(1-\alpha)^{-1}\alpha^j\|u^1 - u^0\|, \quad j = 1,2,\dots ;$$
$$\|\varphi - \varphi^j\| \le m^{-1}\|u - u^j\| \le m^{-1}\alpha^j(1-\alpha)^{-1}\|Au^0 - y\|, \quad j = 1,2,\dots,$$

где $\alpha = \alpha(\tau) = (1 - 2\tau m_2 + \tau^2 M_2^2)^{1/2} < 1$ при $\tau \in (0; 2m_2M_2^{-2})$ и $m_2 = mM^{-2}$, $M_2 = m^{-1} + |\lambda|$.

Рассмотрим общий проекционный метод решения уравнения (1). Возьмем полную ортонормальную систему функций $\{e_j(s)\}_1^\infty$ в L_2; в силу сепарабельности $L_2(0, 2\pi)$ такая система всегда существует. Обозначим через $X_n = \mathfrak{L}(\{e_j(s)\}_1^n)$ линейную оболочку, натянутую на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов этой системы. В том случае, когда каждая функция $e_j = e_{j,n}$, $j = \overline{1,n}$, т. е. зависит от $n \in \mathbb{N}$ (напр., для сплайновых базисов), считаем, что последовательность подпространств $\{X_n\}$ предельно плотна в пространстве L_2. Через P_n обозначим линейный оператор ортогонального проектирования L_2 на X_n. Тогда уравнение (1) можно (см., напр., [11]–[18]) аппроксимировать конечномерным уравнением

$$K_n\varphi_n \equiv P_nK\varphi_n = P_ny \quad (\varphi_n, P_ny \in X_n), \tag{3}$$

которое эквивалентно системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$(K\varphi_n - y,\, e_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

а функция

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

принимается за приближенное решение уравнения (1), где коэффициенты $\alpha_k = \alpha_{k,n}$, $k = \overline{1,n}$, — решение СНАУ (4).

Теорема 5. *В условиях теорем 1 или 2 СНАУ (4) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$. Приближенные решения (5) сходятся в L_2 к точному решению $\varphi(s)$ уравнения (1), причем для погрешности справедлива оценка*

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \mathbb{O}(E_n(\varphi)), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n(\varphi)$ — наилучшее приближение в L_2 функции $\varphi \in L_2$ всевозможными элементами из X_n.

Рассмотрим некоторые частные случаи общего проекционного метода (3)–(5).

Метод Галёркина. Здесь $P_n = \mathbb{F}_n$ — оператор Фурье по тригонометрической системе функций, и метод (3)–(5) представляет собой метод Галёркина (редукции) решения уравнения (1) по тригонометрической системе функций. Тогда сходимость и оценки погрешности этого метода для с.и.у. (1) следуют из теоремы 5.

Метод сплайн-подобластей. Пусть на $[0, 2\pi]$ заданы узлы

$$s_k = 2k\pi/n, \quad k = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а характеристические функции интервалов $(s_{k-1}, s_k]$ имеют вид $\chi_k(s) = \{1$ при $s \in (s_{k-1}, s_k]$; 0 при $s \notin (s_{k-1}, s_k]\}$, $k = \overline{1, n}$, и $P_n = \overline{S}_n^0$ — оператор подобластей. Положим

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_k(s), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\overline{S}_n^0(f; s) = \sum_{k=1}^{n} f_k \chi_k(s), \quad f_k = \frac{1}{s_k - s_{k-1}} \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(\sigma) d\sigma,$$

в силу чего общий проекционный метод (3)–(5) переходит в метод сплайн-подобластей нулевого порядка решения уравнения (1). Обоснование этого метода также следует из теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть начальное приближение $\varphi^0 \in L_2$ в итерационном методе* (2) *берется как приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ (см.* (5)) *уравнения* (1), *построенного проекционным методом* (3)–(4). *Тогда погрешность k-го приближения $\varphi - \varphi^k$ оценивается как*

$$\|\varphi - \varphi^k\| \le \alpha^k m_1^{-1} M_1 E_n(\varphi), \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Теперь решение (5) уравнения (3) будем искать итерационным методом вида

$$\varphi_n^j = \varphi_n^{j-1} - \tau(P_n K \varphi_n^{j-1} - P_n y), \tag{6}$$

где $j, n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^0(s)$ — произвольное начальное приближение из X_n.

Теорема 7. *В условиях теоремы* 3 *решение $\varphi_n \in X_n$ уравнения* (3) *можно найти как предел в L_2 итерационной последовательности* (6), *которая сходится со скоростью*

$$\|\varphi_n - \varphi_n^j\| \le \tau \alpha^j (1 - \alpha)^{-1} \|K\varphi_n^0 - y\|.$$

Теорема 8. *В условиях теоремы* 3 *единственное решение $\varphi \in L_2$ уравнения* (1) *можно найти как предел $\varphi(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_n^j(s)$ в L_2 проекционно-итеративной последовательности* (6). *При этом для любых n и $j \in \mathbb{N}$ и $\varphi_n^0 \in X_n$ справедливы оценки*

$$\|\varphi - \varphi_n^j\| \le m_1^{-1} M_1 E_n(\varphi) + \tau \alpha^j (1 - \alpha)^{-1} \|K\varphi_n^0 - f\|.$$

Отметим, что если выбрать в указанных оценках номер итерации $j \in \mathbb{N}$ (параметр дискретизации $n \in \mathbb{N}$) как функцию от n (соответственно от j), погрешность проекционно-итеративного метода (6) может быть в определенном смысле ([12], гл. 2, § 7) минимизирована.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
3. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integral-operatoren.* – Berlin: Akademie-Verlag, 1980. – 515 S.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.* – М.: Наука, 1985. – 256 с.
5. Лифанов И.К., Тартышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения* // Вычисл. процессы и системы. – М.: Наука, 1990. – Вып. 7. – С. 94–278.

6. Gaier D. *Numerical methods in conformal mappings* // Comput. Aspects Complex Anal. Proc. NATO Adv. Study Inst., Braunlage, Harz, July 26 – Aug. 6, 1982. – 1983. – P. 51–78.
7. Мохамед Х.С. *Обоснование метода квадратур и метода Ньютона–Канторовича для нелинейных сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Баку, 1985. – 107 с.
8. Мусаев Б.И. *Конструктивные методы в теории сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Тбилиси, 1989. – 339 с.
9. Гаевский Х., Грегёр К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
10. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
11. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
12. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
13. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
14. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
15. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 400–409.
16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
17. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
18. Рахимов И.К. *Прямые методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1998. – 150 с.

Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступила
05.10.2001