ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.854.2

А.Б. ЗИНЧЕНКО

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НЕКОТОРЫХ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ

1. *Постановка задачи.* Имеется $n \geq 2$ независимых работ, для выполнения которых требуется $m \geq 1$ типов ресурсов. Интенсивности выделения ресурсов постоянны во времени и ограничены величинами $\beta_j > 0$, $j \in M = \{1, \dots, m\}$. Интенсивности потребления ресурсов работами также постоянны. Известны длительности $a_i > 0$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, выполнения работ и ресурсные потребности $0 \leq b_{ij} \leq \beta_j$, $i \in N$, $j \in M$. Требуется составить расписание без прерываний, по возможности минимизирующее время завершения всех работ, а также необходимое количество каждого ресурса. Рассматриваемая задача является NP-трудной, т. к. известная NP-полная проблема упаковки в контейнеры ([1], с. 20) является частным случаем более простой (однoресурсной и однокритериальной) задачи, описанной в [2].

Пусть t_i — момент завершения работы i. Введем инъективное отображение I, сопоставляющее каждому расписанию $t \in T_1 = \{t \in R^n : t \geq a\}$ систему $\{I_1(t), \dots, I_n(t)\}$ открытых интервалов $I_i(t) = (t_i - a_i, t_i)$, $i \in N$, вещественной оси. Определим множество подмножеств индексов пересекающихся интервалов $\xi(I(t)) = (\bigcup\limits_{i \in N} \{i\}) \bigcup \{e \in 2^N : |e| \geq 2, \bigcap\limits_{i \in e} I_i(t) \neq \emptyset\}$.

Выразив длину расписания t и общие ресурсные потребности работ при расписании t в виде функций

$$f_0(t) = \max_{i \in N} t_i; \quad f_j(t) = \max_{e \in \xi(I(t))} v_j(e), \quad j \in M,$$

где $v_j(e) = \sum\limits_{i \in e} b_{ij}$, $j \in M$; $e \in 2^n \setminus \emptyset$, получаем невыпуклую векторную задачу

$$f(t) = (f_0(t), \dots, f_m(t)) \to \min, \quad t \in T_2 = \{t \in T_1 : f_j(t) \leq \beta_j, \ j \in M\}, \tag{1}$$

которая может иметь бесконечное множество эффективных (оптимальных по Парето) решений $\mathbf{P}_T$. Множество эффективных оценок $\mathbf{P}_f$ задачи (1), как показано ниже, всегда конечно.

2. *Сведе́ние к траекторной задаче.* Пусть $U = \{(i,j) : i,j \in N, \ i < j\}$, а G — биекция из 2^U на множество простых n-вершинных неориентированных графов (N, E), $E \in 2^U$. Рассмотрим отображение Ψ, которое каждой системе интервалов $I(t)$ соотносит множество пар индексов пересекающихся интервалов, т. е. $\Psi(I(t)) = \{(i,j) \in U : I_i(t) \cap I_j(t) \neq \emptyset\}$. Тогда $G \circ \Psi \circ I$ сюръективно отображает множество расписаний T_1 на множество n-вершинных графов, представимых интервалами, длины которых равны длительностям выполнения работ. Обозначим $\Omega_0 = \{E \in 2^U : G(E)$ — граф интервалов$\}$, $\Omega_1 = \Psi(I(T_1)) \subseteq \Omega_0$. Представив $T(E) = (\Psi \circ I)^{-1}(E)$ в виде $T(E) = X(E) \cap Y(E)$, где

$$X(E) = \{t \in T_1 : I_i(t) \cap I_j(t) = \emptyset, \ (i,j) \in U \setminus E\}, \quad Y(E) = \{t \in R^n : I_i(t) \cap I_j(t) \neq \emptyset, \ \ (i,j) \in E\},$$

получим разбиение множества расписаний $T_1 = \bigcup\limits_{E \in \Omega_1} T(E)$.

Обозначим через $K(E)$ $(H(E))$ семейство кликовых (независимых) множеств графа $G(E)$. Будем рассматривать вершинно-взвешенные графы, т. е. графы, i-й вершине которых приписаны числа $(a_i, b_{i1}, \dots, b_{im})$. На множестве 2^U зададим функции

$$F_0(E) = \max_{e \in H(E)} v_0(e), \quad F_j(E) = \max_{e \in K(E)} v_j(e), \quad j \in M,$$

где $v_0(e) = \sum\limits_{i \in e} a_i$, $e \in 2^N \setminus \emptyset$. Функция F_0 (F_j, $j \neq 0$) антитонна (изотонна) на $(2^U, \subseteq)$, т. е. $E^1 \subseteq E^2 \Rightarrow F_0(E^1) \geq F_0(E^2)$; $F_j(E^1) \leq F_j(E^2)$, $j \in M$. Для любого $E \in \Omega_0$ значения $F_0(E)$ и $F_j(E)$, $j \in M$, полиномиально вычисляемы [3], [4].

Очевидно, для любых $E \in \Omega_1$, $t \in T(E)$ справедливы равенства $f_j(t) = F_j(E)$, $j \in M$, из которых следует разложение множества допустимых расписаний $T_2 = \bigcup\limits_{E \in \Omega_1 \cap \Omega_2} T(E)$, где $\Omega_2 = \{E \in 2^U : F_j(E) \leq \beta_j,\ j \in M\}$.

Так как функции f_j, $j \in M$, постоянны на множестве $T(E)$, то парето-оптимальными могут быть только точки минимума функции f_0 на $T(E)$.

Пусть $E \in \Omega_1$ и $t \in T(E)$, тогда для любого $h(E) \in H(E)$ интервалы $I_j(t)$, $j \in h(E)$, попарно не пересекаются. Следовательно, $f_0(t) \geq F_0(E)$, т. е. верхняя оценка функции f_0 на $T(E)$ определяется независимым множеством максимального веса графа $G(E)$.

Для описания структуры множества Парето $\mathbf{P}_T$ задачи (1) введем вспомогательную дискретную задачу:

$$F(E) = (F_0(E), \ldots, F_m(E)) \to \min, \quad E \in \Omega_3 = \{E \in \Omega_1 \cap \Omega_2 : T^*(E) \neq \emptyset\}, \tag{2}$$

где $T^*(E) = \{t \in T(E) : f_0(t) = F_0(E)\}$.

Теорема 1. *Справедливо разложение*

$$\mathbf{P}_T = \bigcup_{E \in P_\Omega} T^*(E), \tag{3}$$

где $\mathbf{P}_\Omega$ *— множество Парето задачи* (2).

Следствие 1. Задача (1) сводима к задаче (2).

Следствие 2. Если $Q_1, \ldots, Q_q$ — классы эквивалентности множества $\mathbf{P}_\Omega$ относительно критерия F, то $\bigcup\limits_{E \in Q_1} T^*(E), \ldots, \bigcup\limits_{E \in Q_q} T^*(E)$ — классы эквивалентности множества $\mathbf{P}_T$ относительно критерия f.

Следствие 3. Справедлива достижимая оценка $|\mathbf{P}_f| \leq 2^{n(n-1)/2}$, где $\mathbf{P}_f = \{f(t) : t \in \mathbf{P}_T\}$.

3. *Нахождение эффективных решений.* Задача (2) относится к классу траекторных [5]. Траекториями являются множества ребер n-вершинных, $(m+1)$-взвешенных интервальных графов, обладающих определенными свойствами. Множество траекторий есть нижняя подполурешетка булевой решетки $(2^U, \subseteq)$. Частные критерии монотонны и имеют тип MINMAXSUM.

Эффективные траектории можно выделить комбинаторными алгоритмами, краткий обзор которых дан в ([6], с. 186). Эти алгоритмы основаны на погружении допустимой области в множество простой структуры и требуют описания процедур, проверяющих допустимость точки (g-оракул) и вычисляющих значение критерия (F-оракул). Поскольку задача (2) имеет критериальные ограничения, то g-оракул одновременно является и F-оракулом. Назовем его F, g-оракулом.

Алгоритм 1 (F, g-оракул задачи (2))

1. Дано $E \in 2^U$. Если $T(E) = \emptyset$, то $E \notin \Omega_3$; перейти на п. 5.
2. Вычислить $F_0(E)$. Если $T^*(E) = \emptyset$, то $E \notin \Omega_3$; перейти на п. 5.
3. Проверить условия $F_j(E) \leq \beta_j$, $j \in M$. Если хоть одно из них не выполняется, то $E \notin \Omega_3$; перейти на п. 5.
4. Получили $E \in \Omega_3$.
5. Конец.

Временна́я сложность алгоритма определяется трудоемкостью проверки условия $T^*(E) = \emptyset$. Множество $T^*(E)$ задается системой, включающей дизъюнктивные неравенства, определяющие $X(E)$, строгие линейные неравенства, определяющие $Y(E)$, и уравнение $f_0(t) = F_0(E)$. Эффективные алгоритмы решения систем такого типа не известны [7].

Задача несколько упрощается, если находить не все множество $\mathbf{P}_T$, а только полное множество альтернатив $\mathbf{P}_T^0$.

Пусть $(N, \overline{U \setminus E})$ — орграф, полученный из графа $(N, U \setminus E)$, обратного к интервальному, с помощью некоторой транзитивной ориентации. Обозначим через $t(E)$ расписание, определенное соотношениями

$$t_i(E) = \max_{e \in L_i(\overline{U \setminus E})} v_0(e), \quad i \in N,$$

где $L_i(\overline{U \setminus E})$ — множество путей орграфа $(N, \overline{U \setminus E})$, для которых вершина i является конечной. Пути заданы списками вершин (для вершин с нулевой полустепенью захода $L_i(\overline{U \setminus E}) = \{i\}$).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{P}_\Omega^0 = \{E^1, \ldots, E^p\}$ *— полное множество альтернатив задачи*

$$F(E) = (F_0(E), \ldots, F_m(E)) \to \min, \quad E \in \Omega_4 = \Omega_0 \cap \Omega_2. \tag{4}$$

Тогда $\mathbf{P}_T^0 = \{t(E^1), \ldots, t(E^p)\}$.

Алгоритм 2 (F, g-оракул задачи (4))

1. Дано $E \in 2^U$. Если $G(E)$ — не интервальный граф, то $E \notin \Omega_4$; перейти на п. 4.

2. Проверить условия $F_j(E) \leq \beta_j$, $j \in M$. Если хоть одно из них не выполняется, то $E \notin \Omega_4$; перейти на п. 4.

3. Получили $E \in \Omega_4$. Вычислить $F_0(E)$.

4. Конец.

Интервальность графа проверяется эффективно [8], поэтому релаксированная (относительно (2)) задача (4) имеет полиномиальную оракульную сложность. Нахождение эффективных расписаний, соответствующих эффективным траекториям, сводится к построению максимальных путей транзитивного орграфа.

Можно доказать, что $\mathbf{P}_T = \bigcup_{E \in \mathbf{P}'_\Omega} X^*(E)$, где $\mathbf{P}'_\Omega$ — множество Парето задачи (4), $X^*(E) = \{t \in X(E) : f_0(t) = F_0(E)\} \neq \emptyset$. Но, в отличие от (3), система множеств $X^*(E)$, $E \in \mathbf{P}'_\Omega$, является покрытием множества $\mathbf{P}_T$, т.к. подмножества, соответствующие разным траекториям, могут пересекаться.

Литература

1. *Теория расписаний и вычислительные машины* / Под. ред. Э.Г. Коффана. – М.: Наука, 1984. – 334 с.
2. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Шарыгин П.И. *Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход.* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 12. – С. 34–44.
3. Зинченко А.Б. *Полиномиальная разрешимость специальных задач дизъюнктивного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 2. – С. 341–345.
4. Козырев В.П. *Описание и порождение всех минимальных раскрасок интервального графа и решение смежных задач* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 5. – С. 146–152.
5. Кравцов М.К. *Неразрешимость задач векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев* // Дискрет. матем. – 1996. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 89–96.
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* – М.: Наука, 1982. – 254 с.
7. Peler Itsik, Shamir Ron. *Realizing interval graphs with size and distance constraints* // SIAM J. Discrete Math. – 1997. – V. 10. – № 4. – P. 662–687.
8. Korte N., Mohring R.H. *An incremental linear-time algorithm for recognizing interval graphs* // SIAM J. Comput. – 1989. – V. 18. – № 1. – P. 68–81.

Ростовский государственный университет

Поступили
первый вариант 22.06.1999
окончательный вариант 11.08.2000