И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.968

А.Ф. ВОРОНИН

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 1-ГО РОДА В СВЕРТКАХ С ГЛАДКИМ ЯДРОМ

В данной работе методами теории уравнений в свертках на полубесконечном интервале [1], [2] получен некоторый аналог теоремы Пикара ([3], с. 231–232) для уравнения

$$\int_0^b k(x-t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [d,c], \tag{1}$$

при условиях

$$k, k' \in L_1(d-b,c), \quad k(c) \neq 0, \quad k(d-b) \neq 0, \quad b > 0, \quad d < c, \tag{2}$$

$$f, f' \in L_1(d,c), \quad f(c) = f(d) = 0. \tag{3}$$

Положим $k(t) := 0$ при $t \notin [d-b,c]$,

$$\mathcal{F}k(p) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}k(t)dt = \int_{d-b}^{c} e^{ipt}k(t)dt \text{ — преобразование Фурье функции } k,$$

$$\Lambda^+(p) := -ipe^{-ip(d-b)}\mathcal{F}k(p), \quad \Lambda^-(p) := ipe^{-ipc}\mathcal{F}k(p).$$

Лемма. *Пусть ядро k удовлетворяет условиям* (2). *Тогда существуют числа $\beta > 0$ и $\delta \in (0,\beta)$ такие, что*

$$\Lambda^+(p) \neq 0, \quad \operatorname{Im} p \geq \beta, \quad \Lambda^-(p) \neq 0, \quad |\operatorname{Im} p - \beta| < \delta, \quad \Lambda^-(p) \neq 0, \quad \operatorname{Im} p \leq -\beta, \tag{4}$$

а в полосе $|\operatorname{Im} p| < \beta$ число нулей функции $\Lambda^-(p)$ конечно или счетно. Единственная предельная точка этого множества — бесконечно удаленная точка.

Обозначим через $p_1, p_2, \ldots$ все нули функции $\Lambda^-(p)$ в полосе $|\operatorname{Im} p| < \beta$, пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — кратность этих нулей соответственно. Положим

$$u_{lj}(t) := e^{-itp_j}t^{l-1}, \quad w_{lj}(x) := \int_0^b k(x-t)u_{lj}(t)dt,$$

$$S_\sigma(t,\widehat{c}) := \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{l=1}^{\nu_j} \widehat{c}_{lj}u_{lj}(t), \quad S_\infty(t,\widehat{c}) := \lim_{\sigma\to\infty} S_\sigma(t,\widehat{c}), \tag{5}$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\nu_j} |\widehat{c}_{lj}| < \infty. \tag{6}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00296.

Теорема. *Пусть выполняются условия (2), (3) и существует натуральное $n_0 \geq 2$ такое, что*

$$|p_j|^{-(n_0-1)} = O(j^{-\alpha}) \quad \text{при } j \to \infty, \text{ где } \alpha > 1, \tag{7}$$

и для $n = 2, \dots, n_0$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} k(t) = k^{(n)} \in L_1(d-b, d), \quad f^{(n-1)}(d+0) = 0. \tag{8}$$

Тогда для существования решения уравнения (1) в $L_1(0,b)$ необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (1) имела вид

$$f(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{l=1}^{\nu_j} \widehat{c}_{lj} w_{lj}(x), \quad x \in [d, c], \tag{9}$$

где $\widehat{c} = \{\widehat{c}_{lj}\}$, $l = 1, \dots, \nu_j$, $j = 1, 2, \dots, \sigma$, — последовательность комплексных постоянных, удовлетворяющая при $\sigma \to \infty$ неравенству (6).

Если условие (9) выполнено, то решением уравнения (1) является

$$u(t) = S_\infty(t, \widehat{c}), \quad t \in [0, b]. \tag{10}$$

Решение (10) единственно в классе $L_1(0,b)$, если при $\sigma \to \infty$ система функций

$$\{w_{lj}(x)\}, \quad l = 1, \dots, \nu_j, \quad j = 1, 2, \dots, \sigma,$$

является линейно независимой на интервале (d, c).

Следствие. Пусть выполнены условия (2), (3). Если число нулей функции $\Lambda^-(p)$ в полосе $|\operatorname{Im} p| < \beta$ конечно и равно $\sigma \geq 0$, то теорема также выполняется.

Заметим, что формула для вычисления нулей целой функции ($\Lambda^-(p)$) имеется в [4].

Доказательство леммы. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\mathcal{F}k(p) = \frac{1}{ip}\big(e^{ipc}k(c) - e^{ip(d-b)}k(d-b)\big) - \int_{d-b}^{c} e^{ipt}k'(t)dt.$$

Тогда для $p = x + iy$ получим два асимптотических соотношения:

$$\Lambda^+(p) = k(d-b) - e^{ipq}k(c) + \int_0^q e^{ipt}k'(t+d-b)dt \to k(d-b) \neq 0 \quad \text{при } y \to \infty,$$
$$\Lambda^-(p) = k(c) - e^{-ipq}k(d-b) - \int_{-q}^0 e^{ipt}k'(t+c)dt \to k(c) \neq 0 \qquad \text{при } y \to -\infty,$$

где сходимость равномерная по $x \in R$. Следовательно, существует $\beta_0 > 0$ такое, что $\Lambda^\pm(p) \neq 0$ при $\pm \operatorname{Im} p \geq \beta_0$. Положим $\beta_1 := -\frac{1}{q}\ln|k(d-b)/k(c)|$, тогда из второго асимтотического соотношения и неравенства треугольника имеем неравенство

$$|\Lambda^-(x+iy)| \geq e^{yq}|k(d-b)| - |k(c)| - \left|\int_{-q}^0 e^{ixt}e^{-yt}k'(t+c)dt\right|.$$

Из неравенства для $\beta_2 \geq \max(\beta_0, \beta_1)$, $y > \beta_2 + \delta_0$, где $\delta_0 > 0$, получим $|\Lambda^-(x+iy)| \geq |k(c)|(e^{(y-\beta_1)q} - 1) > |k(c)|(e^{\delta_0} - 1)$ при $|x| \to \infty$. Следовательно, для любого $y_0 > \beta_2 + \delta_0$ все нули функции $\Lambda^-(x+iy)$ в полосе $\beta_2 + \delta_0 < \operatorname{Im} p < y_0$ ограничены по модулю. Тогда по теореме единственности для аналитических функций число нулей в этой полосе конечно. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть решение уравнения (1) существует в $L_1(0,b)$. Продолжим u и f нулем вне области определения. Положим

$$v(x) := \int_0^b k(x-t)u(t)dt \quad \text{при} \quad x \notin [d,c], \quad v(x) := 0 \quad \text{при} \quad x \in [d,c]. \tag{11}$$

Тогда уравнение (1) распространяется на всю вещественную прямую R следующим образом :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)u(t)dt = f(x) + v(x), \quad x \in R. \tag{12}$$

Функции u и v в (12) будем искать с помощью задачи Римана ([1], с. 30).

Из (11) согласно свойству свертки интегрируемых функций имеем

$$v(t) \in L_1(R), \quad v(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin (d-b,d) \bigcup (c,c+b).$$

Положим $v_1(x) := v(x)\chi_{[d-b,d]}(x)$, $v_2(x) := v(x)\chi_{[c,c+b]}(x)$, где $\chi_{[a,b]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Тогда, применив к уравнению (12) преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{F}k(p)\mathcal{F}u(p) = \mathcal{F}f(p) + \mathcal{F}v_1(p) + \mathcal{F}v_2(p), \quad p \in R.$$

Из леммы (соотношения (4)) для всех $x \in \overline{R}$ имеем

$$\Lambda^+(x+i\beta) \neq 0, \quad \Lambda^-(x+i\beta) \neq 0, \quad (x+i\beta)\mathcal{F}k(x+i\beta) \neq 0. \tag{13}$$

Для $p = x + i\beta$ положим

$$V_1(x) := ie^{-ipc}\frac{p\mathcal{F}v_1(p)}{\Lambda^-(p)}, \quad V_2(x) := -ie^{-ip(d-b)}\frac{p\mathcal{F}v_2(p)}{\Lambda^+(p)}, \tag{14}$$

$$H_1(x) := \frac{\mathcal{F}f(x+i\beta)}{(x+i\beta)\mathcal{F}k(x+i\beta)} \quad \text{при} \quad d > 0, \quad H_1(x) := 0 \quad \text{при} \quad d \leq 0. \tag{15}$$

Из теоремы Винера ([2], с. 4) и Пэли–Винера ([1], с. 23) из (15) с учетом последнего неравенства в (13) следует существование функции $h_1 \in L_1(R)$ такой, что

$$h_1(x) := \mathcal{F}^{-1}H_1(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < b, \quad h_1, h_1' \in L_1(R). \tag{16}$$

Из (16) по формуле интегрирования по частям с учетом равенства $h_1(b) = 0$ получим

$$H_1(x) = \int_b^{\infty} e^{ipt}h_1(t)dt = \frac{i}{x}\int_b^{\infty} e^{ipt}h_1'(t)dt, \quad p = x + i\beta. \tag{17}$$

Вернемся к уравнению (13). Разделив его на $\mathcal{F}k$, согласно (14) получим

$$\mathcal{F}u(x+i\beta) = (x+i\beta)H_1(x) + V_1(x) + V_2(x), \quad x \in R. \tag{18}$$

Приведем уравнение (18) к простейшей краевой задаче Римана на R. Положив

$$F^+(x) := \mathcal{F}u(x+i\beta) - (x+i\beta)H_1(x) - V_2(x), \quad x \in R, \tag{19}$$

$$F^-(x) := V_1(x), \quad x \in R, \tag{20}$$

получим искомое краевое условие

$$F^+(x) = F^-(x), \quad x \in R. \tag{21}$$

Из финитности ядра, условия (3) и соотношений в (12) имеем $v(d) = v(d-b) = v(c) = v(c+b) = 0$. По формуле интегрирования по частям получим

$$\int_q^{q+b} e^{ipt}v_2(t+d-b)dt = -\frac{1}{ip}\int_q^{q+b} e^{ipt}v_2'(t+d-b)dt, \tag{22}$$

$$\int_{-q}^{-(c-d)} e^{ipt}v_1(t+c)dt = -\frac{1}{ip}\int_{-q}^{-(c-d)} e^{ipt}v_1'(t+c)dt. \tag{23}$$

Тогда из (19), (17) и (14), (22) следует, что функция $F^+(z)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна, включая границу, и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости. Из (20) и (14), (23) следует, что функция $F^-(z)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ за исключением полюсов в точках $z_1, z_2, \dots$ $(z_j = p_j - i\beta,\ j = 1, 2, \dots)$, непрерывно продолжима на границу и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости.

Для простоты рассуждений будем считать сначала, что число нулей функции $\Lambda^-(p)$ в полосе $|\operatorname{Im} p| < \beta$ конечно и равно $\sigma \geq 0$. Тогда из краевого условия (21) по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля ([1], с. 29–30) имеем

$$F^+(x) = F^-(x) = \widehat{S}_\sigma(x + i\beta, C), \tag{24}$$

где

$$\widehat{S}_\sigma(x + i\beta, C) := \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{l=1}^{\nu_j} c_{lj}(x + i\beta - p_j)^{-l},$$

$C = \{c_{lj}\}$ $(l = 1, \dots, \nu_j,\ j = 1, 2, \dots, \sigma)$ — произвольная последовательность комплексных чисел.

Из (24) и (19), (20) для $p = x + i\beta$ имеем соответственно

$$\mathcal{F}u(p) - pH_1(p - i\beta) - V_2(p - i\beta) = \widehat{S}_\sigma(p, C), \quad V_1(p - i\beta) = \widehat{S}_\sigma(p, C). \tag{25}$$

Тогда из (25) получим

$$\begin{gathered} \mathcal{F}u(p) - pH_1(p - i\beta) + \frac{ip}{\Lambda^+(p)} \int_q^{q+b} e^{ipt} v_2(t + d - b)dt = \widehat{S}_\sigma(p, C), \\ \frac{ip}{\Lambda^-(p)} \int_{-q}^{-(c-d)} e^{ipt} v_1(t + c)dt = \widehat{S}_\sigma(p, C). \end{gathered} \tag{26}$$

Рассмотрим уравнение (26). Умножим его на e^{-ipb} и, положив

$$\widehat{S}_\sigma^\pm(x, \mathrm{C}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib(t+i\beta)} \widehat{S}_\sigma(t + i\beta, C) \frac{dt}{t - (x \pm i0)}, \tag{27}$$

$$H_2^+(x) := e^{-ib(x+i\beta)} H_1(x),$$

$$F_1^-(p) := e^{-ipb} \mathcal{F}u(p) + \widehat{S}_\sigma^-(p - i\beta, C), \quad \operatorname{Im} p \leq \beta, \tag{28}$$

$$F_1^+(p) := -i\frac{p}{\Lambda^+(p)} \int_{q-b}^{q} e^{ipt} v_2(t + d)dt + pH_2^+(p - i\beta) + \widehat{S}_\sigma^+(p - i\beta, C), \quad \operatorname{Im} p \geq \beta, \tag{29}$$

получим краевое условие

$$F_1^+(x + i\beta) = F_1^-(x + i\beta), \quad x \in R.$$

Имеем ([1], с. 29–30)

$$F_1^+(p) = F_1^-(p) = 0, \quad p = x + i\beta, \quad x \in R. \tag{30}$$

Из (30), учитывая (28), (29), получим

$$e^{-ipb} \mathcal{F}u(p) = -\widehat{S}_\sigma^-(p - i\beta, C), \quad \operatorname{Im} p \leq \beta, \tag{31}$$

$$-i\frac{p}{\Lambda^+(p)} \int_{q-b}^{q} e^{ipt} v_2(t + d)dt + pH_2^+(p - i\beta) + \widehat{S}_\sigma^+(p - i\beta, C) = 0, \quad \operatorname{Im} p \geq \beta.$$

Из определения функции $\widehat{S}_\sigma$ следует

$$\widehat{S}_\sigma(p, C) = \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{l=1}^{\nu_j} \widehat{c}_{lj} \int_0^\infty e^{ipt} u_{lj}(t)dt, \quad \text{где} \quad \widehat{c_{lj}} = i^{-l} \frac{c_{lj}}{(l-1)!}.$$

Тогда из (27) по интегральной формуле Коши получим

$$\widehat{S}_\sigma^-(x,C) = e^{-ipb}\sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{l=1}^{\nu_j}\widehat{c}_{lj}\int_0^b e^{ipt}u_{lj}(t)dt. \tag{32}$$

Из (32) и (5) следует

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{i(x+i\beta)b}\widehat{S}_\sigma^-(x,C)\}(t) = S_\sigma(t,\widehat{c})\chi_{[0,b]}(t), \quad t\in R. \tag{33}$$

Тогда из (31) и (33) имеем

$$u(t) = S_\sigma(t,\widehat{c}), \quad t\in[0,b]. \tag{34}$$

Из (34) и (1) получим необходимое условие существования

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\sigma}\sum_{l=1}^{\nu_j}\widehat{c}_{lj}w_{lj}(x), \quad x\in[d,c]. \tag{35}$$

Из (35) при $f=0$ вытекает требуемое условие на единственность решения. Теорема доказана для случая $\sigma<\infty$, тем самым доказано следствие.

Пусть теперь $\sigma=\infty$. Проинтегрируем краевое условие (21) по x от $-\infty$ до ∞ с весом $(x-z)^{-1}$, где $\operatorname{Im} z>0$. По интегральной формуле Коши с учетом теории вычетов получим

$$F^+(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Res}\frac{F^-(z_j)}{z_j-x} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\nu_j}c_{lj}(x-z_j)^{-l}, \quad x\in R. \tag{36}$$

Покажем, что в (36) для любого l

$$c_{lj} = o(|z_j|^{-(n_0-1)}) \ \text{ при } \ j\to\infty. \tag{37}$$

Из (12) и условия (8) следует, что $v_1^{(n)}(d+0) = v_1^{(n)}(d-b-0) = 0$, $n=1,\ldots,n_0-1$. Тогда из формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_{d-b}^{d} e^{ixt}v_1'(t)dt = o(|x|^{-(n_0-1)}) \ \text{ при } \ |x|\to\infty. \tag{38}$$

Из (22), (23) и (38) получим $V_1(x) = o(|x|^{-(n_0-1)})$ при $|x|\to\infty$. Из равенств (20) и (36) вытекают соотношения (37). Следовательно, ряд в правой части (36) равномерно сходится для всех $x\in R$ ввиду соотношения (8) и неравенства $|x-z_j|>\delta$ для всех j. Таким образом, все выкладки вышеприведенного доказательства, начиная с цепочки (24), также будут верны и для $\sigma\to\infty$. $\square$

Литература

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Крейн М.Г. *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов* // УМН. – 1958. – Т. 13. – Вып. 5. – С. 3–120.
3. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения; введение в теорию.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
4. Товмасян Н.Е., Кошелева Т.М. *Об одном методе нахождения нулей аналитических функций и его применение для решения краевых задач* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 5. – С. 1146–1156.

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступили
первый вариант 26.12.2000
окончательный вариант 04.06.2001